国外电子与通信教材系列

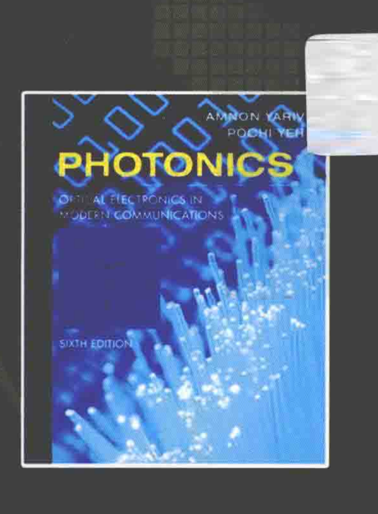
光子学

——现代通信光电子学

（第六版）

PHOTONICS

Optical Electronics in Modern Communications, Sixth Edition



［美］ Amnon Yariv
Pochi Yeh 著

陈鹤鸣 施伟华 汪静丽 等译

陈鹤鸣 审校

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

http://www.phei.com.cn

光子学——现代通信光电子学（第六版）

PHOTONICS: Optical Electronics in Modern Communications Sixth Edition

本书主要讲述激光物理学领域的各种现象和器件的基本原理。全书共分18章，阐述了适用于光通信和电子学的物理基础和工作原理，包括光学共振腔、各种激光器、波导、光纤、光栅和光子晶体；涵盖了光网络中光的传输、调制、放大和检测，以及光纤中的光学非线性效应等。本书中采用了电磁场理论、麦克斯韦方程组和电磁波传输方法，同时在每章中都附有大量习题和生动实例。

本书内容丰富，既适用于本科高年级学生和研究生面向光子学、光电子学或光通信的课程，也可供相关工程技术人员和科研人员学习参考。

第六版中的新增内容

- 斯托克斯参数和邦加球：双折射光网络中的偏振态，偏振主态
- 费马原理：光线，光束传输，菲涅耳衍射积分
- 矩阵方法：在多腔标准具中的波的传输，多层结构，模耦合，锁模激光器中的超模
- 色散：光纤中的色散现象和偏振模色散（PMD）及其补偿
- 耦合共振腔光波导（CROW）：矩阵法，临界耦合，色散关系
- 光纤的非线性光学效应：自相位调制，交叉相位调制，受激布里渊散射（SBS），受激拉曼散射（SRS），四波混频，频谱反转（相位共轭）
- 电吸收：波导电光马赫—曾德调制器
- 光子晶体：布洛赫波描述，光子能带，光子带隙，周期介质，光纤布拉格光栅，布拉格反射波导
- 光放大器：半导体光放大器（SOA），掺铒光纤放大器（EDFA），拉曼光放大器



作者简介

Amnon Yariv是加州技术研究院电子工程系和应用物理系教授。

Pochi Yeh是加州大学电子工程系教授。

策划编辑：陈　磊

责任编辑：马　岚

责任美编：张　丹







国外电子与通信教材系列

光 子 学

——现代通信光电子学（第六版）

PHOTONICS

Optical Electronics in Modern Communications
（Sixth Edition）

[美] Amnon Yariv　Pochi Yeh 著

陈鹤鸣　施伟华　汪静丽等译

陈鹤鸣　审校

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 • BEIJING

内 容 简 介

本书主要讲述激光物理学领域的各种现象和器件的基本原理。全书共分18章，阐述了适用于光通信和电子学的物理基础和工作原理，包括光学共振腔、各种激光器、波导、光纤、光栅和光子晶体；涵盖了光网络中光的传输、调制、放大和检测，以及光纤中的光学非线性效应等。本书中采用了电磁场理论、麦克斯韦方程组和电磁波传输方法，同时在每章中都附有大量习题和生动实例。

本书内容丰富，既适用于本科高年级学生和研究生面向光子学、光电子学或光通信的课程，也可供相关工程技术人员和科研人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

光子学：现代通信光电子学：第6版/(美)亚里夫(Yariv, A.)，(美)耶赫(Yeh, P.)著；陈鹤鸣等译.

北京：电子工业出版社，2014.1

(国外电子与通信教材系列)

书名原文：Photonics:Optical Electronics in Modern Communications, Sixth Edition

ISBN 978-7-121-22190-3

I. ①光… II. ①亚… ②耶… ③陈… III. ①光纤通信－光电子学－高等学校－教材 IV. ①TN929.11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第304110号

策划编辑：陈　磊

责任编辑：马　岚

文字编辑：陈　磊

印　　刷：涿州市京南印刷厂

装　　订：涿州市京南印刷厂

出版发行：电子工业出版社

北京市海淀区万寿路173信箱　邮编：100036

开　　本：787×1092　1/16　印张：50.5　字数：1292千字

印　　次：2014年1月第1次印刷

定　　价：89.00元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：(010)88258888。

译 者 序

光子学是研究作为信息和能量载体的光子行为及其应用的科学，在理论上，它主要研究光子的量子特性及其在与物质（包括与分子、原子、电子以及与光子自身）的相互作用中出现的各类效应及其规律；在应用方面，它的研究内容主要包括光子的产生、传输、控制以及探测规律等。以它为基础的光通信技术发展十分迅速，对人类社会和生活的各个方面产生了广泛和深远的影响。

本书根据 A. 亚里夫先生《光子学》即以前出版的《现代通信光电子学》的最新版本（第六版）译出。该书反映了光子学领域的最新进展，全书共有 18 章和 7 个附录。其中第 1～3 章是学习光电子学必须具备的基础知识。第 4～6 章及第 15～16 章是关于激光器的基本理论、结构、常用激光器以及光通信中应用的新型激光器。第 7 章是关于光纤中的色散和偏振模色散。第 8 章、第 14 章和第 18 章着重讨论各种非线性光学问题。第 9 章和第 12～13 章讨论光束的调制和耦合问题。第 10～11 章是关于光探测及其噪声的理论。本书对光子学特别是新兴光子学领域进行了较全面而系统的论述，全书结构严谨，基本概念清晰。在每个理论单元后面还附有大量的生动实例，这可使读者加深对理论的理解，为解决理论问题提供帮助。每章后都列出了参考文献，并附有习题。本书已被视为光电子领域具有权威性的奠基性著作。本书既可作为高等院校电子科学与技术、电子信息科学与技术、电子信息工程、微电子学以及应用物理学等本科专业和光学工程、物理电子学、固体电子与微电子学、电磁场与微波技术以及通信与信息系统等研究生专业的教材或参考书，也可供从事实际工作的工程技术人员学习参考。

本书的翻译是一项艰巨的任务，感谢电子工业出版社、南京邮电大学教务处和光电工程学院的支持和帮助。本书对常用名词的翻译，按照 1996 年全国自然科学名词审定委员会公布的《物理学名词》进行校核。在翻译中我们主要参考了《现代通信光电子学》（第五版）。由于本书内容广，篇幅浩大，公式中的量和符号的使用我们尽可能地遵照原书。

本书翻译中，陈鹤鸣翻译了第 1～3 章、第 7～8 章、第 13～14 章、第 18 章并校阅了全书；施伟华翻译了第 4～6 章、第 15～17 章及索引；汪静丽翻译了第 9～12 章及附录；李培丽、王国栋、闫斌英、王磊、年秀芝、顾晓蕴、胡晓磊和黄滨等做了大量的辅助工作。

由于译者水平有限，译文中恐仍有不妥之处，恳请广大读者批评指正。

译 者

2009 年 5 月于南京

前　　言

光子学有时也称为光电子学，该领域在过去的十年中持续蓬勃发展，这就需要对本书的最新一版（第五版）进行更新。新版本拓宽了理论基础，也增加一些新的重要的内容。

本书保留了对基本原理进行系统和独立完美介绍的传统。第六版重点介绍了光通信和光电子技术中重要器件的物理原理和处理方法。本书既可作为工程和应用物理专业学生的教材或参考书，也可供在该领域从事实际工作的工程技术人员学习参考。

第六版反映了我们修改的两个主要成果：①增加了与光电子与光通信技术发展相关的新课题（略去了一些不太重要的内容）；②精炼和修改第五版中已有内容。在修改的过程中，我们试图使新版能适合于光通信领域的学生、工程师和科研工作者，他们有兴趣学习如何产生和熟练应用光辐射；如何将这些知识应用于信息传输中光子器件的分析与设计。本书也吸收了更多专家与学者的宝贵意见。

这一版的主要新特点为：

1. 介绍了斯托克斯参数和邦加球用于表示双折射光网络的偏振态；
2. 用费马原理导出了光线光束传播和菲涅耳衍射积分；
3. 用矩阵方法处理光波在波导耦合腔中的传播；
4. 用矩阵方法处理多腔标准具和多层膜结构；
5. 用矩阵方法处理锁模激光器中的模耦合和超模；
6. 光纤中的色散和偏振模色散以及它们的补偿问题。
7. 光纤中的非线性光学效应：自相位调制、交叉相位调制、受激布里渊散射（SBS）和受激拉曼散射（SRS），光四波混频（FMX）和频谱反转（相位共轭）。
8. 电吸收和波导电光马赫–曾德调制器；
9. 多层周期介质、光纤布拉格光栅、光子晶体和布拉格反射波导；
10. 光放大器：半导体光放大器、掺铒光纤放大器和拉曼放大器。

如前面的版本一样，使用本书的学生要求具有电磁波理论的基础知识并熟悉麦克斯韦方程以及电磁波在介质和波导中的传播，同时最好对量子力学有一定的了解。

大量的数值例子用来帮助读者构建理论与应用之间的桥梁。

作者感谢他们的学生、同事和许多专家学者，他们的宝贵意见已成为修改时的重要参考。

帕萨迪纳，加利福尼亚　Amnon Yariv
圣巴巴拉，加利福尼亚　Poch Yeh
2006 年 6 月

目　录

第1章　电磁场和电磁波

1.0　引言

这本书涉及现代光通信中的光电子学及其应用的许多重要方面，现代光通信中光波作为本地和长途通信的信息载体。本章回顾一些最重要和最基本的电磁辐射特性。这些背景材料可以作为本书的完整性考虑以及方便的参考资料。

首先回顾一下麦克斯韦方程，它主导着光波在不同介质中（包括自由空间、光学晶体、周期介质、光纤和波导）的传播，接下来描述电场和磁场强度矢量的边界条件。麦克斯韦方程最重要的贡献之一是预言了自由空间中电磁波的存在。我们讨论由于波在介质中传播所引起的能量储存和传输的表达式。接下来将推导波动方程、对单色平面波和它们的一些重要的特性进行分析。然后还将探讨光波的偏振态及它们的琼斯矩阵表示、斯托克斯参数表示和邦加球表示，并综合考虑光在各向异性介质中的传播。之后，还将详细讨论琼斯计算，这是分析光波在双折射系统中传播特性的重要技术。最后是对相干性基本理论的一些简单讨论。

1.1　麦克斯韦方程和边界条件

在著名著作《电磁论述》中，苏格兰物理学家詹姆士·克拉克·麦克斯韦在 1873 年发表了他的关于光的电磁理论的原始发现。他的理论导致很多重要发现，包括电磁波的存在。基于他的理论，所有的电、磁、电磁和光现象都受相同的电磁基本规则的主导。这些规则用数学公式表示成麦克斯韦方程（以 MKS 为单位）

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \tag{1.1-1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{J} \tag{1.1-2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{1.1-3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1.1-4}$$

这些方程中，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 分别是电场强度矢量（伏特每米）和磁场强度矢量（安培每米）。这两个场矢量经常用来描述电磁场或者光波。$\boldsymbol{D}$（库仑每平方米）和 $\boldsymbol{B}$（韦伯每平方米）分别是电位移矢量和磁感应强度矢量。这两个矢量用来描述电磁场在物质上的作用，ρ 和 $\boldsymbol{J}$ 分别是体电荷密度（库仑每立方米）和电流密度矢量（安培每平方米）。电荷和电流被认为是由 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 矢量描述的电磁辐射的源。这四个方程完全决定了电磁场，是电磁场理论的基本方程。

在光电子和光通信领域中，人们经常需要处理的是电荷密度和电流密度都为零的空间中电磁辐射的传播和传输问题。事实上，如果在麦克斯韦方程中设 $\rho=0$ 和 $\boldsymbol{J}=0$，我们发现方程存在非零解。这表示电磁场可以在没有电荷或电流的空间里存在。在没有电荷的介质中产生的电磁场叫做电磁波。麦克斯韦方程（方程式（1.1-1）到式（1.1-4））包含了 8 个标量方

程，共有 12 个变量，**E**，**H**，**D** 和 **B** 四个中每一个场矢量对应 3 个变量。这些变量无法得到唯一解，除非 **B** 和 **H**，**E** 和 **D** 之间的关系已知。为了能唯一决定各个场矢量，麦克斯韦方程必须辅助以所谓的连续性方程（或物质方程）：

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P} \tag{1.1-5}$$

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}=\mu_0\boldsymbol{H}+\mu_0\boldsymbol{M} \tag{1.1-6}$$

这里的连续性参数 ε 和 μ 分别是电介质张量（或电导率）和磁导率，是 2 阶张量；**P** 和 **M** 分别是电极化强度和磁极化强度。在矢量符号中，介电张量和磁导率常常写成 3×3 的矩阵形式。当电磁场在物质中存在，电场可以影响电子运动，从而产生电荷的分离分布。这在单位体积里产生一个偶极子。类似地，磁场在材料中也可以产生磁化，其磁导率 μ 不同于自由空间中的磁导率 μ_0。常数 ε_0 是真空中的电容率，它的值是 8.854×10^{-12} H/m。常数 μ_0 是真空中的磁导率，它的精确值是 $4\pi\times10^{-7}$ H/m。

如果材料介质是各向同性的，那么 ε 和 μ 简化为标量。在光电子和光通信的大部分应用中，ε 和 μ 可以认为是独立于场强的。然而，如果场足够强，例如通过聚焦激光束获得的光强或者通过在电光晶体中施加强的直流电场得到的光强，ε 和 μ 对 **E** 和 **H** 的依赖性就必须考虑。这些光非线性效应将在这本书的后续章节中讨论。

边界条件

麦克斯韦方程可以在 ε 和 μ 都是连续的区域求解。在光电子和光通信领域，人们经常遇到光波在横跨一个或多个界面时，物理性质（由 ε 和 μ 表示）突然变化的情况，例如，一个介质波导由不同介电常量（或折射率）的透明层构成。虽然横跨界面时物理性质突然变化，但是在介质界面电场的某些分量存在连续性关系，这些连续性关系可以直接从麦克斯韦方程推出。

考虑由两种不同介电常量和磁导率（介质 1 和介质 2）组成的界面。为了得到 **B** 和 **D** 的边界条件，构建一个单位表面积的圆柱形扁盒，如图 1.1（a）所示。圆柱形扁盒的上底与下底平行于界面。我们对方程式（1.1-3）和方程式（1.1-4）两边应用高斯散度定理

$$\iiint \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V=\iint \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.1-7}$$

当圆柱形扁盒的高度趋向于零时，高斯面的积分成为上下底面的积分。结果为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)&=0\\ \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)&=\sigma\end{aligned} \tag{1.1-8}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是垂直于表面从介质 1 指向介质 2 的单位矢量，$\boldsymbol{B}_1$、$\boldsymbol{D}_1$ 是边界附近介质 1 一侧的场矢量，$\boldsymbol{B}_2$、$\boldsymbol{D}_2$ 是边界附近介质 2 一侧的场矢量，σ 是面电荷密度（库仑每平方米）。这些边界条件常常写成

$$\begin{aligned}B_{2n}&=B_{1n}\\ D_{2n}-D_{1n}&=\sigma\end{aligned} \tag{1.1-9}$$

其中 $B_{1n}=\boldsymbol{B}_1\cdot\boldsymbol{n},B_{2n}=\boldsymbol{B}_2\cdot\boldsymbol{n},D_{1n}=\boldsymbol{D}_1\cdot\boldsymbol{n},D_{2n}=\boldsymbol{D}_2\cdot\boldsymbol{n}$。换句话说，磁感应强度的法向分量总是连续的，电位移矢量 **D** 的法向分量的差等于面电荷密度 σ 的大小。

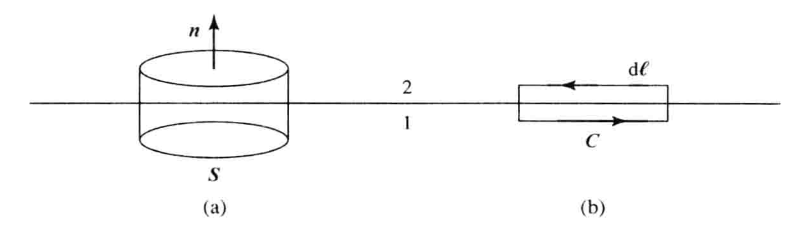


图 1.1　介质 1 和介质 2 的边界。n 是垂直于表面的单位矢量，从介质 1 指向介质 2，$\mathrm{d}\ell$ 是沿矩形轮廓 C 的线积分

对电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$ 和磁场强度矢量 $\boldsymbol{H}$，画一个两个长边平行与不连续表面的矩形，见图 1.1（b）。我们对方程式（1.1-1）和方程式（1.1-2）两边应用斯托克斯定理

$$\iint \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \tag{1.1-10}$$

当矩形的宽度趋向于 0 的极限时，矩形四周的积分可以简化为只有两条边的积分，得到

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0 \\ &\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = \boldsymbol{K} \end{aligned} \tag{1.1-11}$$

这里的 $\boldsymbol{K}$ 是面电流密度（安培每平方米），$\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{E}_2$ 和 $\boldsymbol{H}_2$ 分别是紧靠在介质 1 和介质 2 周围的场矢量。式（1.1-11）的电场和磁场的边界条件又常常写成

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{E}_{2t} = \boldsymbol{E}_{1t} \\ &\boldsymbol{H}_{2t} - \boldsymbol{H}_{1t} = \boldsymbol{K} \end{aligned} \tag{1.1-12}$$

这里的下标 t 表示场矢量的切向分量。（注意：场矢量边界表面的切向分量也是表面切向平面的矢量。）换句话说，电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$ 的切向分量在分界面处总是连续的，而且磁场强度矢量 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量的差等于面电流密度 $\boldsymbol{K}$。

在光电子和光通信的很多领域，人们经常处理的是面电荷密度 σ 和面电流密度 $\boldsymbol{K}$ 不存在的情况，例如介质波导的芯层和包层的界面处。在这种环境中 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量，$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的法向分量在通过介质 1 和介质 2 的界面时都是连续的。在光电子和光通信领域中，这些边界条件在求解很多光传输问题时都是很重要的，包括在光纤和介质波导中传导的光波。

1.2　能量密度和玻印亭矢量

我们已经知道，有时候光可以以电磁辐射的形式携带能量。太阳每天向地球释放巨大的能量（大约 $1\,\mathrm{kW/m^2}$ 的强度）。正如我们指出的，麦克斯韦方程第一个也是最重要的显著成就是预测了电磁波的存在和能量的传播。考虑电力学中两个最重要的方面：以电磁波形式存储的能量和伴随着电磁波的功率流。为了推导能量密度和功率流，我们考虑在空间中一个很小的体积元内的能量守恒。单位体积内电磁场做的功 $\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E}$ 可以认为是单位体积内的能量损耗。这个能量扩散必须和能量密度的净减少及流向体积元外部的功率流的净减少相关。根据式（1.1-2），电磁波所做的功可以写成

$$\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H}) - \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1.2-1}$$

如果应用矢量恒等式

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) \tag{1.2-2}$$

并应用方程式（1.1-1），则等式（1.2-1）的右边变成

$$\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E} = -\nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) - \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} - \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1.2-3}$$

如果进一步假定介质材料在电磁特性方面是线性的（如ε和μ都独立于场强），式（1.2-3）可以写成

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{S} = -\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E} \tag{1.2-4}$$

这里的U和$\boldsymbol{S}$定义为

$$U = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}) \tag{1.2-5}$$

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \tag{1.2-6}$$

这里标量U表示电磁场的能量密度，用 J/m^2 来度量。矢量 $\boldsymbol{S}$ 代表能流，称为玻印亭矢量，用 J/m^2s 来度量。把$|S|$看成电磁场在沿 $\boldsymbol{S}$ 的方向上单位面积所携带的功率（W/m^2），因此$\nabla \cdot S$表示流出单位体积电磁功率。式（1.2-4）被认为是连续性方程或者玻印亭原理，它体现了电磁场的能量守恒。可以用相同的方法得到电磁场的动量守恒定理（见习题 1.5）。

在不存在电流的区域里（$\boldsymbol{J}=0$），连续性方程变为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{S} = 0 \tag{1.2-7}$$

因此，在没有电流的空间，包围体积内电磁能量密度的减少是电磁能量通过包围体积的表面流出包围空间的结果。

偶极损耗

应用物质方程式（1.1-5）和式（1.1-6），电磁场在单位体积所做的功，$\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E}$（或方程式（1.2-3））可以写成

$$\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E} = -\nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) - \mu_0 \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \mu_0 \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t} - \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \tag{1.2-8}$$

在本书中我们特别感兴趣的是右边倒数第一项

$$\boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \tag{1.2-9}$$

它代表在单位体积中电场对电偶极子所作的功率，该功率既可增加偶极子的电势能，也可补偿当$\boldsymbol{P}$改变时引起的能量损耗。

1.3　单色场和复函数体系

在光电子和光通信中，人们经常把单色光作为信息的载体。我们知道单色光有唯一的振荡频率，单色光的场矢量是时间的正弦函数。为了简化代数运算，我们引入复函数（分析函数）体系。为了阐明这一点，以下列函数为例

$$a(t) = |A| \cos(\omega t + \alpha) \tag{1.3-1}$$

其中ω为角频率（单位：弧度每秒），$|A|$是振幅，α是相位。定义复振幅$a(t)$为

$$A = |A| e^{i\alpha} \tag{1.3-2}$$

则式（1.3-1）可以重写为

$$a(t) = \mathrm{Re}[A e^{i\omega t}] \tag{1.3-3}$$

在复函数体系中我们经常用

$$a(t) = A e^{i\omega t} \tag{1.3-4}$$

代替式（1.3-1）或式（1.3-3）来表示$a(t)$。这样做并不是严格的，因此式（1.3-4）总是理解为取$A\exp(i\omega t)$的实数部分。注意角频率ω和实频率ν（赫兹）之间的关系用下面的等式表示

$$\omega = 2\pi\nu \tag{1.3-5}$$

在大多数情形下，当只涉及线性运算（如微分和积分）时，由复数形式（1.3-4）取代式（1.3-3）是不成问题的，不过当运算涉及单色场矢量的乘积（或乘方）时，如能量密度和玻印亭矢量，就会出现例外，这时必须取场矢量的实部。

以下是一个无须对实数和复数加以区别的例子，从式（1.3-1）出发，我们求$a(t)$的微商

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} a(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |A| \cos(\omega t + \alpha) = -\omega |A| \sin(\omega t + \alpha) \tag{1.3-6}$$

如果从复数形式（1.3-4）出发可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} a(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A e^{i\omega t} = i\omega A e^{i\omega t} \tag{1.3-7}$$

取上式的实部，并利用式（1.3-2），就得到了式（1.3-6）。事实上，当涉及线性运算时，复数形式是最方便的。

下面再举一个必须采用实函数的例子。考虑两个正弦函数$a(t)$和$b(t)$的乘积，其中

$$a(t) = |A| \cos(\omega t + \alpha) = \mathrm{Re}[A e^{i\omega t}] \tag{1.3-8}$$

$$b(t) = |B| \cos(\omega t + \beta) = \mathrm{Re}[B e^{i\omega t}] \tag{1.3-9}$$

而$A = |A| e^{i\alpha}, B = |B| e^{i\beta}$。从实函数出发，可得

$$a(t)b(t) = \frac{|A||B|}{2}[\cos(2\omega t + \alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \tag{1.3-10}$$

从复函数形式出发来计算乘积$a(t)b(t)$，则得

$$a(t)b(t) = AB e^{i2\omega t} = |A||B| e^{i(2\omega t + \alpha + \beta)} \tag{1.3-11}$$

将上式和式（1.3-10）进行比较（式（1.3-10）采用了实函数的形式），即可看出与时间无关的直流项$\cos(\alpha - \beta)$没有出现，另外，式（1.3-11）的实部是式（1.3-10）的 2 倍。因而采用复数形式造成了误差。一般来说，两个复数的实部的乘积不等于这两个复数乘积的实部；换句话说，如果x和y是两个任意复数，则下面式子一般是成立的

$$\mathrm{Re}[x] \cdot \mathrm{Re}[y] \neq \mathrm{Re}[xy] \tag{1.3-12}$$

正弦乘积的时间平均

在光电子学中，经常会遇到场矢量随时间快速变化的光波，例如波长为 $\lambda = 1.5\mu\text{m}$ 的单色光的周期是 $T = \lambda / c = 0.5\times10^{-14}\text{s}$，大多数光探测器在这么短的时间周期内是无法响应的，人们经常考虑的是物理量（如玻印亭矢量和能量密度）的时间平均值而不是瞬时值。常需要寻求两个相同频率的正弦函数乘积的时间平均值

$$\langle a(t)b(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T |A|\cos(\omega t+\alpha)\,|B|\cos(\omega t+\beta)\,\mathrm{d}t \tag{1.3-13}$$

其中 $a(t)$ 和 $b(t)$ 由式（1.3-8）和式（1.3-9）给出，尖括号代表对时间取平均；$T = 2\pi/\omega$ 为振动周期。由于上式被积函数的周期是 T，它可在时间 T 内求平均值。由式（1.3-10）直接可得

$$\langle a(t)b(t)\rangle = \frac{1}{2}|A||B|\cos(\alpha-\beta) \tag{1.3-14}$$

上述结果也可由式（1.3-9）后面所定义的复数振幅 A 和 B 表达式直接得到

$$\langle a(t)b(t)\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[A^*B] \tag{1.3-15}$$

或者以 $a(t)$ 和 $b(t)$ 的解析形式直接给出

$$\langle \mathrm{Re}[a(t)]\mathrm{Re}[b(t)]\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[a(t)^*b(t)] \tag{1.3-16}$$

其中上标星号表示取复共轭。式（1.3-16）右边的时间依赖性消失了，这是因为 $a(t)$ 和 $b(t)$ 都含有相同的时间依赖因子 $\exp(i\omega t)$。式（1.3-15）和式（1.3-16）的结果很重要，而且在本书中将经常用到。当这两个函数的频率差异不大时，式（1.3-16）也是有用的。

通过使用场矢量 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的复数形式（或解析表示），正弦变化场的玻印亭矢量的时间平均（1.2-6）和能量密度时间平均（1.2-5）可以分别表示为

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*] \tag{1.3-17}$$

和

$$U = \frac{1}{4}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}^* + \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}^*] \tag{1.3-18}$$

正弦变化场的偶极损耗可以写成

$$P_D = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{E}^*\cdot\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t}\right) \tag{1.3-19}$$

如果电磁场写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\\ \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{H}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\end{aligned} \tag{1.3-20}$$

电极化强度写成

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0\chi\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{1.3-21}$$

其中 χ 是电极化系数，那么偶极损耗可以写成

$$P_D = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(i\omega\varepsilon_0\chi\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_0^*) \tag{1.3-22}$$

一般地，χ 是一个复数，它导致电极化强度 $\boldsymbol{P}$ 和电场 $\boldsymbol{E}$ 之间的相位延迟。相位延迟依赖于 χ 的虚部。如果介质对电场的响应是瞬时的（即没有相位延迟），那么 χ 是实数，根据

式（1.3-22），这种介质是无损耗的。如果把复极化系数写成

$$\chi = \chi' - i\chi'' \tag{1.3-23}$$

其中χ'是实部，χ''是虚部，这时偶极损耗可以表示为

$$P_D = \frac{1}{2}\omega\varepsilon_0 \boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{E}_0^* \chi'' \tag{1.3-24}$$

我们注意到电极化率的虚部和偶极损耗有关。

1.4　波动方程和单色平面波

麦克斯韦方程两个重要的结论是波动方程及其电磁波解的存在性。在这里我们推导各向同性介质中的波动方程，然后考虑平面电磁波在均匀的各向同性介质中的传输，也就是ε和μ都是标量常数，真空无疑是这类介质的最好例子。含有相同成分的玻璃也可以视为均匀的各向同性介质。

我们从麦克斯韦方程式（1.1-1）～式（1.1-4）出发推导波动方程。假定电荷密度ρ和电流密度$\boldsymbol{J}$都为零，运用物质方程$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$，麦克斯韦方程的前两个可以写成

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = 0 \tag{1.4-1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0 \tag{1.4-2}$$

对式（1.4-1）取旋度运算并利用等式（1.4-2）消去$\nabla \times \boldsymbol{H}$，得到

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) + \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{E} = 0 \tag{1.4-3}$$

上式中的第一项可以展开为

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} \tag{1.4-4}$$

利用式（1.1-3）和$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$，我们发现，均匀的各向同性介质中，式（1.4-4）右边的第一项是 0，因此式（1.4-3）变为

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{E} = 0 \tag{1.4-5}$$

这就是在均匀各向同性介质中电场强度矢量$\boldsymbol{E}$的波动方程。对于磁场强度矢量$\boldsymbol{H}$可以得到类似的方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{H} = 0 \tag{1.4-6}$$

这是标准的电磁波动方程，它们有单色平面波解

$$\psi = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r})} \tag{1.4-7}$$

其中A是一个常数，称为振幅。式（1.4-7）中角频率ω和波矢$\boldsymbol{k}$之间的关系为

$$|\boldsymbol{k}| = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \tag{1.4-8}$$

ψ可以是$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{H}$的任何笛卡儿坐标系中的分量。

现在我们考查这个解的含义。表达式（1.4-7）把场分量表示成时间和空间的函数，在空间中的任一点，场是时间的正弦函数，另外，在任意给定的时刻，场也是空间的正弦函数。很明显，当坐标$\boldsymbol{r}$和时间t满足

$$\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=\text{constant} \tag{1.4-9}$$

时，各个场具有相同的值，这里的常数是任意值，决定了场的值。上面的方程决定了在任何时刻一个正交于波矢 $\boldsymbol{k}$ 的平面，这个平面称为等相位面。这个等相位面常常称为波前。式（1.4-7）所表示的电磁波称为平面波，因为所有的波前都是平面。由方程（1.4-9）很容易看出等相位面沿波矢 $\boldsymbol{k}$ 方向传播的速度是

$$v=\frac{\omega}{|\boldsymbol{k}|} \tag{1.4-10}$$

这就是波的相速度。如果我们设方程式（1.4-7）中的 $t=0$，考查波幅的空间变量，那么两个紧邻的电场峰值之间距（即波长）就是

$$\lambda'=\frac{2\pi}{k}=2\pi\frac{v}{\omega} \tag{1.4-11}$$

此处 $k=|\boldsymbol{k}|$，体现了光波在介质中的波长。在光电子和光通信中，λ 表示真空中光的波长。

相速度的值是介质的一个属性，可以用介电常数 ε 和磁导率 μ 表示。由式（1.4-8）和式（1.4-10），可以得到

$$v=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{1.4-12}$$

真空中的相速度是

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=299\ 792\ 458\ \text{m/s} \tag{1.4-13}$$

然而在介质中相速度是

$$v=\frac{c}{n} \tag{1.4-14}$$

其中

$$n=\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0}} \tag{1.4-15}$$

在光电子学中大多数透明介质都是非磁性的，磁导率为 μ_0，事实上，介质的折射率 $n=\sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$。表 1.1 列举了一些常见光电子材料的折射率。然而我们必须记住，非磁性介质（$\mu=\mu_0$）的 ε 是频率 ω 的函数，因而 n 也是频率 ω 的函数。n 随频率 ω 的函数的变化导致了光学中的色散现象。在色散介质中，光波的相速度依赖于频率 ω。例如，在大部分光学玻璃中，红光比蓝光传播得快。折射率和色散的物理机理将在第 5 章中详细讨论。

现在把注意力转移到电磁场的矢量特性和满足麦克斯韦方程所需要的条件。采用复数形式，单色平面波的电磁场可以写成

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{u}_1E_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} \tag{1.4-16}$$

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{u}_2H_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} \tag{1.4-17}$$

这里 $\boldsymbol{u}_1$ 和 $\boldsymbol{u}_2$ 是两个常量单位矢量，E_0 和 H_0 是复振幅，在空间和时间上是常量。在没有电荷的均匀介质中，麦克斯韦散度方程是 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$ 和 $\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0$，把这两个式子用到式（1.4-16）和（1.4-17）中，得到

$$\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{k}=0 \tag{1.4-18}$$

这表示 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 都垂直于传播方向。正因为如此，电磁波被称为横波。在均匀各向同性介质中，横向条件式（1.4-18）支持四个平面波的场矢量。在一般的不存在电荷的各向同性介质中，只有场矢量 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是垂直于传播方向的。

表 1.1　选定材料的折射率

	波长 (μm)									
材料	0.488	0.5	0.5145	0.6328	1.0	1.3	1.55	3.0	5.0	10.6
As-S glass	2.786	2.77	2.75	2.606	2.478	2.449	2.437	2.416	2.407	2.378
BaF_2	1.478	1.4779	1.477	1.473	1.4686	1.467	1.466	1.4611	1.451	1.3928
$Bi_{12}GeO_{20}$			2.55	2.54						
$Bi_{12}SiO_{20}$				2.54						
$Bi_{12}TiO_{20}$				2.55						
CaF_2	1.437	1.4366	1.4362	1.433	1.429	1.427	1.426	1.418	1.399	1.2803
CdS, n_o			2.747	2.46	2.334			2.279	2.266	2.226
CdSe, n_o					2.55	2.50	2.48	2.454	2.446	2.43
CdTe					2.84			2.81	2.77	2.69
CsBr	1.712	1.710	1.707	1.694	1.679	1.675	1.673	1.670	1.668	1.663
CsI	1.810	1.806	1.802	1.781	1.757	1.751	1.749	1.744	1.742	1.739
CuBr	2.201	2.184	2.167	2.102						
CuCl	2.019	2.01	2.002	1.9613	1.924	1.92	1.91	1.903	1.901	1.90
CuI	2.437	2.422	2.405	2.321						
GaAs					3.5	3.41	3.38	3.35	3.29	3.135
GaP			3.66	3.38	3.17	3.07	3.05	2.97	2.94	2.90
GaSb								3.898	3.824	3.843
Ge								4.045	4.0163	4.0029
InAs									3.46	3.42
InP					3.327	3.21	3.17	3.11	3.08	3.05
InSb										3.95
Intran 1 (MgF_2)					1.378	1.377	1.376	1.364	1.337	
Intran 2 (ZnS)					2.291			2.256	2.245	2.1902
Intran 3 (CdF_2)					1.429			1.418	1.399	1.2817
Intran 4 (ZnSe)					2.485			2.44	2.432	2.4034
Intran 5 (MgO)					1.723			1.692	1.637	
KBr	1.572	1.57	1.568	1.558	1.5443	1.541	1.540	1.536	1.534	1.525
KCl	1.498	1.497	1.496	1.488	1.4799	1.478	1.477	1.474	1.471	1.454
KI	1.686	1.684	1.68	1.661	1.64	1.636	1.634	1.6284	1.626	1.6191
LiF	1.395	1.394	1.394	1.392	1.387	1.385	1.383	1.367	1.327	1.05
MgF_2		1.3703			1.363					
MgF_2 crystal, n_o	1.380	1.3798	1.379	1.377	1.374	1.372	1.371			
MgF_2 crystal, n_e	1.392	1.3917	1.391	1.389	1.385	1.384	1.382			
MgO		1.76			1.7237			1.6922	1.6262	
PbF_2	1.786	1.782	1.779	1.761	1.742			1.724	1.708	1.625
Quartz, crystal, n_o	1.55	1.549	1.548	1.543	1.535	1.531	1.528	1.50	1.417	
Ruby, Al_2O_3, n_o	1.776	1.775	1.774	1.766						
Sapphire, Al_2O_3, n_o	1.776	1.775	1.774	1.766	1.756	1.745	1.736	1.7115	1.6239	
Si						3.502	3.476	3.432	3.422	3.418
SiC, crystal	2.698	2.691	2.682	2.64	2.583					
SiO_2, fused silica		1.462	1.462	1.457	1.45	1.447	1.444	1.4185		
$SrTiO_3$, crystal	2.489	2.477	2.461	2.389	2.316			2.231	2.122	
Ta_2O_5	2.27	2.26	2.25	2.16	2.03	1.99				
TiO_2, rutile, n_o	2.731	2.712	2.694	2.59	2.484					
ZnO, crystal, n_o	2.064	2.051	2.044	1.99	1.944	1.932	1.928	1.9072		
ZnS		2.42	2.409	2.351	2.32	2.28	2.27	2.26	2.25	
ZnS, sphalerite	2.433	2.421	2.406	2.354	2.293	2.28	2.27			
ZnS wurtzite, n_o	2.43	2.421	2.41	2.352	2.301					
ZnSe		2.7	2.7	2.59	2.48	2.47	2.46	2.44	2.43	2.392
ZnTe				2.984	2.79	2.75	2.73	2.71	2.70	2.70

麦克斯韦旋度方程对场矢量进一步地加以限制，这是通过把式（1.4-16）和式（1.4-17）代入方程式（1.1-1）得到的，并给定

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{u}_1}{|\boldsymbol{k}|} \tag{1.4-19}$$

和

$$H_0 = \frac{E_0}{\eta}, \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{1.4-20}$$

这表示三元组$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{k})$构成相互正交的矢量，当$\varepsilon$和$\mu$是实数时，场矢量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 同相，并且比值是一个常数。式（1.4-20）中的参数η有电阻的度量，称为空间阻抗，在真空中

$$\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \approx 377\Omega$$

以上推导的是沿着 $\boldsymbol{k}$ 方向传播的横波。根据玻印亭定理式（1.3-17），它代表了能流的时间平均值，表示为

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2\eta}|E_0|^2 \boldsymbol{u}_3 = \frac{\boldsymbol{k}}{2\omega\mu}|E_0|^2 = \frac{\boldsymbol{k}}{2\omega\mu}|\boldsymbol{E}|^2 \tag{1.4-21}$$

其中$\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2$是 $\boldsymbol{k}$ 方向的单位矢量。能量密度的时间平均是

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon|E_0|^2 = \frac{1}{2}\varepsilon|\boldsymbol{E}|^2 \tag{1.4-22}$$

由式（1.4-21）和式（1.4-22），我们注意到能流方向和传播方向一致。从式（1.4-13）和式（1.4-15），我们也得到如下关系

$$S = vU \tag{1.4-23}$$

这个方程简单地阐明了能量是以$v = c/n$的速度沿着传输方向流动的，必须注意，只有在非色散介质中这才是有效的。当存在色散时，能量是以群速度流动的。

1.5　色散和群速度

前面一部分讨论了麦克斯韦方程的平面波解，并研究了平面波的一些基本特性。我们讨论的是具有一定频率和波数的单色平面波。在光通信领域，激光发出的短脉冲也用来传输信息，光脉冲有限的持续时间导致了有限的频率或波长扩展。由于麦克斯韦方程是线性的，因此光脉冲在线性介质中的传输可以表示为不同频率平面波传输的适当叠加。在线性介质中，感应极化正比于电场。如果介质是色散的，则相速度依赖于频率，这就是所谓的色散。由于色散的存在，脉冲的不同频率分量以不同的速度传输。而且，在色散介质中，光脉冲的能流速度和相速度不同，这时一个微妙的课题，需要仔细研究。

由色散导致的光脉冲传输的这些影响可以通过把脉冲看成很多单色平面波的叠加的形式来分析，每一个平面波分量都是麦克斯韦方程的一个解，因为方程是线性的，所以，平面波的叠加也是麦克斯韦方程的解。通常我们用积分来代替求和。为了更清楚地阐明基本概念，仅考虑在横向均匀的一束偏振光。如果$A(k)$代表波矢为 k 的单色平面波的振幅，那么脉冲的电场强度可以写成

$$E(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i[\omega(k)t - kz]} dk \tag{1.5-1}$$

这里角频率写成 $\omega(k)$ 说明它是依赖于 k 的。因为这个积分是相同方程的基本单色平面波解，它满足麦克斯韦方程。注意，如果在某一特定时刻考察 $E(z,t)$，如 $t=0$，那么 $A(k)$ 就是 $E(z,0)$ 的傅里叶变换式，换句话说

$$E(z, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{-ikz} dk \tag{1.5-2}$$

我们将用 $|A(k)|^2$ 表示 $E(z,t)$ 的傅里叶谱（或者功率谱）。

对电磁场来说，ω 和 k 之间的关系（称为色散关系）由式（1.4-8）给出。在下面的讨论中，假定 k 和 $\omega(k)$ 都是实数。典型的光脉冲及其傅里叶谱如图 1.2 所示。

一束偏振光脉冲的特性通常由它的中心频率 ω_0（或相应的波矢 k_0），ω_0 附近的频率展宽 $\Delta\omega$（或相应的波矢宽度 Δk）来描述。典型情况，$A(k)$ 是 k_0 附近的峰值（即 $\Delta k \ll k_0$）。为了在空间和时间上研究这种光脉冲的传输，我们把 $\omega(k)$ 在 k_0 附近以泰勒级数形式展开

$$\omega(k) = \omega_0 + \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{\omega_0} (k - k_0) + \cdots \tag{1.5-3}$$

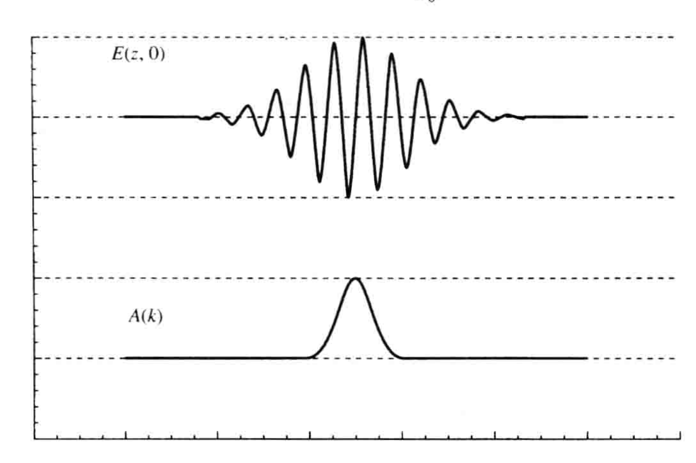


图 1.2　有限宽度的光脉冲及其在波数（k）空间的傅里叶谱

并把式（1.5-3）中的 ω 代入式（1.5-1）。因此式（1.5-2）可以写成

$$E(z, t) = e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \exp\left\{ i\left[\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{\omega_0} t - z\right](k - k_0)\right\} dk \tag{1.5-4}$$

这里忽略（$k - k_0$）的高阶项。式（1.5-4）中的积分只是复合变量

$$\xi = \left[z - \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{\omega_0} t\right] \tag{1.5-5}$$

的函数，可以表示为包络函数 $V(\xi)$，因此，光脉冲的幅度可以表示成

$$E(z, t) = e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} V\left[z - \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{\omega_0} t\right] \tag{1.5-6}$$

这个结果显示，除了一个整体的相位因子外，光脉冲可以在形状上无失真地传输，速度为

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{\omega_0} \tag{1.5-7}$$

这个速度称为脉冲的群速度。图 1.3 显示了光脉冲在这种近似下的色散介质中的传输情况。只有当分布在 k_0 处达到峰值，而且频率 ω 在 k_0 附近随 k 平缓变化的时候，这种近似才是合理的。如果光脉冲的电磁能量密度和振幅的平方相关，那么，明显地，在这种近似下，群速度代表了能量传输的速度。注意，对脉冲而言，相速度和群速度一般情况下是不同的，相速度一般大于群速度，并且，脉冲的相速度和平面波的相速度同等重要，它是给定波峰或波谷的速度。

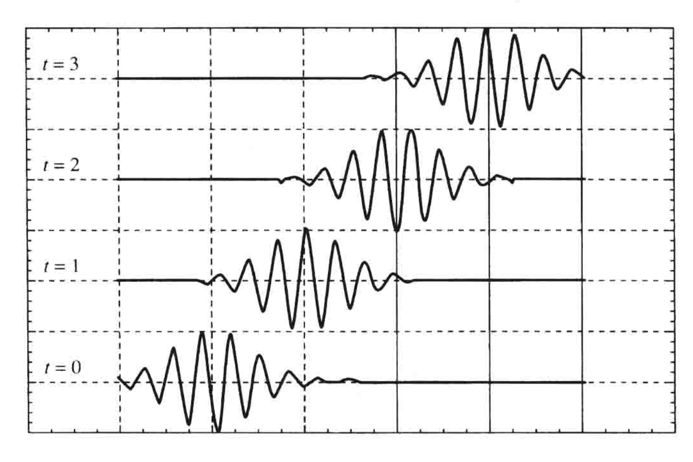


图 1.3　光脉冲的传输

光通信中，光脉冲常常在有色散效应的石英光纤中传输，色散通常由折射率 $n(\omega)$ 来描述，$n(\omega)$ 是频率（或波长）的函数，ω 和 k 之间的关系为

$$k = n(\omega)\frac{\omega}{c} \tag{1.5-8}$$

这里 c 是真空中的光速。相速度为

$$v_p = \frac{c}{n(\omega)} \tag{1.5-9}$$

这个值大于或者小于 c 取决于 $n(\omega)$ 是小于还是大于 1。由式（1.5-7）和式（1.5-8）可以得到群速度为

$$v_g = \frac{c}{n + \omega(dn/d\omega)} \tag{1.5-10}$$

对于正常色散，$dn/d\omega > 0$，群速度小于相速度。然而，在反常色散区，$dn/d\omega$ 可以变大，甚至为负数，群速度与相速度有很大差异，并且可能大于 c。后面这种情况只有在 $dn/d\omega$ 是较大的负数时才会发生，它相当于 ω 是随 k 快速变化的函数，从而使原先的近似不合理。在大部分透明介质中，材料呈现出正常色散，反常色散通常在吸收带的光谱区中。

方程式（1.5-10）经常可以等效地以波长的形式表示为

$$v_g = \frac{c}{n - \lambda(dn/d\lambda)} \tag{1.5-11}$$

群速度色散和脉冲展宽

通过前面的讨论已经看到，当式（1.5-3）的近似成立时，光脉冲在色散介质中也能保持无失真的传输。在高速光通信中，脉冲宽度大约为皮秒量级，这种情况下，振幅 $A(k)$ 在中心波矢 k_0 附近不再是尖峰。因此，二阶项

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}k^2}\right)_{\omega_0}(k-k_0)^2 \tag{1.5-12}$$

不可以忽略。脉冲在传播过程中通常不再保持原状，而是展宽。光通信网中光脉冲的展宽会导致信号传播的退化或损耗。

光脉冲的展宽可以解释为，脉冲中每个谱分量的群速度 v_g 可能不同。这就是所谓的群速度色散（GVD）。如果 Δk 是波矢展开的宽度，那么群速度展宽的量级为

$$\Delta v_\mathrm{g}=\left(\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}k^2}\right)_{\omega_0}\Delta k \tag{1.5-13}$$

光脉冲传输时，人们希望得到的位置展宽在 $\Delta v_g T$ 量级，其中 T 是参考频率分量的传输时间。群速度色散常表示为

$$\Delta v_\mathrm{g}=\left(\frac{\mathrm{d}v_\mathrm{g}}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega_0}\Delta\omega \tag{1.5-14}$$

其中 $\Delta\omega$ 是角频率的展宽，或等效于

$$\Delta v_\mathrm{g}=\left(\frac{\mathrm{d}v_\mathrm{g}}{\mathrm{d}\lambda}\right)_{\omega_0}\Delta\lambda \tag{1.5-15}$$

$\Delta\lambda$ 是波长展宽。

光通信中，信号可以表示成一系列的脉冲。每一个脉冲有一个定义明确的持续时间。例如，在一个 40Gb/s 的传输系统中，脉冲持续时间大约是 25ps。脉冲展宽在皮秒量级是保持信号完整性的重要依据。在传输过程中为了使误码率最小，常常要求脉冲展宽小于脉冲持续时间的一部分。因此，在光纤通信中，群速度色散可以用参数 D 来表征

$$D=\frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\lambda} \tag{1.5-16}$$

其中，T 是通过长度为 L 的光纤时，脉冲的传输时间。物理上来讲，D 是每单位带宽传输介质长度的脉冲展宽（以秒为单位）的度量标准。应用 $T=L/v_\mathrm{g}$，可以表示为

$$T=L\left(\frac{n}{c}+\frac{\omega}{c}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}\right)=L\left(\frac{n}{c}-\frac{\lambda}{c}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right) \tag{1.5-17}$$

和

$$D=-\frac{1}{c\lambda}\left(\lambda^2\frac{\mathrm{d}^2n}{\mathrm{d}\lambda^2}\right) \tag{1.5-18}$$

或者等价为

$$D=-\frac{2\pi c}{\lambda^2}\frac{\mathrm{d}^2k}{\mathrm{d}\omega^2} \tag{1.5-19}$$

注意群速度色散与折射率对频率（或波长）的二阶微分有关。

例：二氧化硅（SiO_2）的色散。

用于通信的大部分光纤是用石英玻璃制作的。纯石英玻璃呈现出非常低的吸收损耗。然而，这种材料存在色散。石英折射率的一个精确的经验公式可以表示为

$$n(\lambda) = c_0 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda^4 + \frac{c_3}{(\lambda^2 - a)} + \frac{c_4}{(\lambda^2 - a)^2} + \frac{c_5}{(\lambda^2 - a)^3} \tag{1.5-20}$$

其中

$$\begin{aligned} c_0 &= 1.4508554 \\ c_1 &= -0.0031268 \\ c_2 &= -0.0000381 \\ c_3 &= 0.0030270 \\ c_4 &= -0.0000779 \\ c_5 &= 0.0000018 \\ a &= 0.035 \end{aligned}$$

而 λ 的单位是微米。

图 1.4 表示了石英玻璃的折射率与波长的函数关系，可以看到，折射率是波长的下降函数，这是典型的正常色散区。

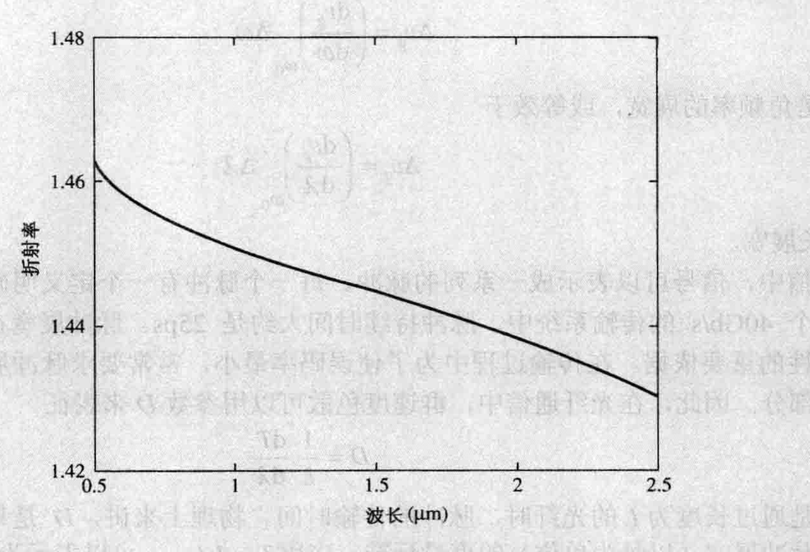


图 1.4　石英玻璃的折射率随波长的变化

通过式（1.5-11），我们得到光在石英玻璃中传输的群速度。图 1.5 显示了 v_g / c 随波长的变化，很显然，群速度依赖于波长。光在纯二氧化硅中的群速度在波长 $\lambda = 1.275\mu m$ 附近达到最大值。光脉冲的传输在 $\lambda = 1.55\mu m$ 的光谱区域内时，光脉冲的短波长分量比长波长分量传播得快。群速度的不同导致了脉冲展宽和脉冲中频率啁啾的下降。

通过式（1.5-18），得到石英玻璃中的群速度色散。图 1.6 表示群速度色散 D 和波长的函数关系。注意到在波长 $\lambda = 1.275\mu m$ 附近，D 变为零。在 $\lambda = 1500nm$ 的光谱区域内大块二氧化硅玻璃的群速度色散大约是 20ps/nm · km。

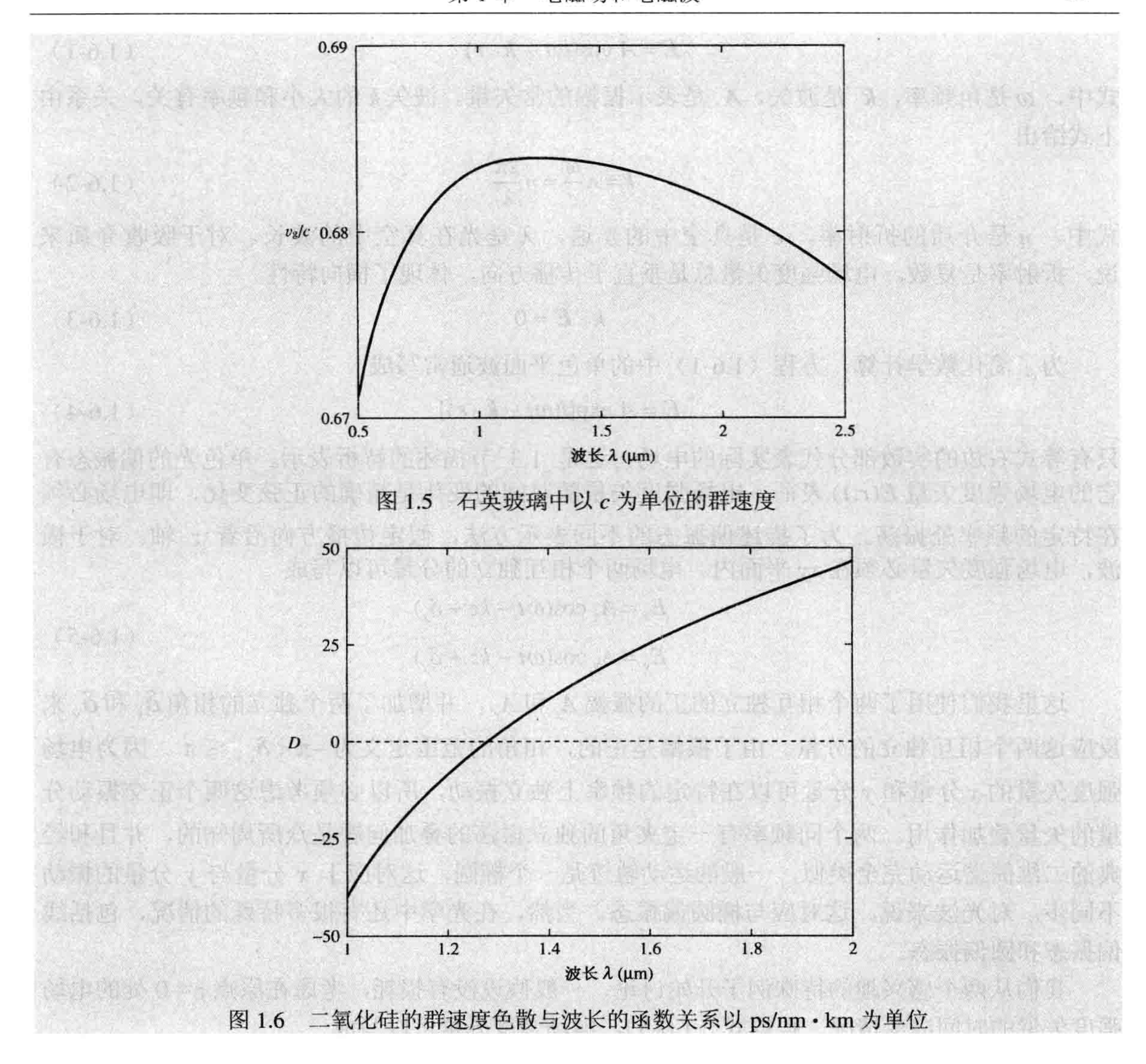


图 1.5　石英玻璃中以 c 为单位的群速度

图 1.6　二氧化硅的群速度色散与波长的函数关系以 ps/nm · km 为单位

1.6　偏振态及其表示（斯托克斯参数和邦加球）

在光的电磁理论中，光线可以由空间中的电磁波传输来表征，常用它的电场强度矢量表征；光线传播时，该电场强度矢量在空间和时间上振荡。在各向同性介质中，振荡的方向总是垂直于传输方向的。对于横波来说，有两个相互独立的振动方向。各向同性介质中（如，玻璃，真空），这两个相互独立的振动方向可以任意选择。如果振动的两个分量是完全不相干的，则振动的合成方向是随机的，这种光线称为非偏振光。理论上自然界中的热源的振动方向都是随机的。如果一束光线的电场强度矢量在一个特定方向上振动，则这束光线称为是线偏振的。在这一部分中，我们描述光的偏振态和偏振态的各种不同表示方法。

本书的主要目标是对光电子及其在光通信中的应用提供全面的描述。光通信中很多领域都涉及偏振光的应用和各向异性介质。在这里我们介绍偏振的概念时，考虑的是单色平面波在各向同性的均匀介质中的传输。光线可以用它的电场 $E(r,t)$ 表征，写成

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}\cos(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) \tag{1.6-1}$$

式中，ω 是角频率，$\boldsymbol{k}$ 是波矢，$\boldsymbol{A}$ 是表示振幅的常矢量。波矢 k 的大小和频率有关，关系由下式给出

$$k = n\frac{\omega}{c} = n\frac{2\pi}{\lambda} \tag{1.6-2}$$

式中，n 是介质的折射率，c 是真空中的光速，λ 是光在真空中的波长。对于吸收介质来说，折射率是复数。电场强度矢量总是垂直于传播方向，体现了横向特性

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E} = 0 \tag{1.6-3}$$

为了简化数学计算，方程（1.6-1）中的单色平面波通常写成

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}\exp[i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})] \tag{1.6-4}$$

只有等式右边的实数部分代表实际的电场。这是 1.3 节描述的解析表示。单色光的偏振态有它的电场强度矢量 $E(r,t)$ 表征。电场强度矢量随时间的变化是精确的正弦变化，即电场必须在特定的频率处振荡。为了描述偏振态的不同表示方法，假定传播方向沿着 z 轴。对于横波，电场强度矢量必须在 xy 平面内。电场两个相互独立的分量可以写成

$$\begin{aligned} E_x &= A_x\cos(\omega t - kz + \delta_x) \\ E_y &= A_y\cos(\omega t - kz + \delta_y) \end{aligned} \tag{1.6-5}$$

这里我们使用了两个相互独立的正的振幅 A_x 和 A_y，并增加了两个独立的相角 δ_x 和 δ_y 来反应这两个相互独立的分量。由于振幅是正的，相角的范围定义为 $-\pi < \delta_{x,y} \leqslant \pi$。因为电场强度矢量的 x 分量和 y 分量可以在特定的频率上独立振动，所以必须考虑这两个正交振动分量的矢量叠加作用。两个同频率有一定夹角的独立振荡的叠加问题是众所周知的，并且和经典的二维简谐运动完全类似，一般的运动轨迹是一个椭圆，这对应于 x 分量与 y 分量的振动不同步。对光波来说，这对应与椭圆偏振态。当然，在光学中还有很多特殊的情况，包括线偏振态和圆偏振态。

我们从两个感兴趣的特殊例子开始讨论，一般假设没有损耗，考虑在原点 z=0 处的电场强度矢量的时间演变情况。根据式（1.6-5），电场强度分量可以写成

$$\begin{aligned} E_x &= A_x\cos(\omega t + \delta_x) \\ E_y &= A_y\cos(\omega t + \delta_y) \end{aligned} \tag{1.6-6}$$

定义相对相位为

$$\delta = \delta_y - \delta_x \tag{1.6-7}$$

再次强调，δ 的限制范围是 $-\pi < \delta \leqslant \pi$。

线偏振态

如果光线的电场强度矢量在一个固定的方向振动（在 xy 平面内），那么，这个光线是线偏振的。当振动的两个分量同相（$\delta = \delta_y - \delta_x = 0$）或者反相（$\delta = \delta_y - \delta_x = \pi$）时，光线为线偏振的，即

$$\delta = \delta_y - \delta_x = 0 \quad \text{or} \quad \pi \tag{1.6-8}$$

这种情况下，电场强度矢量在 xy 平面内沿特定的方向以正弦方式振动，两个分量的比值定义为

$$\frac{E_y}{E_x}=\frac{A_y}{A_x}\quad\text{or}\quad-\frac{A_y}{A_x}\tag{1.6-9}$$

因为振幅 A_x 和 A_y 是独立的，所以线偏振光的电场强度矢量可以沿 xy 平面内的任意方向振动。线偏振光常称为平面偏振光。如果在固定的时间点（$t=0$）来考察电场强度矢量的空间变化，电场强度矢量的分量可以写成

$$\begin{aligned}E_x&=A_x\cos(-kz+\delta_x)\\E_y&=A_y\cos(-kz+\delta_y)\end{aligned}\tag{1.6-10}$$

式中，$\delta=\delta_y-\delta_x=0$ 或 π。我们发现分量在空间中的正弦曲线轨迹被限制在由式（1.6-9）定义的平面内。电场强度矢量的振动限制在这个平面内。因此，这种光线称为平面偏振光。平面偏振光和线偏振光的条件是可互换的。由于线偏振态简单和容易制备，在光学中的应用最广泛。

圆偏振态

另外一个重要的特殊情况是圆偏振态。如果电场强度矢量在 xy 平面内均匀旋转，那么这样的光线称为圆偏振光。这种情况发生在 $A_x=A_y$ 和

$$\delta=\delta_y-\delta_x=\pm\pi/2\tag{1.6-11}$$

根据一般规则，当 $\delta=-\pi/2$ 时，光线是右旋圆偏振光，对应于电场强度矢量在 xy 平面内逆时针旋转；当 $\delta=\pi/2$ 时，光线是左旋圆偏振，对应于电场强度矢量在 xy 平面内顺时针旋转。我们对标记右旋偏振和左旋偏振的规定是和现代物理学中的术语一致的，现代物理学中，右旋圆偏振的光子有一个沿传输方向的正的角动量（见习题 1.36）。然而，一些光学课本中采用相反的规定。这种相反的规定源于电场强度矢量在空间上的演进（见习题 1.16）。

一个有趣的现象是，圆偏振态的等振幅和 $\pm\pi/2$ 相位偏移的条件在 xy 平面内任何垂直的坐标中都是有效的；换句话说，当圆偏振光的电场强度矢量分解成任何两个相互垂直的分量时，幅度都是相等的，相位偏移也总是 $\pm\pi/2$。

椭圆偏振态

如果一束光线的电场强度矢量的曲线轨迹是椭圆（在 xy 平面内），那么这束光线是椭圆偏振的。这是偏振光中最普遍的情况。线偏振态和圆偏振态都是椭圆偏振态的特殊情况。在空间中的给定点（$z=0$），方程式（1.6-5）是电场强度矢量末端椭圆轨迹的参数表示。椭圆方程可以通过消除式（1.6-6）中的 ωt 来得到。经过几步初等代数变换后，得到

$$\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2+\left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2-2\frac{\cos\delta}{A_xA_y}E_xE_y=\sin^2\delta\tag{1.6-12}$$

式（1.6-12）是一个二次曲线方程。从式（1.6-6）中可以明显看出，二次曲线被限制在一个矩形区域中，这个矩形区域的边平行于坐标轴，且边长分别为 $2A_x$ 和 $2A_y$，因此，曲线一定是椭圆。光的偏振态一般是椭圆。一个椭圆偏振态的完整描述包括椭圆相对于坐标轴的方位和形状及电场旋向。一般来说，椭圆的主轴不是 x 和 y 方向。通过坐标系变换（旋转），

我们可以对角化式（1.6-12）。令 x' 和 y' 是沿着椭圆主轴的新坐标，那么，新坐标系中的椭圆方程变为

$$\left(\frac{E_{x'}}{a}\right)^2 + \left(\frac{E_{y'}}{b}\right)^2 = 1 \tag{1.6-13}$$

其中 a 和 b 是椭圆半长轴和半短轴的长度，$E_{x'}$ 和 $E_{y'}$ 是这个主坐标系中的电场强度矢量。

令 ϕ 是 x' 轴和 x 轴之间的夹角（见图 1.7），那么，主轴的长度由下式给出

$$\begin{aligned} a^2 &= A_x^2\cos^2\phi + A_y^2\sin^2\phi + 2A_xA_y\cos\delta\cos\phi\sin\phi \\ b^2 &= A_x^2\sin^2\phi + A_y^2\cos^2\phi - 2A_xA_y\cos\delta\cos\phi\sin\phi \end{aligned} \tag{1.6-14}$$

角度 ϕ 可以用 A_x，A_y 和 $\cos\delta$ 表示为

$$\tan 2\phi = \frac{2A_xA_y}{A_x^2 - A_y^2}\cos\delta \tag{1.6-15}$$

注意，如果 ϕ 是方程的一个解，那么 $\phi+\pi/2$ 也是方程的一个解。椭圆偏振旋转的意义由 $\sin\delta$ 的符号决定。如果 $\sin\delta>0$，电场强度矢量的末端将沿顺时针方向旋转；如果 $\sin\delta<0$，电场强度矢量的末端将沿逆时针方向旋转。图 1.8 说明了对不同的相角 δ，椭圆偏振是怎样变化的。

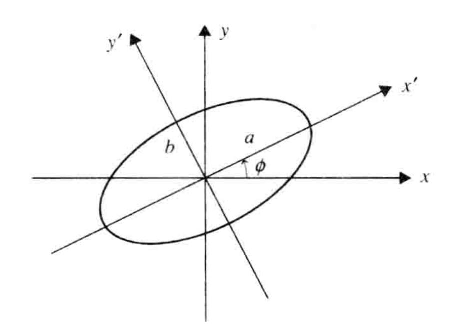


图 1.7　椭圆偏振

椭圆偏振的椭圆率定义为

$$e = \pm\frac{b}{a} \tag{1.6-16}$$

其中 a 和 b 是椭圆半长轴和半短轴的长度。当电场强度矢量是右旋时，椭圆率取正值，否则取负值。根据这个定义，$e=\pm1$ 时是圆偏振光。

正如前面讨论的，当电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$ 的末端沿一条直线移动时，光是线偏振的；当它的移动是椭圆时，光是椭圆偏振的；当它的移动是圆时，光是圆偏振的。如果迎着光线传播方向观察，电场强度矢量的末端是反时针运动的，这个场称为右手偏振的。图 1.8 也给出了椭圆的旋转方向。

一个椭圆偏振态总可以分解为两个相互正交的分量，两个分量之间的相对相移可以处于 $-\pi$ 和 π 之间的任何地方。然而，在主轴坐标系中，两个正交分量的相对相移总是 $-\pi/2$ 或 $\pi/2$，这取决于旋转方向。

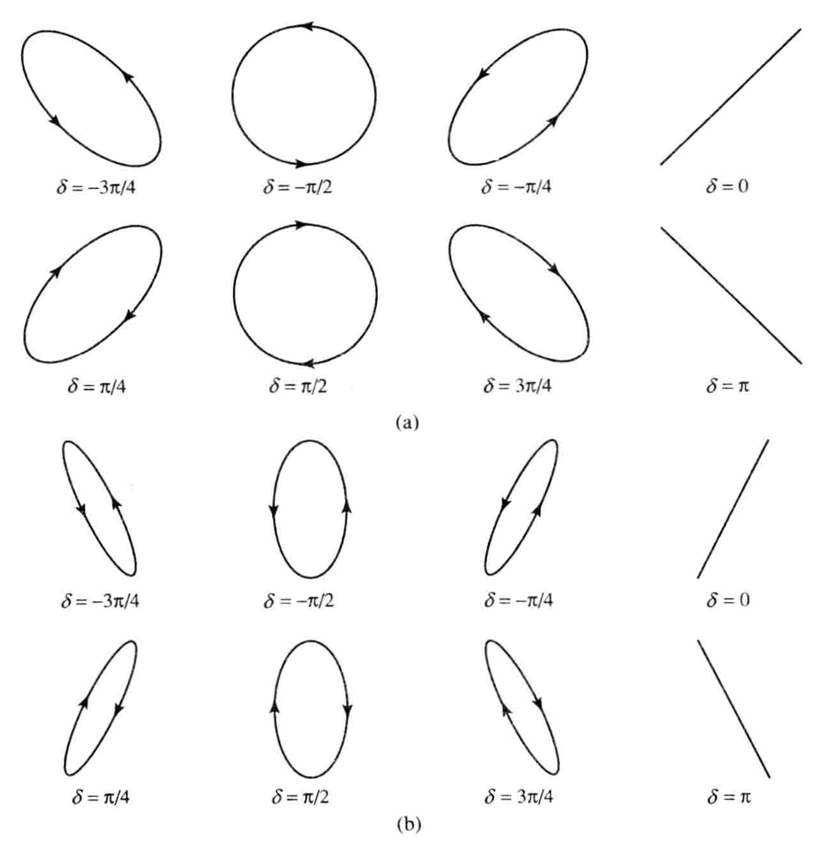


图 1.8　不同相角处的椭圆偏振 δ：（a） $E_x=\cos(\omega t-kz), E_y=\cos(\omega t-kz+\delta)$；（b） $E_x=\frac{1}{2}\cos(\omega t-kz), E_y=\cos(\omega t-kz+\delta)$

复数表示

通过前面的讨论，我们已经知道怎样用电场强度矢量的 x 分量和 y 分量的振幅和相角来描述光线的偏振态。事实上，关于一个波的偏振态的所有信息都包含在平面波的复振幅 $\boldsymbol{A}$（方程（1.6-4））中，因此，定义一个复数 χ

$$\chi = e^{i\delta}\tan\psi = \frac{A_y}{A_x}e^{i(\delta_y-\delta_x)} \tag{1.6-17}$$

来描述偏振态就足够了。角 ψ 定义在 0 和 $\pi/2$ 之间。一个椭圆偏振的完整描述，包括方位、旋向和椭圆率（见方程（1.6-16）），可以用 δ 和 ψ 来表示。图 1.9 描述了复平面中多种不同的偏振态，从图中可以看出，所有右旋椭圆偏振态都在平面的下半部分，而左旋椭圆偏振态都在平面的上半部分。原点对应振动方向平行于 x 轴的线偏振态。因此，复平面上每一点代表一个唯一的偏振态。x 轴上每一点表示以不同相角偏振的线偏振态，只有（$0,\pm1$）两点对应圆偏振，复平面内其余的每一点对应一个唯一的椭圆偏振态。

倾斜角 ϕ 和偏振椭圆的椭圆率角 θ（$\theta\equiv\tan^{-1}e$）对应于一个给定的复数 χ

$$\tan 2\phi = \frac{2\mathrm{Re}[\chi]}{1-|\chi|^2} = \tan 2\psi\cos\delta \tag{1.6-18}$$

和

$$\sin 2\theta = -\frac{2\mathrm{Im}[\chi]}{1+|\chi|^2} = -\sin 2\psi \sin \delta \tag{1.6-19}$$

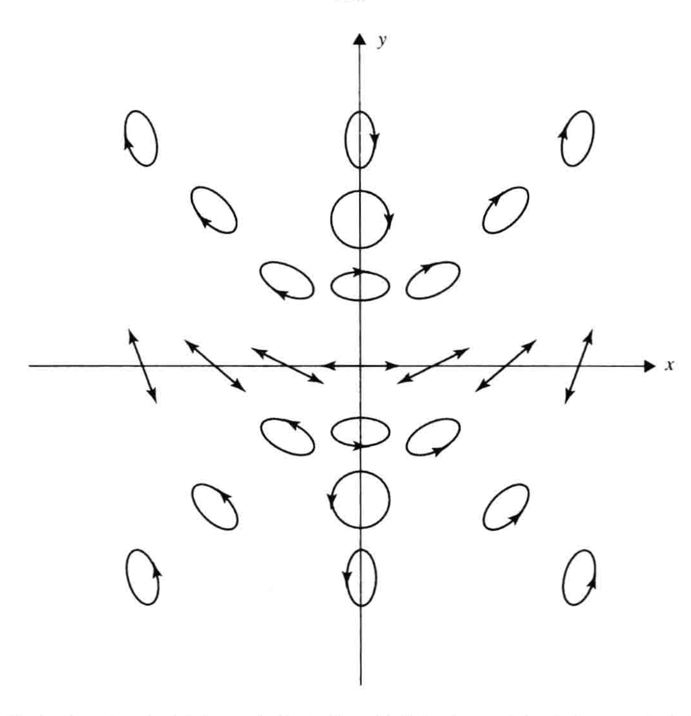


图 1.9　偏振态的复数表示。复平面上每一点代表唯一的偏振态，原点对应沿 x 方向的线偏振态，点（1，0）表示 45° 方位角的线偏振态，（0，1）表示左旋圆偏振态（LHC），（0，−1）表示右旋圆偏振态（RHC）

琼斯矢量表示

R.C.琼斯[1]在 1941 年引入的琼斯矢量描述平面波的偏振态非常方便。这种表示方式中，平面波（1.6-4）可以用它的复振幅表示成列矢量

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} A_x e^{i\delta_x} \\ A_y e^{i\delta_y} \end{bmatrix} \tag{1.6-20}$$

注意琼斯矢量是复矢量，即它的元素是复数。$\boldsymbol{J}$ 在实的物理空间中不是一个矢量，然而，在抽象的数学空间中，它是一个矢量。例如，要得到电场的实的 x 分量，必须进行 $E_x(t) = \mathrm{Re}[J_x e^{i\omega t}] = \mathrm{Re}[A_x e^{i(\omega t+\delta_x)}]$ 的操作。

琼斯矢量包含了电场强度矢量分量中振幅和相位的全部信息，它可以唯一地确定波的偏振态。如果我们只对波的偏振态感兴趣，用归一化的琼斯矢量更方便，归一化琼斯矢量满足条件

$$\boldsymbol{J}^* \cdot \boldsymbol{J} = 1 \tag{1.6-21}$$

这里的星号（*）代表复共轭。因此，沿给定方向振荡的线偏振光可以由琼斯矢量表示

$$\begin{bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{bmatrix} \tag{1.6-22}$$

其中ψ是振荡方向相对于x轴的方位角。和式（1.6-22）表示的态正交的偏正态可以通过用$\psi+\pi/2$代替ψ得到，得到一个琼斯矢量

$$\begin{bmatrix}-\sin\psi\\ \cos\psi\end{bmatrix} \tag{1.6-23}$$

特殊情况，当$\psi=0$时，表示电场强度矢量沿坐标轴振荡的线偏振态。这类琼斯矩阵可表示为

$$\hat{x}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \text{ and } \hat{y}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \tag{1.6-24}$$

右旋圆偏振光和左旋圆偏振光的琼斯矢量可表示为

$$\boldsymbol{R}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix} \tag{1.6-25}$$

$$\boldsymbol{L}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix} \tag{1.6-26}$$

这两种圆偏振态是相互正交的，即

$$\boldsymbol{R}^*\cdot\boldsymbol{L}=0 \tag{1.6-27}$$

因为琼斯矢量是一个二阶列矢量，所以任何一对正交的琼斯矢量都可以当成所有琼斯矢量数学空间的基矢。任何偏振态都可以用两个正交的偏振态$\hat{x}$和$\hat{y}$，或者 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 的叠加表示。而且还可以得到线性偏振态$\hat{x}$和$\hat{y}$与两个圆偏振态$\boldsymbol{R}$和$\boldsymbol{L}$的相互关系式，即

$$\boldsymbol{R}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}-i\hat{y}) \tag{1.6-28}$$

$$\boldsymbol{L}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}+i\hat{y}) \tag{1.6-29}$$

$$\hat{x}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{L}) \tag{1.6-30}$$

$$\hat{y}=\frac{i}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{L}) \tag{1.6-31}$$

可以看出，圆偏振态在 x 和 y 方向存在线性振动，其幅度相等均为$1/\sqrt{2}$,它们之间的相位差为$\pi/2$。同样，线性偏振态也可以看成是两个反向圆偏振态的叠加。

到目前为止，我们只讨论了一些简单的特殊情况下的偏振态的琼斯矢量表示。容易证明普遍情况下椭圆偏振态的琼斯矢量表示为

$$\boldsymbol{J}(\psi,\delta)=\begin{bmatrix}\cos\psi\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}\sin\psi\end{bmatrix} \tag{1.6-32}$$

琼斯矢量所表示的偏振态与用复数$\chi=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}\tan\psi$表示的偏振态是相同的。表 1.2 列出了一些典型偏振态的琼斯矢量表示。

对于琼斯矢量最重要的应用是它与琼斯计算的结合。这对于研究随机偏振的单色平面波通过任意序列双折射元件和偏振片的传播是一个十分有用的技术。这个课题在后面章节有详细介绍。

表 1.2　偏振态的各种表示

Polarization Ellipse	Jones Vector	(δ, ψ)	(ϕ, θ)	Stokes Vector
	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	(0, 0)	(0, 0)	$\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$	(0, π/2)	(π/2, 0)	$\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}$
	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	(0, π/4)	(π/4, 0)	$\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$
	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$	(π, π/4)	(−π/4, 0)	$\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}$
	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}$	(−π/2, π/4)	(0, π/4)	$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}$
	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$	(π/2, π/4)	(0, −π/4)	$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$

斯托克斯参数和部分偏振光

由于其本身的性质，单色平面波一定是偏振的；换句话说，终点的电场强度矢量在空间的点周期性表现出椭圆或其他特殊形式，如圆，或直线。尽管如此，如果不是绝对的单色光，振幅和相角δ之间的 x 和 y 组成部分都会随时间变化，电场强度矢量将先在一个椭圆内振荡，然后在另一个。因此，多色平面波的偏振态是不断变化的。如果偏振态的变化速度超过了观察的速度，那么这束光是部分偏振还是非偏振取决于偏振态的平均存在时间。光电子学中，我们往往接触到的是振荡频率约为10^{14}/s 的光，然而，由于光源的自然属性偏振态会在10^{-8} s 的时间内改变。

我们只限于研究准单色波，其频谱限定在窄带$\Delta\omega$（亦即$\Delta\omega \ll \omega$）内。这种波可以用方程式（1.6-4）表示，假设放宽振幅 $\boldsymbol{A}$ 不变的条件。这里ω是指中心频率，复振幅 $\boldsymbol{A}$ 是时间的函数。因为带宽比较窄，$\boldsymbol{A}(t)$只会在时间间隔$1/\Delta\omega$内较小的改变，从这个意义上讲，它是一个缓变时间函数。尽管如此，如果探测器的时间常数τ_D远大于$1/\Delta\omega$，$\boldsymbol{A}(t)$将在时间间隔τ_D内显著变化。虽然幅度和相位是不规则变化的时间函数，但它们之间还是存在一些联系的。

为了描述这种辐射形式的偏振态，我们引入以下平均时间参数

$$
\begin{aligned}
S_0 &= \langle\langle A_x^2 + A_y^2 \rangle\rangle \\
S_1 &= \langle\langle A_x^2 - A_y^2 \rangle\rangle \\
S_2 &= 2\langle\langle A_x A_y \cos\delta \rangle\rangle \\
S_3 &= 2\langle\langle A_x A_y \sin\delta \rangle\rangle
\end{aligned}
\tag{1.6-33}
$$

这里假定幅度 $\boldsymbol{A}_x$，$\boldsymbol{A}_y$ 和相对相角 δ 均与时间无关，双括号表示对在检测过程的特征时间常数 τ_D 内取平均。这四个量被称为准单色平面波的斯托克斯参数。注意，四个变量有相同的数量级。可以证明，斯托克斯参数满足下列关系

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \leqslant S_0^2 \tag{1.6-34}$$

这里等号适用于偏振波。

下面根据定义计算斯托克斯参数的值。举个例子，假定一束非偏振光，A_x 和 A_y 没有什么不同，所以《A_x^2+A_y^2》为 2《A_x^2》，《A_x^2–A_y^2》为 0。由于 δ 是随机时间函数，其他两个量也为 0。如果场是归一化的，则 S_0 =1，表示非偏振光的斯托克斯参数是（1，0，0，0）。根据类似的推导，水平偏振波的斯托克斯矢量可表示为（1，1，0，0），垂直偏振波的斯托克斯矢量可表示为（1，–1，0，0）。右旋圆偏振光（$\delta = -\pi/2$）表示为（1，0，0，–1），左旋圆偏振光（$\delta = \pi/2$）表示为（1，0，0，1）。根据定义，其他参数都不大于第一个参数 S_0，S_0 归一化为 1。所以，其他参数都处于–1 到 1 范围内。如果光波是完全非偏振波，则 $S_1 = S_2 = S_3 = 0$。如果光波是完全偏振波，$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1$。因此，偏振度可以定义为

$$\gamma = \frac{(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)^{1/2}}{S_0} \tag{1.6-35}$$

按照式（1.6-35），参数 γ 是介于 0 到 1 的实数。在描述部分偏振光时它是很有用的。部分偏振光的偏振程度从参数 S_1, S_2, S_3 的符号就可以直接看出来。

参数 S_1 描述了沿 x 或 y 轴方向的线偏振，线偏振光沿 x 轴方向的概率是 $\frac{1}{2}(1+S_1)$，沿 y 轴概率是 $\frac{1}{2}(1-S_1)$。所以当 $S_1 = 1, -1$ 时对应的是沿这些方向的完全偏振。参数 S_2 描述了沿着与 x 轴夹角 $\phi = \pm 45^\circ$ 的方向的线偏振光，沿这两个方向的线偏振光概率分别是 $\frac{1}{2}(1+S_2)$ 和 $\frac{1}{2}(1-S_2)$。所以当 $S_2 = 1, -1$ 时对应的是沿这些方向的完全偏振。最后，参数 S_3 表示圆偏振度；光波包含右旋圆偏振的概率是 $\frac{1}{2}(1-S_3)$，左旋圆偏振的概率是 $\frac{1}{2}(1+S_3)$。

用复数 $\chi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}\tan\psi$ 表示的偏振光，它的斯托克斯参数为（按照方程（1.6-17））

$$
\begin{aligned}
S_0 &= 1 \\
S_1 &= \cos 2\psi \\
S_2 &= \sin 2\psi \cos\delta \\
S_3 &= \sin 2\psi \sin\delta
\end{aligned}
\tag{1.6-36}
$$

根据惯例，S_3 是正号则对应左旋椭圆偏振（$\sin\delta$ >0，顺时针旋转）。

邦加球

虽然斯托克斯参数是用来描述部分偏振光的，但是这些参数也可以用来描述偏振光的偏振态。对于偏振光，斯托克斯参数S_1, S_2, S_3都可以用来表示偏振态。当$S_0 = 1$时，坐标(S_1, S_2, S_3)上全部的点被限于一个三维（3-D）空间单位球的表面。这个球就是邦加球（见图 1.10）。

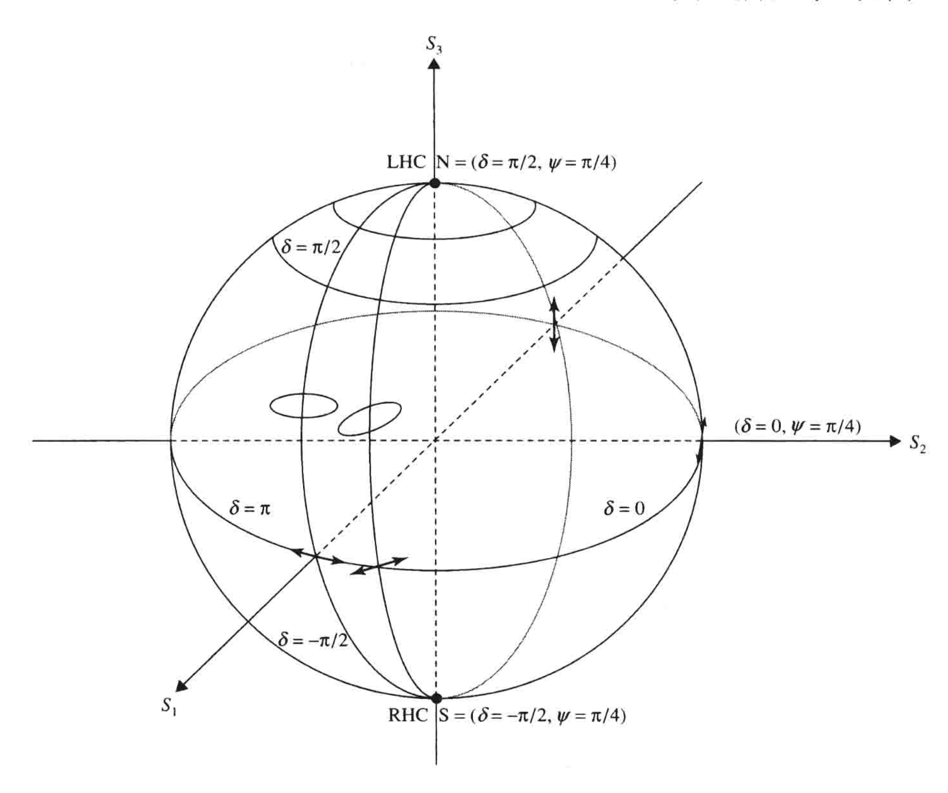


图 1.10　邦加球（各点偏振态）

球表面上的每个点代表了唯一的偏振态。例如，北极（0，0，1）对应左旋圆（LHC）偏振态,而南极（0，0，−1）代表右旋圆（RHC）偏振态。点（1，0，0）代表一个平行于水平方向的线偏振态，而点（−1，0，0）代表平行于垂直方向的线偏振态。事实上，赤道上的全部的点都代表唯一的线偏振态，而其余的点代表椭圆偏振态。可以发现，球上每一对对踵的点（两个点相对球心坐标对称）代表正交偏振态。

根据方程（1.6-18）和（1.6-19），得到

$$\tan 2\phi = S_2/S_1 \quad \text{and} \quad \sin 2\theta = -S_3 \tag{1.6-37}$$

这里ϕ是椭圆偏振的倾角，θ是椭圆率角，定义为$\theta \equiv \arctan e$。一般地有，S_2/S_1=常量，表示含两极的垂直平面。因为S_1, S_2都被限定在偏振光的球表面，S_2/S_1=常量，实际上代表了子午线——一个连接南北极的半圈。根据方程（1.6-37），ϕ是子午线的常量。所以每条子午线代表了一组相同倾角ϕ的椭圆偏振态，但对应不同的椭圆率。另外，S_3=常量表示平行于赤道平面的圆平面。根据方程（1.6-37），θ是这个圆上的常量（经线或者纬线）。所以每条经线（纬线）代表了一类具有相同椭圆率e=tanϕ不同倾角的椭圆偏振态。邦加球对于

用波片来改变光偏振态的光双折射介质的研究是特别有用的。对于光纤中存在偏振模色散（PMD）的偏振态的演化的描述也是特别有用的。

下面考虑邦加球上两个不同的点。每个点都代表一个偏振态。斯托克斯矢量表示成

$$\mathbf{S}_a = (1, S_{a1}, S_{a2}, S_{a3})$$
$$\mathbf{S}_b = (1, S_{b1}, S_{b2}, S_{b3}) \tag{1.6-38}$$

根据式（1.6-33）可以得到

$$\mathbf{S}_a \cdot \mathbf{S}_b = 2|\boldsymbol{J}_a^* \cdot \boldsymbol{J}_b|^2 \tag{1.6-39}$$

式中，$\boldsymbol{J}_a$ 和 $\boldsymbol{J}_b$ 是对应的琼斯矢量。对于偏振光，斯托克斯矢量的第一个量是 1，很容易确定三个单位矢量，用斯托克斯矢量的三个参数 S_1, S_2, S_3 表示即

$$\boldsymbol{S}_a = (S_{a1}, S_{a2}, S_{a3})$$
$$\boldsymbol{S}_b = (S_{b1}, S_{b2}, S_{b3}) \tag{1.6-40}$$

邦加球中这三个单位矢量都是实矢量。它们和球上的点相对应。根据定义，式（1.6-39）可以写成

$$|\boldsymbol{J}_a^* \cdot \boldsymbol{J}_b|^2 = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{S}_a \cdot \boldsymbol{S}_b = \tfrac{1}{2}(1 + \boldsymbol{s}_a \cdot \boldsymbol{s}_b) \tag{1.6-41}$$

对两个对踵的点，$\boldsymbol{s}_a \bullet \boldsymbol{s}_b = -1$，两个偏振态形成一组正交偏振。

斯托克斯矢量和邦加球在本书后面将会用来研究光纤中的偏振模色散。在 7.5 节可以看到波片对偏振态的改变可以很容易地用邦加球的旋转来表示。用 $\boldsymbol{P}$ 表示输入偏振态，$\boldsymbol{P}'$ 表示输出偏振态，$\boldsymbol{R}$ 是波片的偏振态，输出偏振态 P' 通过 P 绕轴 OR 旋转角度 $\boldsymbol{\Gamma}$ 得到，这里 O 是球心，$\boldsymbol{\Gamma}$ 是波片的相位延迟（见图 7.9）。

1.7　各向异性介质（晶体）中的电磁波传播

像铌酸锂，石英，向列液晶和方解石这种各向异性介质，电磁辐射的传播是由介电张量 ε_{ij} 与位移矢量和电场强度矢量决定的，

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j \tag{1.7-1}$$

这个公式多次可以看到，非磁性和透明的物质，这个量是实数并对称的（见题 1.37）

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \tag{1.7-2}$$

当然，这九个张量的大小与 x，y 和 z 坐标对于晶体结构的相对取向有关。通常总有可能选取 x、y、z 坐标，使得矩阵非对角元素为零，于是

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \tag{1.7-3}$$

这里 ε_x，ε_y，ε_z 是主介电常数，n_x, n_y, n_z 是主折射率。这些方向 (x, y, z) 被称做晶体的主介质轴。根据等式（1.7-1）和（1.7-3），沿 z 轴传播的平面波有两个相速度，取决于它的偏振态。特别地，x 轴偏振光的相速度是 c/n_x，y 轴偏振光的相速度是 c/n_y。一般，每个传播方向都存在两种偏振模式。

必须注意，介质张量（介电常数）是一个电磁场频率（或波长）的函数，这就是色散。光波领域中，频率一般数量级是$10^{14}/\mathrm{s}$。我们经常使用折射率来描述光学介质的传播。

均匀介质中的平面波和折射率面

为了研究沿一般方向传播的波，假设单色平面波的电场强度矢量表示为

$$\boldsymbol{E}\exp[i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})] \tag{1.7-4}$$

用磁场强度矢量表示

$$\boldsymbol{H}\exp[i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})] \tag{1.7-5}$$

这里 $\boldsymbol{k}$ 是波矢$\boldsymbol{k}=(\omega/c)n\boldsymbol{s}$，$\boldsymbol{s}$ 是波传播方向的单位矢量。相速度 c/n，或者等价为折射率是 n。将式（1.7-4）和式（1.7-5）中的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 分别代入麦克斯韦方程式（1.1-1）、（1.1-2）和式（1.7-1）得到

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}=\omega\mu\boldsymbol{H} \tag{1.7-6}$$

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}=-\omega\varepsilon\boldsymbol{E}=-\omega\boldsymbol{D} \tag{1.7-7}$$

消去式（1.7-6）和式（1.7-7）中的 $\boldsymbol{H}$，得到

$$\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E})+\omega^2\mu\varepsilon\boldsymbol{E}=0 \tag{1.7-8}$$

这个等式可以用来求出特征矢量 $\boldsymbol{E}$ 和相应的特征值 n。

在主坐标系统中，式（1.7-3）给出介电张量ε，方程式（1.7-8）可以写成

$$\begin{bmatrix} \omega^2\mu\varepsilon_x-k_y^2-k_z^2 & k_xk_y & k_xk_z \\ k_yk_x & \omega^2\mu\varepsilon_y-k_x^2-k_z^2 & k_yk_z \\ k_zk_x & k_zk_y & \omega^2\mu\varepsilon_z-k_x^2-k_y^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}=0 \tag{1.7-9}$$

这里$\varepsilon_x=\varepsilon_0n_x^2$，$\varepsilon_y=\varepsilon_0n_y^2$，$\varepsilon_z=\varepsilon_0n_z^2$。

因为存在非平庸解，式（1.7-9）中的矩阵的行列式为 0。这导致$\boldsymbol{\omega}$和 $\boldsymbol{k}$ 的关系如下

$$\det\begin{vmatrix} \omega^2\mu\varepsilon_x-k_y^2-k_z^2 & k_xk_y & k_xk_z \\ k_yk_x & \omega^2\mu\varepsilon_y-k_x^2-k_z^2 & k_yk_z \\ k_zk_x & k_zk_y & \omega^2\mu\varepsilon_z-k_x^2-k_y^2 \end{vmatrix}=0 \tag{1.7-10}$$

对于一个给定的$\boldsymbol{\omega}$，这个等式表示 $\boldsymbol{k}$ 空间（动量空间）的三维面。这个面称为折射率面，包括两个球壳，这两个外壳一般有四个交点。穿过原点和这四个点的两条直线称为光轴。图 1.11 显示的是这个面的八分之一。给定传播方向，一般有两个 k 值，一个是传播方向 $\boldsymbol{s}$ 的横截面，一个是折射率面。这两个 k 值对应两个沿选定方向传播的不同的相速度（$\boldsymbol{\omega}/\boldsymbol{k}$）。电场强度矢量的方向也可以从式（1.7-9）中得到，假定分母不为 0，即

$$\begin{bmatrix} \dfrac{k_x}{k^2-\omega^2\mu\varepsilon_x} \\ \dfrac{k_y}{k^2-\omega^2\mu\varepsilon_y} \\ \dfrac{k_z}{k^2-\omega^2\mu\varepsilon_z} \end{bmatrix} \tag{1.7-11}$$

这里当$n_o = n_x = n_y < n_z = n_e$，折射率面包括一个圆和绕 z 轴旋转轴对称的椭圆。

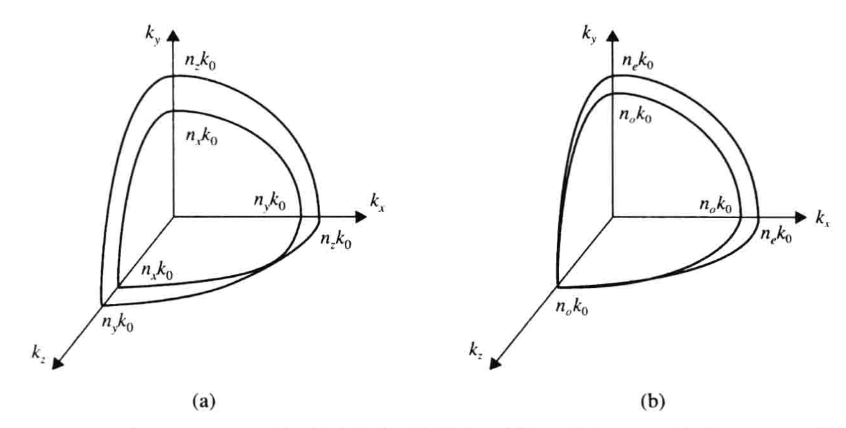


图 1.11　（a）在 $n_x < n_y < n_z$ 的动量空间折射率面的八分之一，其中 k_x, k_y, k_z 的单位是 $k_0 = \omega / c$。（b）在 $n_o = n_x = n_y < n_z = n_e$ 的动量空间折射率面的八分之一，$k_0 = \omega / c$

沿着光轴方向传播的波，只有一个 k 值和一个相速度，尽管如此，却有两个相互独立的偏振方向。方程式（1.7-10）和方程式（1.7-11）经常用波矢的方向余弦表示。利用式（1.7-4）给出的平面波的关系$\boldsymbol{k} = (\omega / c) n \boldsymbol{s}$，方程式（1.7-10）和式（1.7-11）可以写成

$$\frac{s_x^2}{n^2 - n_x^2} + \frac{s_y^2}{n^2 - n_y^2} + \frac{s_z^2}{n^2 - n_z^2} = \frac{1}{n^2} \tag{1.7-12}$$

和

$$\begin{bmatrix} \dfrac{s_x}{n^2 - n_x^2} \\ \dfrac{s_y}{n^2 - n_y^2} \\ \dfrac{s_z}{n^2 - n_z^2} \end{bmatrix} \tag{1.7-13}$$

这里，用到$\varepsilon_x = \varepsilon_0 n_x^2$，$\varepsilon_y = \varepsilon_0 n_y^2$，$\varepsilon_z = \varepsilon_0 n_z^2$。

方程式（1.7-12）称做波的菲涅耳方程，可以用折射率的特征值解出，方程式（1.7-13）给出了偏振的方向。方程式（1.7-12）是 n^2 的二次方程，因此，对于每个传播的方向（s_x, s_y, s_z），方程式（1.7-12）都有两个关于 n^2 的解。为解决这个问题，我们一次代入方程式（1.7-13）一个 n^2 的值，这样就得到这些波的偏振（电场矢量）。可以看出，因为方程式（1.7-13）中所有元素都是实数，所以非吸收介质中正交模式都是线性偏振的。$\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$ 是电场强度矢量，$\boldsymbol{D}_1$ 和 $\boldsymbol{D}_2$ 是与 n_1^2 和 n_2^2 有关的线性偏振正交模式的位移矢量。麦克斯韦方程 $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0$ 要求 $\boldsymbol{D}_1$ 和 $\boldsymbol{D}_2$ 与 $\boldsymbol{s}$ 是正交的，因为 $\boldsymbol{D}_1 \cdot \boldsymbol{D}_2 = 0$（这个正交关系的验证作为学生的作业），这三个矢量 $\boldsymbol{D}_1$，$\boldsymbol{D}_2$ 和 $\boldsymbol{s}$ 形成了一组正交量。根据方程式（1.7-6）和式（1.7-7），$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 均垂直于传播方向 $\boldsymbol{s}$。因此，能流的方向由玻印亭矢量 $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ 得到，一般不与传播方向 $\boldsymbol{s}$ 平行。因为 $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}$ 和 k 都垂直于 $\boldsymbol{H}$，所以它们必定共面。

模的正交性（本征模）

可以看出 $\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 共面，而且这些场矢量满足下列关系（见习题 1.27）

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_1 \cdot \boldsymbol{D}_2 &= 0\\ \boldsymbol{D}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2 &= 0\\ \boldsymbol{D}_2 \cdot \boldsymbol{E}_1 &= 0\\ \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{D}_2 &= 0\end{aligned} \tag{1.7-14}$$

一般电场强度矢量 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2$ 不互相垂直，而传播的本征模的正交关系可以写成

$$\boldsymbol{s} \cdot (\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_2) = 0 \tag{1.7-15}$$

后一个关系说明，无损各向异性介质中沿传播方向的总能流是每一模所带能流的总和。

小结：对于任意传播方向 $\boldsymbol{s}$，都存在两个相互独立的平面波，即线偏振传播模，这些模的相速度分别是 $\pm c/n_1$ 和 $\pm c/n_2$，这里 n_1^2 和 n_2^2 是菲涅耳方程式（1.7-12）的两个解。这两个模的电场强度矢量由方程式（1.7-11）和式（1.7-13）给定。

虽然方程式（1.7-11）给出了各向异性介质中正交模的偏振态（矢量 $\boldsymbol{E}$）的一般表达式，但在应用方程解决沿主轴和主平面的传播问题时，必须注意方程式（1.7-11）的分母为 0 的特殊情形。当沿这些特殊方向传播时，往往直接从波动方程式（1.7-9）更容易得到正交模。

介质分类

上面已经说明折射率面包含了许多波在各向异性介质中传播的信息，折射率面由主折射率 n_x, n_y, n_z 唯一确定，一般当这三个主折射率各不相同的时候会存在两个光轴，这就是所谓的双轴介质，在很多光电介质中（如铌酸锂晶体，向列相液晶）两个轴相同，这种情况下，折射率面的方程（式（1.7-10）或式（1.7-12））可以根据

$$\left(\frac{k_x^2 + k_y^2}{n_e^2} + \frac{k_z^2}{n_o^2} - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\left(\frac{k^2}{n_o^2} - \frac{\omega^2}{c^2}\right) = 0 \tag{1.7-16}$$

得到，这里 $n_o^2 = \varepsilon_x / \varepsilon_0 = \varepsilon_y / \varepsilon_0, n_e^2 = \varepsilon_z / \varepsilon_0$。

这里的折射率面包括一个球和一个旋转椭球，如图 1.11（b）所示。折射率面的这两个外壳在 z 轴上有两个相交点，z 轴是唯一的光轴，这种介质被称做单轴晶体。如果三个主折射率相同，那么折射率面的这两个面都处于同一个圆内，这种介质就是光学各向同性介质。

对于单轴晶体，主坐标轴可以用这样的方法表示，即三个主折射率如下排列

$$n_x < n_y < n_z \tag{1.7-17}$$

这里，光轴落在 xz 面内。图 1.12（a）表示了折射率面与 xz 面相交的横截面。单轴介质中，折射率对应于两个相等的量 $n_o^2 = \varepsilon_x / \varepsilon_0 = \varepsilon_y / \varepsilon_0$，称为寻常光折射率 n_o；另一个对应 ε_z 的折射率叫做非寻常光折射率 n_e。如果 $n_o < n_e$，这种介质称做正单轴晶体；相反，如果 $n_o > n_e$，是负单轴晶体。大多数液态晶体都是正单轴晶体。折射率面与 xz 面的交线如图 1.12（b）和图 1.12（c）所示，光轴上折射率相同。表 1.3 列出了一些固体晶体和它们的折射率。

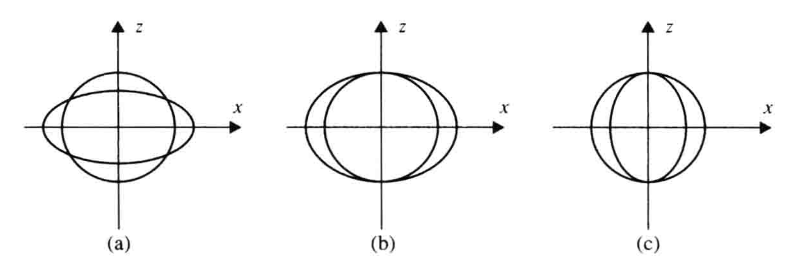


图 1.12　折射率面与 *xz* 面相交的横截面(a)双轴介质（$n_x < n_y < n_z$）(b)正双折射单轴介质（$n_o < n_e$）和(c)负双折射单轴介质（$n_e < n_o$）

表 1.3　某些典型固体晶体的折射率

Isotropic	Fluorite		1.392	
	Sodium chloride, NaCl		1.544	
	Diamond, C		2.417	
	CdTe		2.69	
	GaAs		3.40	
	Ge		3.40	
	InP		3.61	
	GaP		3.73	
Uniaxial		n_o		n_e
Positive	MgF_2	1.378		1.390
	Quartz, SiO_2	1.544		1.553
	Beryllium oxide, BeO	1.717		1.732
	$La_3Ga_5SiO_{14}$	1.90		1.91
	ZnO	1.94		1.96
	SnO_2	2.01		2.10
	YVO_4	1.96		2.16
	$LiTaO_3$	2.183		2.188
	ZnS	2.354		2.358
	Rutile, TiO_2	2.616		2.903
Negative	KDP, KH_2PO_4	1.507		1.467
	ADP, $(NH_4)\ H_2PO_4$	1.522		1.478
	Beryl, $Be_3Al_2(SiO_3)_6$	1.598		1.590
	Sodium nitrate, $NaNO_3$	1.587		1.366
	Calcite, $CaCO_3$	1.658		1.486
	β-BaB_2O_4 (BBO)	1.67		1.55
	Sapphire, Al_2O_3	1.768		1.760
	Lithium niobate, $LiNbO_3$	2.300		2.208
	$PbMoO_3$	2.40		2.27
	Proustite, Ag_3AsS_3	3.019		2.739
Biaxial		n_x	n_y	n_z
	Gypsum	1.520	1.523	1.530
	Feldspar	1.522	1.526	1.530
	Mica	1.552	1.582	1.588
	Topaz	1.619	1.620	1.627
	Sodium nitrite, $NaNO_2$	1.344	1.411	1.651
	$YAlO_3$	1.923	1.938	1.947
	SbSI	2.7	1.7	3.8

折射率椭球

电位移强度矢量 $\boldsymbol{D}$ 空间的能流密度 U_e 相等的面可以表示成

$$\frac{D_x^2}{\varepsilon_x}+\frac{D_y^2}{\varepsilon_y}+\frac{D_z^2}{\varepsilon_z}=2U_e \tag{1.7-18}$$

这里$\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z$是主介电常数。如果用 r 代替$D/\sqrt{2Ue}$，主折射率表示为$n_i^2=\varepsilon_i/\varepsilon_0(i=x,y,z)$，最后的等式可以写成

$$\frac{x^2}{n_x^2}+\frac{y^2}{n_y^2}+\frac{z^2}{n_z^2}=1 \tag{1.7-19}$$

这是当主轴平行于晶轴时，主椭球的表达式，这个椭球各个方向的轴长分别是$2n_x$，$2n_y$，$2n_z$。这个椭球叫做折射率椭球（也被称做光率体）。折射率椭球体主要用于在晶体中寻找 **D** 矢量和给定传播方向的对应两个正交模的折射率。这可以通过以下方法求得：通过椭球的原点作一个平面与矢量 **s** 垂直，该平面与椭球的截面为一椭圆，椭圆的两个轴长度分别对应于$2n_1$，$2n_2$。n_1和n_2分别是两个正交方向上的折射率，也就是式（1.7-12）的两个解。这两个轴分别平行于传输正交模的两个 **D** 矢量（见图 1.13）。这在文献[2，3]中给予证明。

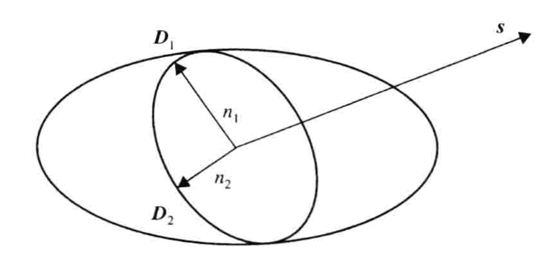


图 1.13　折射率椭球方法。内椭圆是折射率椭球和垂直于 **s** 而且通过椭球的中心平面的相交面

1.8　平面光波在单轴各向异性介质中的相位延迟

许多光电介质（如$LiNbO_3$晶体）在光学中是单轴晶体。除此之外，大多数液晶包括向列液晶也表现为单轴晶体。向列型液晶就是一个均匀单轴液晶。因此，光波在单轴各向异性介质中的传播应该特别予以重视。为了讨论方便起见，我们把单轴介质的折射率面方程重写为

$$\left(\frac{k_x^2+k_y^2}{n_e^2}+\frac{k_z^2}{n_o^2}-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\left(\frac{k^2}{n_o^2}-\frac{\omega^2}{c^2}\right)=0 \tag{1.8-1}$$

注意到折射率平面方程包含两个部分。球面方程给出了寻常光（O 光）的$\boldsymbol{\omega}$和 $\boldsymbol{k}$ 之间的关系。椭圆方程给出了非寻常光（E 光）的相似关系。这两个平面和 z 轴有不同的交点。传输两个模式的特征折射率由下面两个式子给出

$$O\text{ wave:}\quad n=n_o \tag{1.8-2}$$

$$E\text{ wave:}\quad \frac{1}{n^2}=\frac{\cos^2\theta}{n_o^2}+\frac{\sin^2\theta}{n_e^2} \tag{1.8-3}$$

式中，$\boldsymbol{\theta}$是光的传播方向和 c 轴（晶体的 z 轴）的夹角。由式（1.8-2）和式（1.8-3）可以看出，光波沿着光轴方向（c 轴）传播时，两个模的特征折射率都是n_0。

这种情况下，O 光的电场强度矢量不能从方程式（1.7-13）得到。但是可以比较容易从方

程式（1.7-9）得到。应用$\varepsilon_x=\varepsilon_y=\varepsilon_0 n_0^2$，$\varepsilon_z=\varepsilon_0 n_e^2$和$k_o=(\omega/c)n_0 s$，式（1.7-9）可以写成

$$\begin{bmatrix} s_x^2 & s_x s_y & s_x s_z \\ s_y s_x & s_y^2 & s_y s_z \\ s_z s_x & s_z s_y & (n_e/n_o)^2-(s_x^2+s_y^2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}=0 \tag{1.8-4}$$

显然，简单考查上式可以得到下面的偏振方向

$$O\text{ wave:}\quad \boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} s_y \\ -s_x \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.8-5}$$

这里我们重申，s_x,s_y,s_z是传播方向上的方向余弦。E 光的电场强矢量可以从方程式（1.7-13）得到

$$E\text{ wave:}\quad \boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} \dfrac{s_x}{n^2-n_o^2} \\ \dfrac{s_y}{n^2-n_o^2} \\ \dfrac{s_z}{n^2-n_e^2} \end{bmatrix} \tag{1.8-6}$$

式中，n 由方程式（1.8-3）得到，相应的波矢量是$k_e=(\omega/c)n\boldsymbol{s}$。

注意到 $\boldsymbol{O}$ 光的电场强度矢量与 c 轴与波矢$\boldsymbol{k}_o$确定的平面垂直，然而 $\boldsymbol{E}$ 光的电场强度矢量和$\boldsymbol{k}_e$不是精确垂直的，对于 90° 角度来说，偏差很小。这个 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 之间的小角度也是波速和群速的相位差（见习题 1.30），因此，为了更实用，可以假定电场对于传播方向来说是横向的，正交模的电位移矢量$\boldsymbol{D}$是和波矢量$\boldsymbol{k}_o$和$\boldsymbol{k}_e$分别精确垂直的，可以写为

$$\boldsymbol{D}_o=\frac{\boldsymbol{k}_o\times\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{k}_o\times\boldsymbol{c}|}\qquad O\text{ 光} \tag{1.8-7}$$

$$\boldsymbol{D}_e=\frac{\boldsymbol{D}_o\times\boldsymbol{k}_e}{|\boldsymbol{D}_o\times\boldsymbol{k}_e|}\qquad E\text{ 光} \tag{1.8-8}$$

式中，$\boldsymbol{c}$ 是平行于晶体光轴 c 轴的单位矢量。

令（θ，ϕ）是球面坐标系中的传输角度，单位矢量 $\boldsymbol{s}$ 可以写成

$$\boldsymbol{s}=\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{bmatrix} \tag{1.8-9}$$

利用式（1.8-9），正交模的电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$ 可以写成

$$\boldsymbol{E}_o=\begin{bmatrix} \sin\phi \\ -\cos\phi \\ 0 \end{bmatrix}\qquad O\text{ 光} \tag{1.8-10}$$

$$\boldsymbol{E}_e=\begin{bmatrix} n_e^2\cos\theta\cos\phi \\ n_e^2\cos\theta\sin\phi \\ -n_o^2\sin\theta \end{bmatrix}\qquad E\text{ 光} \tag{1.8-11}$$

我们注意到，这两个模确实是相互正交的，正交模的电位移强度 $\boldsymbol{D}$ 可以写成

$$\boldsymbol{D}_o=\begin{bmatrix}\sin\phi\\-\cos\phi\\0\end{bmatrix}\quad O\text{光} \tag{1.8-12}$$

$$\boldsymbol{D}_e=\begin{bmatrix}\cos\theta\cos\phi\\\cos\theta\sin\phi\\-\sin\theta\end{bmatrix}\quad E\text{光} \tag{1.8-13}$$

这两个 $\boldsymbol{D}$ 矢量和 $\boldsymbol{s}$ 也是相互正交的。这个结果也可以由折射率椭球得到。

如果在单轴晶体内一束偏振光沿 z 轴传播，光的位移矢量可以写成两个正交模的线性组合，即

$$\boldsymbol{D}=C_o\boldsymbol{D}_o\exp(-i\boldsymbol{k}_o\cdot\boldsymbol{r})+C_e\boldsymbol{D}_e\exp(-i\boldsymbol{k}_e\cdot\boldsymbol{r}) \tag{1.8-14}$$

其中，C_o，C_e是常数，$\boldsymbol{k}_o$，$\boldsymbol{k}_e$一般是两个不同的波矢（见方程式（1.8-2）)，当光线在介质中传播时，由于两个偏振方向分量的相速度不同，因而产生了相位延迟。这个不同方向上光的相位延迟可以使光波形成新的偏振状态。因此，双折射的晶体波片可以用来改变光的偏振状态。譬如，一个波片的厚度是 d，则相位延迟可以写成

$$\Gamma=(k_{ez}-k_{oz})d \tag{1.8-15}$$

其中，k_{ez},k_{oz} 是 z 轴波矢的两个分量，其中 z 轴和波片平面是垂直的。

旋光强度和法拉第旋转效应

在晶体中除了线性双折射外，光电介质（如石英晶体）中传输的正交模是圆偏振的。这些材料称为圆双折射或者光学活性材料。当一束线偏振光通过这些介质时，光的偏振面旋转一定的角度，这个角度和传播距离成正比。这一现象最早是 1811 年在石英晶体中发现的，线偏振光在沿光轴横向通过石英晶体时，偏振面发生了旋转，20℃时，钠光（$\lambda=589\text{nm}$）的线偏振光在晶体中沿光轴传播时，偏振面每毫米旋转 21.7 度。不同的旋光物质有左旋物质也有右旋物质，1815 年，首次发现了在糖溶液中发生的液体旋光现象。

我们知道，在非结晶状态下的石英（二氧化硅）是非光学活性材料。固体中的旋光效应取决于晶体结构和晶体中分子的排列方式。对于液体，分子的排列是随意的，液体中的旋光效应取决于液体分子自身的排列状态。实质上，所有旋光液体分子拥有一个不对称的碳原子，硫原子或是氮原子。此外，所有这些液体都有一个旋光性质与之相反的同分子异构体。这些镜像异构体是由一个或多个不对称碳原子形成的化合物构成的。因而，这样的分子结构使这些物质既有左旋的也有右旋的。这种物体在结构上互为镜像，被分为左旋和右旋两种。液体中的旋光本领取决于分子中原子的不对称排列（如螺旋结构)。

图 1.14 显示的是偏振面在旋光介质中的旋转，旋转的角度和传播的距离成正比。通常，旋光特性是以单位长度旋转的角度来衡量的，也就是说，旋光率的定义是单位长度旋转的角度。

光学活性材料中的旋光现象与光束的波矢量（$\boldsymbol{k}$）存在固定关系。因此，如果光束穿过光学介质一个往返，如图 1.14 中，光从右端面反射回来，则偏振面的旋转角度为零。当观察者面向光束的传播方向观察，如果偏振面沿逆时针方向旋转，这一物质是右旋（或左手）的，反之则是左旋的。石英晶体既有左旋的也有右旋的。许多其他物体，如朱砂、氯酸钠、

松节油、糖、碲、硒和 $AgGaS_2$ 晶体也具有旋光现象。许多液体和氧化物也具有旋光特性。一些旋光介质的具体性能见表 1.4。

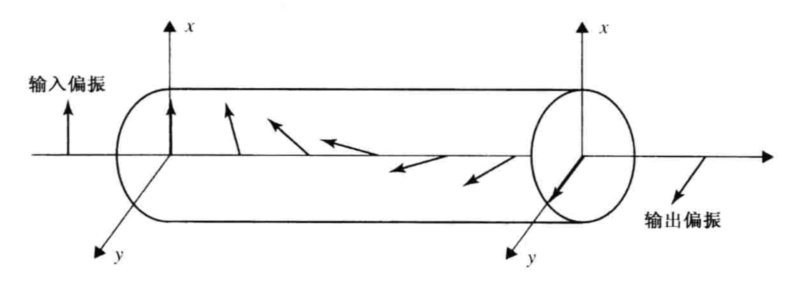


图 1.14　光活性介质中偏振面的旋转

表 1.4　一些固体的旋光性能

	λ (Å)	ρ (degree/mm)
Quartz	4000	49
	4550	37
	5000	31
	5500	26
	6000	22
	6500	17
$AgGaS_2$	4850	950
	4900	700
	4950	600
	5000	500
	5050	430
Se	7500	180
	10 000	30
Te	(6 μm)	40
	(10 μm)	15
TeO_2	3698	587
	4382	271
	5300	143
	6328	87
	10 000	30

1825 年，菲涅耳首先对旋光现象提出了假说，他认为一束线偏振光（即麦克斯韦方程的独立平面波解）在进入各向异性晶体后，可以分解为两个具有不同折射率的左右圆偏振光。将这两个偏振光折射率记为 n_r 和 n_l，并假定都沿+z 方向传播，则旋转率可由下式得到[2,3]

$$\rho = \frac{\pi}{\lambda}(n_l - n_r) \tag{1.8-16}$$

如果 $n_r < n_l$，则光是右旋的（逆时针）。所以，其偏振面的转动和圆偏振光的转动一样，后者有更大的相速度。由此可见，椭圆偏振光的椭圆偏态将在形状保持不变的前提下转过了 $\omega z(n_l - n_r)/2c$ 的角度（见习题 1.18）。

法拉第旋光效应

1845 年，法拉第发现，线性偏振光通过强磁场作用下的各向同性介质，其偏振面将发生旋转。磁场反向时，旋转角度也反向。这就是法拉第效应。旋转的角度和光路长度成正比，且和光传播路径上的磁场有关。在光学主介质中，如果角度旋转方向与光传播方向有固定的关系，即当光被反射时，净旋转角度为零。这种介质为可逆介质。在法拉第效应中，旋转角度与磁场 $\boldsymbol{B}$ 的关系固定，如果光被反射则旋转角度加倍。这种旋光现象是不可逆的。

法拉第单元的旋转比（单位长度上旋转的角度）记为

$$\rho = VB \tag{1.8-17}$$

其中，$\boldsymbol{B}$ 是沿光传播方向的磁场分量，V 是费尔德常数。

产生法拉第效应的原因是：在静磁场的作用下，运动电子受到洛仑兹力的作用产生了移动。法拉第效应存在于很多固体、液体甚至是气体中。表 1.5 给出了一些常用费尔德常数。

表 1.5　$\lambda = 5893\,\text{Å}$ 时的费尔德常数

Substance	T (°C)	V (deg/G-mm)[a]
Water	20	2.18×10^{-5}
Fluorite		1.5×10^{-6}
Diamond		2.0×10^{-5}
Glass (crown)	18	2.68×10^{-5}
Glass (flint)		5.28×10^{-5}
Carbon disulfide (CS_2)	20	7.05×10^{-5}
Phosphorus	33	2.21×10^{-4}
Sodium chloride		6.0×10^{-5}
MBBA	20	6.67×10^{-5}

[a] 1 gauss = 10^{-4} tesla.

从原子的角度来看，法拉第效应和塞曼效应有关。由于轨道电子与磁场的相互作用，每个电子的能级被分裂为几个子能级。由于角动量守恒，沿磁场方向传播的 RHC 偏振光和 LHC 偏振光与不同的子能级相互作用。所以介质在磁场的作用下呈现出圆双折射特性，这导致了偏振矢量的旋转。

法拉第光隔离器和光环行器

法拉第效应在非可逆光学器件中有重要应用，如光隔离器和光环行器。这些不可逆光学器件是大部分光通信网的组成部分，还包括半导体激光器和放大器。大部分激光器都十分敏感，即使是一点反射光，也会造成输出功率和频率特性的不稳定。利用偏振特性制成的法拉第光隔离器几乎可以除去所有的反射光，图 1.15 说明了光隔离器的主要工作过程。

在如图 1.15 所示的光隔离器中，沿传播方向偏振光旋转了 45° 度。反射后，偏振光向同方向旋转 45°，净旋转角度为 90°。利用偏振器，我们可以消除反射光。显然，若反射光进入激光器腔内，会造成激光器的稳定性变差。光隔离器在光网络中起到保证激光器稳定工作的重要作用。图 1.15（c）和 1.15（d）是一束非偏振光通过的光隔离器的光学装置示意图。一束非偏振光通过一个偏振光分束器（PBS），被分成两个偏振分量。这两个分量旋转了 90°，

其中法拉第元件（FC）和光学旋光器（OA）分别使其旋转了 45°。在旋转之后，这两个分量在输出端由 PBS 被重新叠加。图 1.15（d）中反射光，在 FC 和 OA 组合的作用下，净旋转角度为零，而反射光被引向另一输出端口。

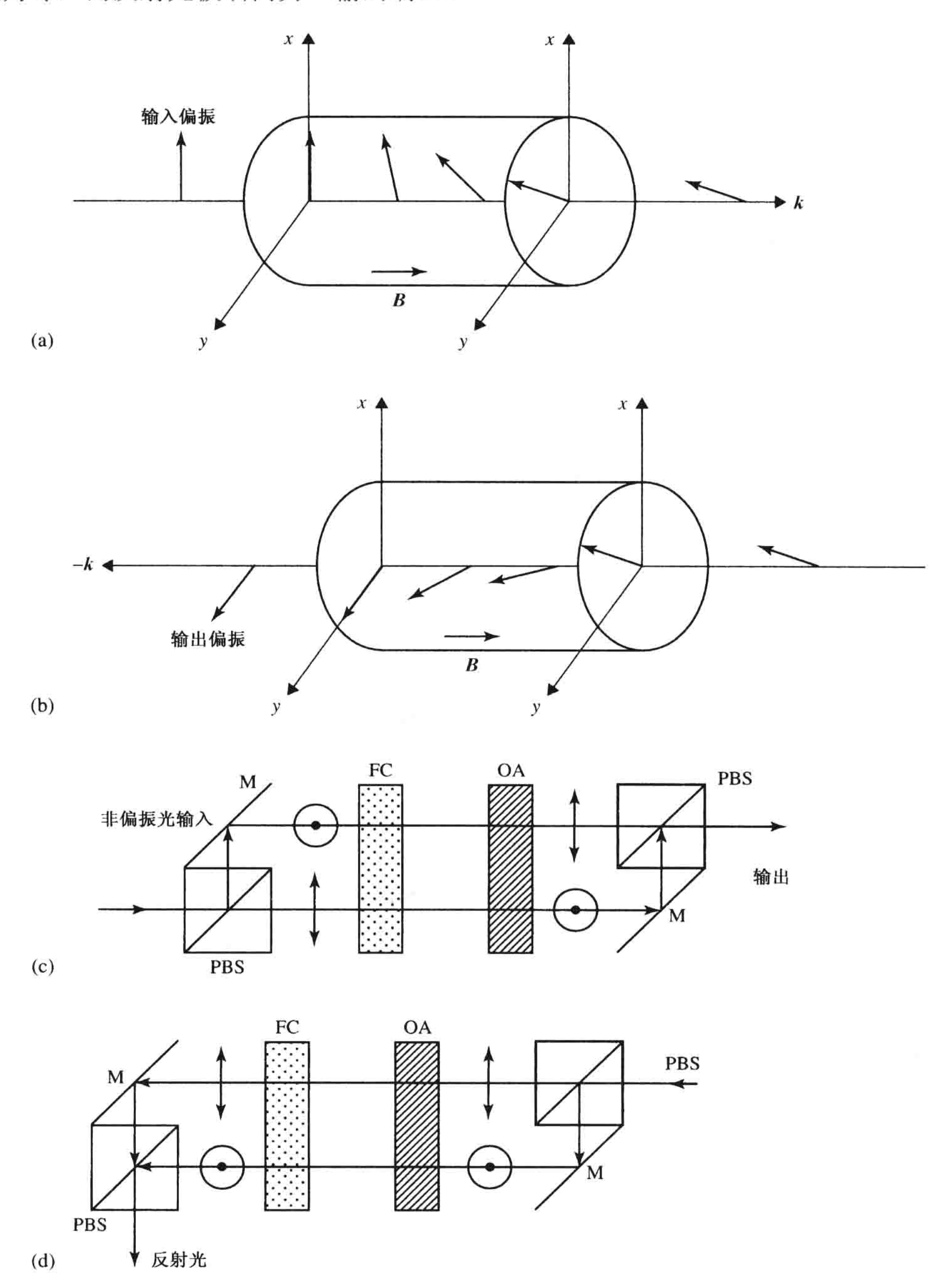


图 1.15　（a）由法拉第旋转器旋转 45° 后旋转的线偏振光。（b）反射光束被法拉第旋转器旋转 45°。（c）可以作为光隔离器的光环形器的原理图。d）反射光被导向一个新的输出端口的原理图。M 表示反射镜，PBS 为偏振光束分离器，FC 是法拉第单元，OA 是光旋转器

1.9　琼斯矩阵方法

在 1.8 节中，讨论了均匀和各向异性介质中的平面波传输，任何平面波的传输都可以用两个正交偏振分量的叠加（线性组合）来描述。许多光学系统包含一系列双折射介质。就不完善光纤（如椭圆纤芯的硅光纤）来说，双折射可以依赖于光纤中的位置。在这种情况下，用一个系统的方法来描述光线在双折射单元中的传输。在这个部分，我们用了一种更高效的方法，这就是著名的琼斯矩阵[1]。

在 1.8 节中我们已经知道光在双折射晶体介质中的传输包含两个正交模的线性叠加。这些正交模具有确定的相速度和偏振方向。双折射介质可能是单轴的或双轴的，然而，在光电子学中应用的大多数材料是单轴的，在单轴介质中，这些正交模是寻常波和非寻常波。这些正交模的偏振方向是相互垂直的，叫做介质中波传播方向的快轴和慢轴。在传统的双折射光学中，波片的切割使 c 轴位于波片的表面。在这种情况下，正交入射光线的传播方向是沿垂直于光轴（c 轴）的。

相位延迟片（也称波片）和双折射光纤是偏振态转换器或偏振态变换器。应用合适的相位延迟板可将入射光的偏振态转换为任意的偏振态。在下面用琼斯矩阵法推导公式时，假设相位延迟板表面没有反射，入射光全部通过相位延迟板。事实上，尽管在相位延迟片的表面镀了增透膜已大大减小了反射，但由于多层反射的影响（法布里-珀罗效应），其表面还会存在部分反射。参考图 1.16，我们考虑入射光束偏振态由下列琼斯列矢量表示

$$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} \tag{1.9-1}$$

式中，V_x,V_y 是两个复数。x，y 轴是实验室坐标系中的坐标轴。为了确定光波在相位延迟片中的传播，我们将光波分解为晶体中“快波”和“慢波”的线性组合，这可由下式的坐标变换来实现

$$\begin{bmatrix} V_s \\ V_f \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix}\equiv R(\psi)\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} \tag{1.9-2}$$

其中 $R(\psi)$ 称为坐标旋转矩阵，式中 V_s 和 V_f 分别是偏振态 $\boldsymbol{V}$ 矢量的慢波分量和快波分量。快轴和慢轴固定在晶体上。这两个波分量就是相位延迟片中的本征波，它们以各自的相速度和偏振态在晶体中传播。方位角 ψ 定义为以 z 轴为坐标旋转轴，sf 坐标和 xy 坐标之间的夹角（如图 1.16）。由于相速度的不同，这两个波分量通过晶体后产生不同的相位延迟。这将改变出射光束的偏振态。表 1.6 列出了不同偏振态的琼斯矩阵。

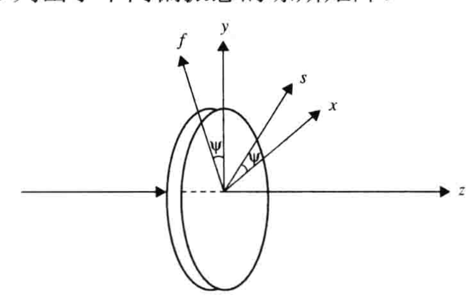


图 1.16　一个方位角为 ψ 的波片（或相位延迟处）。入射光沿 z 轴方向，s 轴和 f 轴分别是慢模式和快模式的偏振方向，方位角 ψ 是 x 和 s 轴之间的夹角

表 1.6　琼斯矢量

Polarization State	Jones Vector
	$\begin{bmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{bmatrix}$
	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -i\end{bmatrix}$
	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix}a\cos\phi + ib\sin\phi\\ a\sin\phi - ib\cos\phi\end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix}a\cos\phi - ib\sin\phi\\ a\sin\phi + ib\cos\phi\end{bmatrix}$

设 n_s 和 n_f 分别表示快波和慢波的折射率。在 sf 坐标系中，出射光束的偏振态由下式得到

$$\begin{bmatrix}V_s'\\ V_f'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\exp\left(-in_s\frac{2\pi}{\lambda}d\right) & 0\\ 0 & \exp\left(-in_f\frac{2\pi}{\lambda}d\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_s\\ V_f\end{bmatrix} \tag{1.9-3}$$

式中，d 是波片的厚度，λ 为光的波长。相位延迟量 Γ 定义为式（1.9-3）中指数函数代表的相位差

$$\Gamma=\frac{2\pi}{\lambda}(n_s-n_f)d \tag{1.9-4}$$

注意相位延迟量 Γ 表示相位变化的相对量而不是绝对量。典型的晶体相位延迟片的双折射量是很小的，即 $\left|n_s-n_f\right| \ll n_s,\ n_f$。通常情况下，相位延迟片引起的相位改变绝对量要比相位改变相对量大几百倍。令 ϕ 为相位改变绝对量的平均值，它由下式给出

$$\phi=\frac{1}{2}(n_s+n_f)\frac{2\pi}{\lambda}d \tag{1.9-5}$$

方程式（1.9-3）可按照 ϕ 和 Γ 写成

$$\begin{bmatrix} V_s' \\ V_f' \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Gamma/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Gamma/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ V_f \end{bmatrix} \tag{1.9-6}$$

将 sf 晶体坐标系变回到 xy 坐标系，可得到出射光束偏振态的琼斯矢量表示

$$\begin{bmatrix} V_x' \\ V_y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s' \\ V_f' \end{bmatrix} \tag{1.9-7}$$

联合式（1.9-1）、式（1.9-6）和式（1.9-7），可将由相位延迟板引起的变换关系式写成

$$\begin{bmatrix} V_x' \\ V_y' \end{bmatrix} = R(-\psi) W_0 R(\psi) \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} \tag{1.9-8}$$

式中，$R(\psi)$是坐标旋转矩阵，W_0 是相位延迟板的琼斯矩阵。它们分别由以下各式给出

$$R(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \tag{1.9-9}$$

和

$$W_0 = e^{-i\phi} \begin{bmatrix} e^{-i\Gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{i\Gamma/2} \end{bmatrix} \tag{1.9-10}$$

如果多次反射的相互作用不重要或者不明显，相位因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}$ 可以忽略。相位延迟片的特性由相位延迟量 Γ 和方位角为 ψ 所表征，它的琼斯矩阵可由三个矩阵（式（1.9-8））的乘积得到

$$W = R(-\psi) W_0 R(\psi) \tag{1.9-11}$$

注意，波片的琼斯矩阵是一个么正矩阵，即

$$W^{\dagger} W = 1$$

这里符号†表示厄米共轭。偏振光束通过波片的光程可用数学上的么正变换来表示。在么正变换时，许多物理性质是不变的，这包括琼斯列矢量之间的正交关系和琼斯矢量的模。因此，如果两束光的偏振态是相互正交的，那么它们通过一个任意的波片后保持正交不变。

一个由无损耗、线性均匀介质组成的理想薄偏振片，如果它的偏振化方向与实验室坐标系中的 x 轴平行，则它的琼斯矩阵可表示为

$$P_0 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.9-12}$$

式中，ϕ 是通过有限光程的偏振片积累起来的绝对相位值。一个薄的偏振器是由各向异性材料构成的，在这种材料中正交模由于材料的吸收会有所衰减。这种情况下，y 分量被偏振器吸收。偏振片偏离 z 轴转过 ψ 角度，其琼斯矩阵为

$$P = R(-\psi) P_0 R(\psi) \tag{1.9-13}$$

因此，如果我们忽略绝对相位值 ϕ，并设光波的电场强度矢量的两个分量分别与 x、y 轴平行，则偏振片的琼斯矩阵分别表示为

$$P_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{和} \; P_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

为了求得偏振光通过一系列相位延迟板和偏振片后偏振态的变化，分别记下入射光的琼斯矢量与各种光学元件的琼斯矩阵，出射光的琼斯矢量只要将入射光的琼斯矢量与各种光学元件的矩阵依次相乘便可得到。表 1.7 列出了在选定方向上波片和偏振器的琼斯矩阵。

表 1.7　琼斯矩阵

Optical Element	Jones Matrices
波片	$\Gamma \equiv \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d$
y, x, c axis（c 轴沿 x）	$\begin{bmatrix} e^{-i\Gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{i\Gamma/2} \end{bmatrix}$
y, x, c axis（c 轴沿 y）	$\begin{bmatrix} e^{i\Gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Gamma/2} \end{bmatrix}$
y, x, c axis, 45°	$\begin{bmatrix} \cos(\Gamma/2) & -i\sin(\Gamma/2) \\ -i\sin(\Gamma/2) & \cos(\Gamma/2) \end{bmatrix}$
y, x, c axis, ψ	$R(-\psi)\begin{bmatrix} e^{-i\Gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{i\Gamma/2} \end{bmatrix}R(\psi)$ $= \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-i\Gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{i\Gamma/2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} e^{-i\Gamma/2}\cos^2\psi + e^{i\Gamma/2}\sin^2\psi & -i\sin(\Gamma/2)\sin(2\psi) \\ -i\sin(\Gamma/2)\sin(2\psi) & e^{-i\Gamma/2}\sin^2\psi + e^{i\Gamma/2}\cos^2\psi \end{bmatrix}$
偏振器	
y, x, Transmission axis（沿 x）	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
y, x, Transmission axis（沿 y）	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
y, x, Transmission axis, 45°	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
y, x, Transmission axis, ψ	$R(-\psi)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}R(\psi)$ $= \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \cos^2\psi & \cos\psi\sin\psi \\ \sin\psi\cos\psi & \sin^2\psi \end{vmatrix}$

例：半波片。

半波片的相位延迟量$\Gamma = \pi$。按照式（1.9-4），一块a切割（表面垂直与z轴）的单轴晶体，当它的厚度为$d = \lambda / 2(|n_e - n_0|)$时，可作为半波片。下面将确定光束通过半波片时，它对光束偏振态的作用。设波片的方位角为45°，入射光束为垂直方向偏振。入射光束的琼斯矢量可写成

$$V = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.9-14}$$

通过式（1.9-9）和式（1.9-11）可以得到半波片的琼斯矩阵为

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.9-15}$$

出射光束的琼斯矢量由式（1.9-15）与式（1.9-14）相乘得到，其结果为

$$V' = \begin{bmatrix} -i \\ 0 \end{bmatrix} = -i\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.9-16}$$

它与水平偏振光相对应。半波片的作用是使偏振态旋转90°。可以证明，对于任意方位角ψ，半波片可以使偏振态旋转2ψ（见习题1.19）。换句话说，线偏振光通过半波片后仍然是线偏振光，但它的偏振面旋转2ψ。

如果入射光是圆偏振光，在不考虑方位角的情况下，半波片可以将右旋圆偏振光转化为左旋圆偏振光，反过来也一样。这个问题的证明留给读者作练习（见习题1.19）。图1.17描述了半波片的作用。

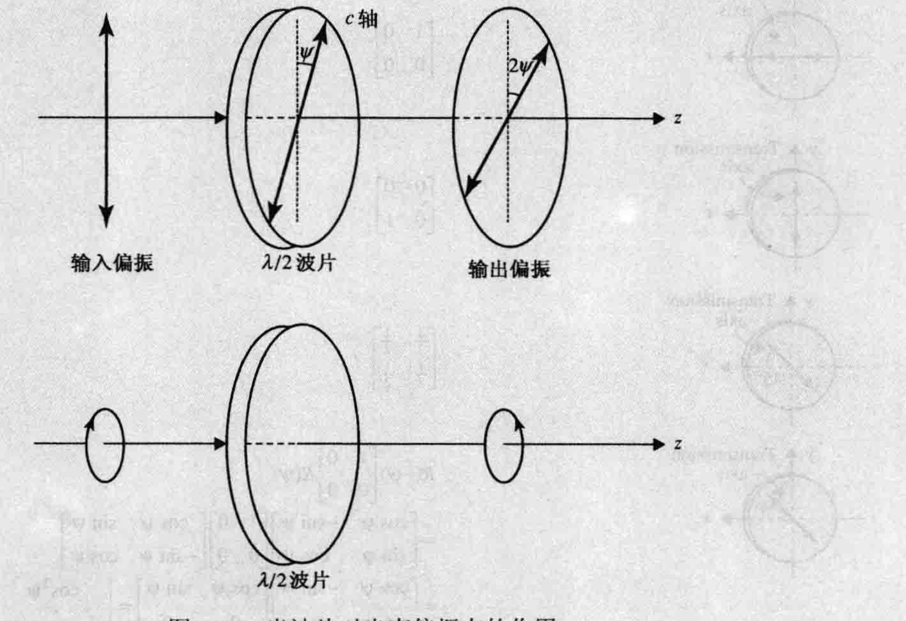


图 1.17　半波片对光束偏振态的作用

例：四分之一波片。

四分之一波片的相位延迟量 $\Gamma=\pi/2$。一块 a 切割（或 b 切割）的各向异性的单轴晶体，当它的厚度为 $d=\lambda/4(|n_e-n_0|)$（或它的奇数倍）时，可作为四分之一波片。这里再次假设波片的方位角为 45°，入射光为垂直偏振光。入射光的琼斯矢量由式（1.9-14）给出。根据式（1.9-11），得到四分之一波片的琼斯矩阵为

$$W=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-i\pi/4} & 0\\ 0 & e^{i\pi/4}\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -i\\ -i & 1\end{bmatrix} \tag{1.9-17}$$

出射光的琼斯矢量由式（1.9-17）与式（1.9-14）相乘得到

$$V'=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-i\\ 1\end{bmatrix}=\frac{-i}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix} \tag{1.9-18}$$

这对应一个左旋圆偏振光。与偏振方向成 45° 放置的四分之一波片的作用是将垂直偏振光转换为圆偏振光。如果入射光束为水平偏振光，出射光束将成为右旋圆偏振光。通常情况下，四分之一波片可以把一个线偏振光转变成一个椭圆偏振光，反过来也一样。图 1.18 描述了四分之一波片的作用。

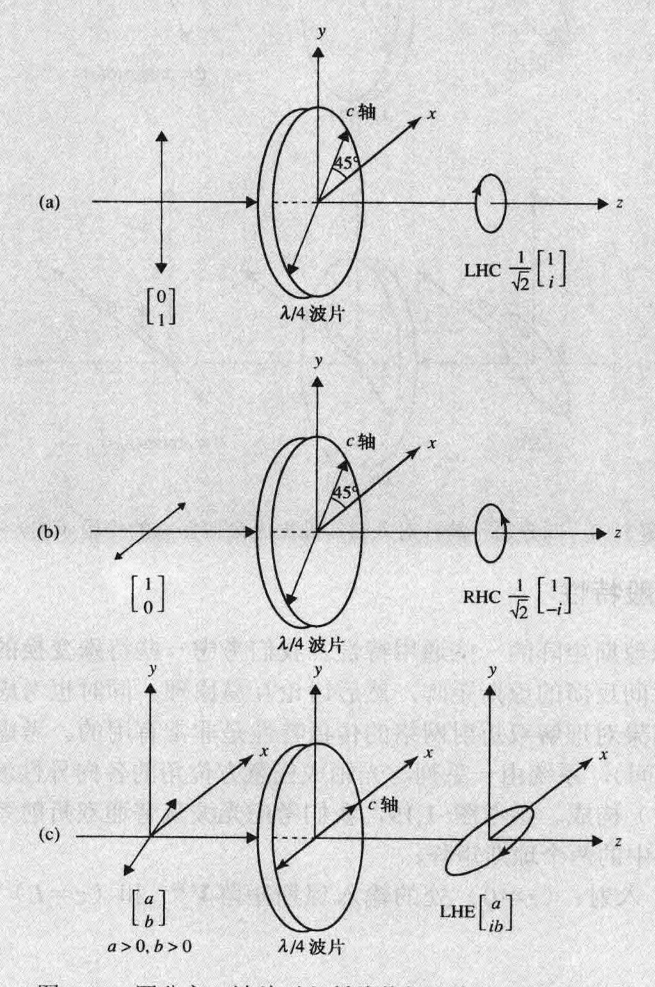


图 1.18　四分之一波片对入射线偏振光束偏振态的作用

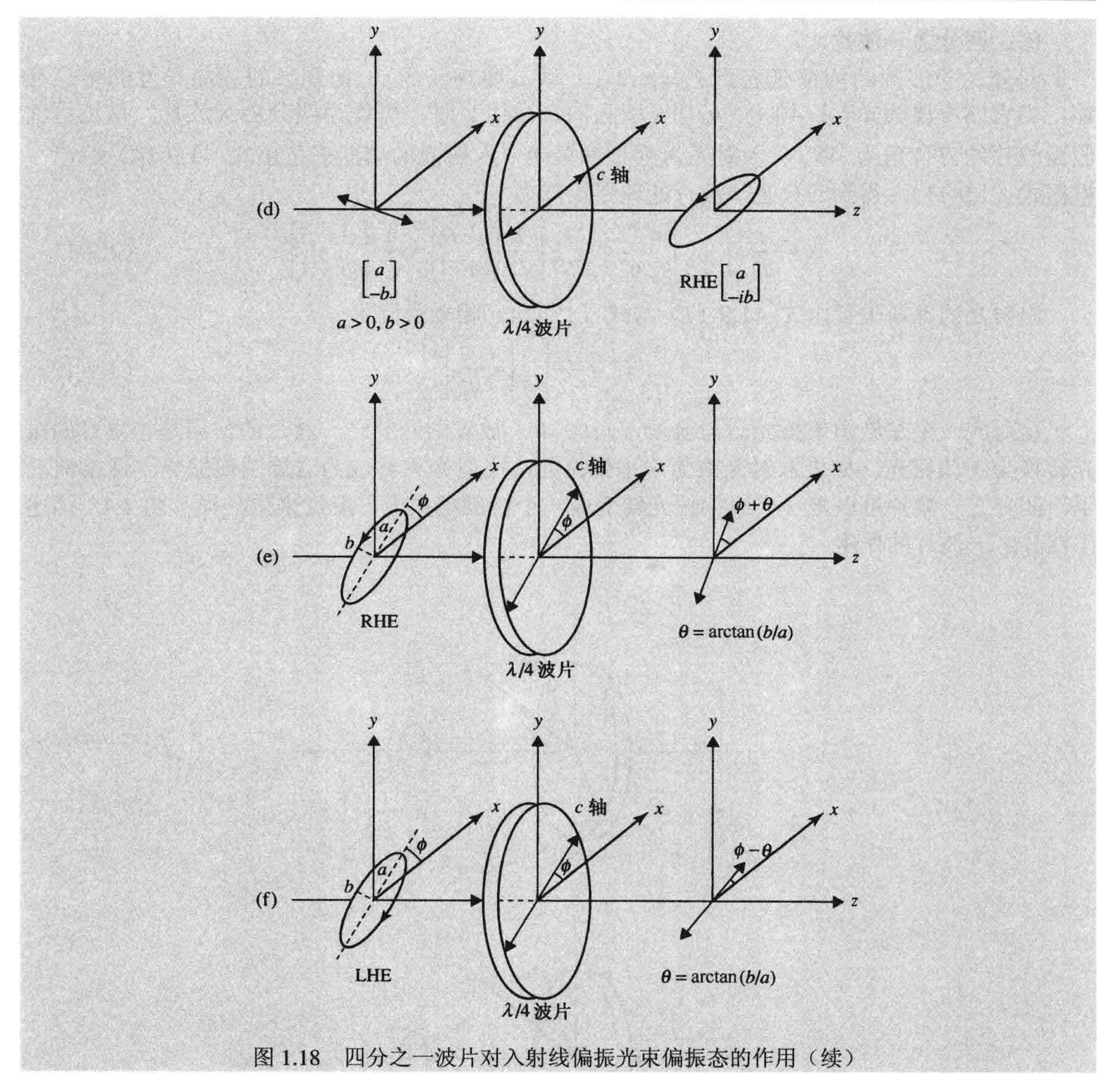


图 1.18　四分之一波片对入射线偏振光束偏振态的作用（续）

琼斯矩阵的一般特性

这里，我们考虑琼斯矩阵的一些通用特性。我们考虑一些特殊变换的琼斯矩阵，如回波反射、镜面反射、时间反演的琼斯矩阵，然后讨论互易原理。同时也考虑琼斯矩阵的比幺模和幺正特性。这些结果对理解双折射网络的传播特性是非常有用的。考虑一般的双折射系统（在 $z=0$ 和 $z=L$ 之间），系统由一系列与光轴成任意方位角的各向异性波片（例如，波片、双折射光纤、液晶盒）构成。参考图 1.19，我们考虑光波从普通双折射系统的两边入射，为了讨论方便，定义图中的两个琼斯矩阵。

从左边（$z=0$）入射：（$z=0$）处的输入琼斯矩阵 $\boldsymbol{V}^{输入}$ 和（$z=L$）处的输出琼斯矩阵 $\boldsymbol{V}^{输出}$ 之间的关系是

$$\begin{bmatrix} V_x^{\text{out}} \\ V_y^{\text{out}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x^{\text{in}} \\ V_y^{\text{in}} \end{bmatrix} \tag{1.9-19}$$

式中，M 是从左边入射的琼斯矩阵。

从右边（$z=L$）入射：（$z=L$）处的输入琼斯矩阵 $U^{输入}$ 和（$z=0$）处的输出琼斯矩阵 $U^{输出}$ 之间的关系是

$$\begin{bmatrix} U_x^{\text{out}} \\ U_y^{\text{out}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x^{\text{in}} \\ U_y^{\text{in}} \end{bmatrix} \tag{1.9-20}$$

式中，N 是从右边入射的琼斯矩阵。这里假定光路返回的路径和情况 1 中从 $z=0$ 处入射的情况相同，换句话说，情况 2 可以通过情况 1 中的光的回波反射得到。

基于上面的定义，接下来给出这些琼斯矩阵的基本特性。

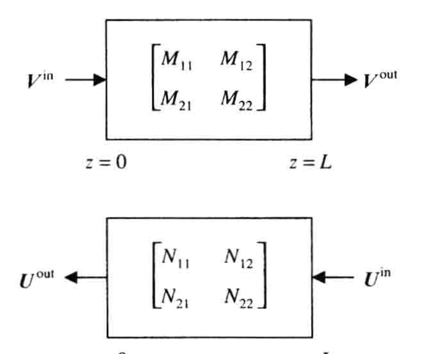


图 1.19　输入/输出关系示意图和琼斯矩阵 M 和 N 的定义

时间反演对称性

现在考虑时间反演的情况。输出光束将回扫光束路径，这个光束路径是在双折射系统中传输的相位与输入光束共轭的光。在这种情况下，$U^{输入}=(V^{输出})^*$。根据空间翻转的对称性 $U^{输出}=(V^{输入})^*$。从而推出

$$NM^* = 1 \tag{1.9-21}$$

互易定理

根据物理学上的互易定理的基本性质和式（1.9-19）、式（1.9-20）中琼斯矩阵的定义，得到

$$\begin{aligned} N_{11} &= M_{11} \\ N_{22} &= M_{22} \\ N_{21} &= M_{12} \\ N_{12} &= M_{21} \end{aligned} \tag{1.9-22}$$

即 N 是 M 的转置矩阵

$$N = \tilde{M} \tag{1.9-23}$$

其中～表示转置。这一性质在含有反射镜的光学系统中特别有用。

从式（1.9-21）、式（1.9-22）和式（1.9-23）中可以看出，N 和 M 都是幺正矩阵，即

$$M^{\dagger}M = 1 \qquad N^{\dagger}N = 1 \tag{1.9-24}$$

式中，$N^{\dagger}$ 和 $M^{\dagger}$ 分别是 N 和 M 的厄米共轭矩阵。这就证明了琼斯矩阵的幺正特性。因此，如果琼斯矩阵写成

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{1.9-25}$$

式中，A、B、C、D 分别是矩阵元素，那么 M 的逆矩阵就可以写成

$$M^{-1} = M^{\dagger} = \begin{bmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{bmatrix} \tag{1.9-26}$$

而且，由式（1.9-11）的定义，琼斯矩阵是幺模矩阵，假设所有的双折射片都无损耗，即

$$\det(M) = AD - BC = 1 \tag{1.9-27}$$

因此琼斯矩阵的逆矩阵也可以写成

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix} \tag{1.9-28}$$

从式（1.9-26）和式（1.9-28）中，我们能推出矩阵元之间具有以下关系

$$C = -B^* \qquad D = A^* \tag{1.9-29}$$

上述关系在琼斯矩阵方法的简化计算中非常有用。根据式（1.9-29）中的关系，琼斯矩阵可以写成

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ -B^* & A^* \end{bmatrix} \tag{1.9-30}$$

我们注意到，所有的琼斯矩阵形成了一个数学群。换句话说，任何两个琼斯矩阵相乘后这种关系仍然是正确的。

光强传输谱

到目前为止我们讨论的琼斯计算方法，仅用来计算光束的偏振态。在多种场合，需要确定传输光强。例如，窄带滤波器，仅在一个小的光谱区域内传输光谱，在其他波长处反射（或吸收）光。改变传输光的强度需要一个检偏器，检偏器实际上就是一个偏振器，之所以叫检偏器，是与其在光学系统中的位置有关的。在多数双折射光学系统中，将偏振器放在系统的前端以产生一束偏振光。第二个偏振器（检偏器）放在输出光的位置处，以分析出射光的偏振态。相位延迟和光波长有关，因此出射光的偏振态也和光的波长有关。后面的检偏器导致了所有传输光的强度都和波长有关。

琼斯矢量不仅包含了光的偏振态，也包含了光强度的信息。现在来考虑通过偏振片后光束，光束的电场强度可以写成琼斯矢量的形式：

$$E = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \tag{1.9-31}$$

式中，E_x、E_y 分别 x、y 方向的分量，这样 $\boldsymbol{E}$ 的强度就可用下式计算

$$I = \boldsymbol{E}^{\dagger} \cdot \boldsymbol{E} = |E_x|^2 + |E_y|^2 \tag{1.9-32}$$

式中，† 表示厄米特共轭。如果透过检偏器的出射光的琼斯矢量写成

$$E' = \begin{bmatrix} E'_x \\ E'_y \end{bmatrix} \tag{1.9-33}$$

那么双折射系统的透射率就表示为

$$T = \frac{|E'_x|^2 + |E'_y|^2}{|E_x|^2 + |E_y|^2} \tag{1.9-34}$$

例：一块（双折射）波片夹在两块平行偏振片之间的光学系统。

考虑如图 1.20 所示的光学系统，它由一块（双折射）波片夹在两块平行偏振片之间组成。波片的快轴与慢轴与偏振化方向的夹角为 45°。设双折射量为（$n_e - n_o$），波片厚度为 d，则相位延迟量为

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d \tag{1.9-35}$$

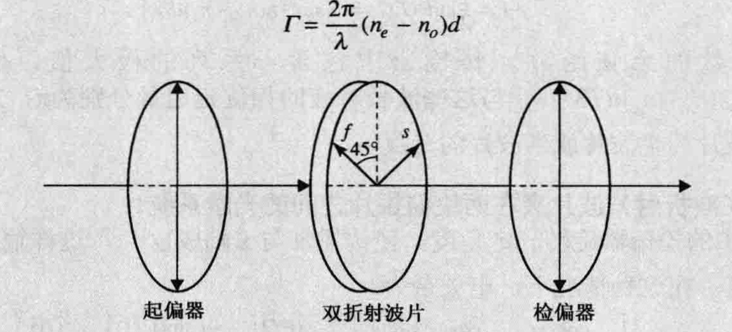


图 1.20　由一块（双折射）波片夹在两块平行编振片之间组成的光学系统

按照式（1.9-11）（或表 1.7），相应的琼斯矩阵为

$$W = \begin{bmatrix} \cos(\Gamma/2) & -i\sin(\Gamma/2) \\ -i\sin(\Gamma/2) & \cos(\Gamma/2) \end{bmatrix} \tag{1.9-36}$$

如果入射光束是非偏振的，经过前面的偏振片后，电场强度矢量可以由下面的琼斯矩阵表示

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.9-37}$$

式中，假设入射光强度为 1，并且只有一半的光通过了光轴平行于 y 轴的偏振片。传输光束电矢量的琼斯矩阵为

$$\begin{aligned} E' &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(\Gamma/2) & -i\sin(\Gamma/2) \\ -i\sin(\Gamma/2) & \cos(\Gamma/2) \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\Gamma/2) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.9-38}$$

出射光束是沿 y 方向的偏振光，它的光强为

$$I=\frac{1}{2}\cos^2(\Gamma/2)=\frac{1}{2}\cos^2\left[\pi(n_e-n_o)d/\lambda\right] \tag{1.9-39}$$

从式（1.9-39）可以看出，出射光束的强度是波数的余弦函数，当 $\lambda=(n_e-n_o)d,(n_e-n_o)d/2,(n_e-n_o)d/3,\cdots$，这些波长对应于 $\Gamma=2\pi,4\pi,6\pi,\cdots$ 时光强取极大值。换句话说，当波片是波长的整数倍时，透射光有最大值，发生极大值之间对应的波矢间距随波片厚度的减少而增加。

例：一块（双折射）波片夹在两块互相垂直偏振片之间的光学系统。

如果将图 1.20 中的检偏器旋转 90°，起偏器和检偏器互相垂直。此时，出射光束的琼斯矢量如下式所示

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}'&=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\Gamma/2)&-i\sin(\Gamma/2)\\-i\sin(\Gamma/2)&\cos(\Gamma/2)\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\\&=\frac{-i}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\sin(\Gamma/2)\\0\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{1.9-40}$$

出射光束是水平（x）偏振光，强度为

$$I=\frac{1}{2}\sin^2(\Gamma/2)=\frac{1}{2}\sin^2[\pi(n_e-n_o)d/\lambda] \tag{1.9-41}$$

这也是波数的余弦函数。传输谱中包含一系列的极大值，其对应的波长为 $\lambda=2(n_e-n_o)d,2(n_e-n_o)d/3,\cdots$。与这些波长对应的相位延迟量分别为π，3π，5π，…，也就是说，这时的波片为半波片或半波片的奇数倍。

例：一块（双折射）波片夹在两块偏振片之间的光学系统。

将图 1.20 中的检偏器旋转一定角度，使传播轴与 x 轴成 ψ 角，这样输入和输出偏振片既不平行也不垂直。在这种情况下，电矢量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}'&=\begin{bmatrix}\cos^2\psi&\cos\psi\sin\psi\\\sin\psi\cos\psi&\sin^2\psi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\Gamma/2)&-i\sin(\Gamma/2)\\-i\sin(\Gamma/2)&\cos(\Gamma/2)\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\\&=\frac{-i\cos\psi\sin(\Gamma/2)+\sin\psi\cos(\Gamma/2)}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\cos\psi\\\sin\psi\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{1.9-42}$$

传输光的偏振方向和检偏器的偏振方向一样，强度为

$$I=\tfrac{1}{2}\cos^2\psi\sin^2(\Gamma/2)+\tfrac{1}{2}\sin^2\psi\cos^2(\Gamma/2) \tag{1.9-43}$$

式中

$$\Gamma=\frac{2\pi(n_e-n_o)d}{\lambda}$$

当 $\psi=\pi/2$ 时（也就是，当检偏器和起偏器平行的时候），式（1.9-43）简化为式（1.9-39）；当 $\psi=0$ 时（也就是，检偏器和起偏器垂直的时候）），式（1.9-43）简化为式（1.9-41）。

1.10　相干的基本理论

众所周知，叠加原理广泛应用于电磁场领域。该原理指出所有源形成的总的电磁场等于各个源形成的电磁场的总和。这是根据麦克斯韦方程组推导出来的，麦克斯韦方程组是一组

线性微分方程组，方程组中 ε 和 μ 与场强无关。现在考虑频率为 ω 的两个线性偏振平面波，它们的电场分别为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_1 &= \boldsymbol{A}_1 \exp[i(\omega t - \boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{r} + \phi_1)] \\ \boldsymbol{E}_2 &= \boldsymbol{A}_2 \exp[i(\omega t - \boldsymbol{k}_2 \cdot \boldsymbol{r} + \phi_2)]\end{aligned} \tag{1.10-1}$$

式中，$\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 是振幅，因为考虑的是线性偏振光，因此 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 是实矢量。ϕ_1、ϕ_2 是方位角，$\boldsymbol{k}_1$、$\boldsymbol{k}_2$ 是波矢量。我们假设 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 是常数，如果 $\phi_1-\phi_2$ 是固定不变的，那么我们就说这两束光是相干的；另外，如果 $\phi_1-\phi_2$ 随机变化，就说这两束光是不相干的。为了定义式（1.10-1）表示的两束光的相干程度，可以考察这两束光的干涉图。前面已经指出，任一点的电磁场辐射强度都与电场振幅的平方成正比，因此，除了一个常量外，由两束光叠加形成干涉部分的光强分布函数为

$$I = |\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2|^2 = I_1 + I_2 + 2\boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{A}_2 \cos(\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{r} - \phi) \tag{1.10-2}$$

式中，$I_1 = |\boldsymbol{E}_1|^2$，$I_2 = |\boldsymbol{E}_2|^2$，$\boldsymbol{K} = k_1 - k_2$，$\phi = \phi_1 - \phi_2$。前面两项分别是两束光的光强。第三项是干涉项，包含了相干度的信息。式（1.10-2）是一个周期 $2\pi/\omega$ 上的光强时间平均值。如果只考虑单色平面光波，所有的 ϕ,ϕ_1 和 ϕ_2 在 $2\pi/\omega$ 这样一个小的时间间隔内（对于可见光大约是 10^{-15} s）均看成是不变的。如果两束光有相同的偏振态，那么干涉光强可以写成

$$I = |\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2|^2 = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{r} - \phi) \tag{1.10-3}$$

如果两束光是相干的（也就是 ϕ 为常数），干涉图像在一个空间周期内稳定不变

$$\Lambda = \frac{2\pi}{|\boldsymbol{K}|} = \frac{\lambda}{2\sin(\theta/2)} \tag{1.10-4}$$

式中，θ 是两束光波矢量之间的夹角，λ 是光波波长（见图 1.21）。

如果两束光不是相干的，相位 ϕ 就会随着时间而改变。这样式（1.10-3）中的光强的时间平均就会随着时间快速地变化。如果 ϕ 在一个时间周期 τ_D 内急剧变化，其中 τ_D 是与探测相关的时间常数，这个波动相对于探测器来说太快了，此时探测光强度是在时间间隔 τ_D 内的平均值。对相互不相干的源来说，相位 ϕ 在 0 到 2π 内随时间变化，式（1.10-3）中的第三项的平均值是 0，导致干涉图样的消失。因此，对于很多实际要求，式（1.10-1）表示的两束光的相干程度可以定义为

$$\gamma_{12} = \left(\frac{\langle\langle \boldsymbol{E}_1^* \cdot \boldsymbol{E}_2\rangle\rangle}{\langle\langle \boldsymbol{E}_1^* \cdot \boldsymbol{E}_1\rangle\rangle^{1/2}\langle\langle \boldsymbol{E}_2^* \cdot \boldsymbol{E}_2\rangle\rangle^{1/2}}\right)_{\boldsymbol{r}=0} = \langle\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi_2-\phi_1)}\rangle\rangle = \frac{1}{\tau_D}\int_0^{\tau_D} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi_2-\phi_1)}\,\mathrm{d}t \tag{1.10-5}$$

式中，双括号表示在 τ_D 时间间隔内的光强平均值，τ_D 就是检测系统的时间常数。这个相干度参数一般情况下是个复数，可以表示成

$$\gamma_{12} = |\gamma_{12}|\exp(i\alpha) \tag{1.10-6}$$

式中，α 是一个实常数。

现在来估算时间平均光强的检测，从式（1.10-2）可知

$$\langle\langle I\rangle\rangle = |\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2|^2 = I_1 + I_2 + 2\boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{A}_2\langle\langle\cos(\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{r} - \phi)\rangle\rangle \tag{1.10-7}$$

式中，假设 $\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}_2$ 为常数。

利用 $\cos(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}-\phi)=\cos(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r})\cos\phi+\sin(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r})\sin\phi$ 和式（1.10-5），可以得到

$$\langle\langle I\rangle\rangle = |\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2|^2 = I_1 + I_2 + 2\boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{A}_2|\gamma_{12}|\cos(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r} - \alpha) \quad (1.10\text{-}8)$$

如果相干度$|\gamma_{12}|$有非零值，则可以产生干涉条纹。也就是说，如果存在相干性，那么光强就会有周期性的变化。通过式（1.10-5）的定义，$|\gamma_{12}|$始终是大于 0 小于 1 的。根据$|\gamma_{12}|$，将相干性分为以下几类

完全相干：　$|\gamma_{12}|=1$

部分相干：　$0<|\gamma_{12}|<1$

不相干：　$|\gamma_{12}|=0$

条纹可见度

在干涉图样中，光强在$I_{最大}$和$I_{最小}$两个极值之间变化。从上面的讨论中，我们可以看出这两个极值是由下式决定的

$$I_{max} = I_1 + I_2 + 2|\boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{A}_2||\gamma_{12}| \quad (1.10\text{-}9)$$

$$I_{min} = I_1 + I_2 - 2|\boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{A}_2||\gamma_{12}| \quad (1.10\text{-}10)$$

条纹可见度 V 定义为

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad (1.10\text{-}11)$$

对于偏振态相同的光束（例如 A_1 A_2 相平行时），上式可表示为

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}|\gamma_{12}| \quad (1.10\text{-}12)$$

条纹可见度总是小于 1 大于 0 的。在特殊情况下，当 $I_1 = I_2$ 时

$$V = |\gamma_{12}| \quad (1.10\text{-}13)$$

也就是说，条纹可见度和相干度是等效的。在完全相干的情况下（$\gamma_{12}=1$），条纹可见度达到最大值 1；在非相干情况下（$\gamma_{12}=0$），条纹可见度为 0，也就是没有相干条纹。

相干时间和相干长度

除了两束光的相干性外，还可以定义电磁场辐射自身的相干性。现在考虑具有以下形式的准单色光

$$E = A(t)\exp[i(\omega t - \boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{r})] \quad (1.10\text{-}14)$$

$A(t)$ 是随着时间变化的复振幅。在前面讨论的两束光干涉的问题中，电场 E_1、E_2 可能是来自于式（1.10-14）给出的同一源。这种情况在很多干涉仪中都会出现，包括迈克耳逊干涉仪、马赫-曾德干涉仪和杨氏双缝干涉仪。在这些干涉仪中，两束光仅仅是光路不一样。参考图 1.21，假设两束光为

$$E_1 = A(t)\exp[i(\omega t - \boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{r})] \quad (1.10\text{-}15)$$

$$E_2 = A(t+\tau)\exp[i(\omega t + \omega\tau - \boldsymbol{k}_2 \cdot \boldsymbol{r})] \quad (1.10\text{-}16)$$

式中，τ 是时延。从中可以看出，这两列波是由同一源（1.10-14）产生的。两束光的互相关是波（式（1.10-14））的自相关的一种度量。因此自相关系数定义为

$$\gamma(\tau)=\frac{\langle\langle E^*(t)\ E(t+\tau)\rangle\rangle}{\langle\langle E^*(t)\ E(t)\rangle\rangle^{1/2}\langle\langle E^*(t+\tau)\ E(t+\tau)\rangle\rangle^{1/2}} \tag{1.10-17}$$

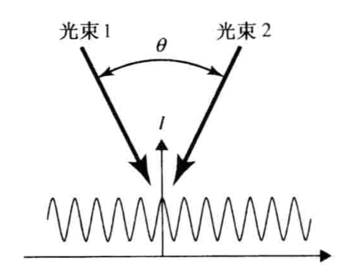


图 1.21　两束光形成的干涉条纹的光强分布

假设所有量都是不变的，时间平均就与其开始时间无关。那么自相关系数函数 $\gamma(\tau)$ 变为

$$\gamma(\tau)=\frac{\langle\langle E^*(t)\ E(t+\tau)\rangle\rangle}{\langle\langle E^*(t)\ E(t)\rangle\rangle} \tag{1.10-18}$$

自相关系数函数也满足

$$0\leqslant|\gamma(\tau)|\leqslant 1 \tag{1.10-19}$$

对于单色平面光，$A(t)$ 是常量振幅，并且对于任意的 τ 自相关系数函数值都是 1。这样的光称为相干光。对于大部分多色波，仅仅在 $\tau=0$ 时才会有 $|\gamma(\tau)|=1$，并且当 τ 增大时，$|\gamma(\tau)|$ 趋近于 0。这样的光称为部分相干光。如果 $|\gamma(\tau)|$ 是关于 τ 的递减函数，并且当 $\tau>\tau_c$ 时，$|\gamma(\tau)|=0$，这样我们就称 τ_c 为这束光的相干时间。因此在两束光的干涉实验中，如果光程差不超过

$$l_c=c\tau_c \tag{1.10-20}$$

就会产生干涉条纹。l_c 是式（1.10-14）中两束光的相干长度。

对于很多实际应用情形，式（1.10-17）或式（1.10-18）的时间间隔可以取为无穷。因此，自相关函数可以认为是电磁场的归一化自相关函数。一个基本的随机理论中的定理，称为维纳-肯欣定理，该定理指出场的功率谱（或光谱密度）和自相关函数是一对傅里叶变换对。因此式（1.10-18）给出的 $\gamma(\tau)$ 是归一化的电磁场功率谱的傅里叶变换。那么根据傅里叶变换理论，我们有

$$\tau_c=\frac{2\pi}{\Delta\omega}=\frac{1}{\Delta f} \tag{1.10-21}$$

该式表示单色光辐射的相干时间和它的光谱线宽是倒数关系。

习题

1.1　电荷守恒要求空间任意一点的电荷密度和电流密度满足下式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot J=0$$

利用麦克斯韦方程组推导该式。如果在一个体积元里对该式两边进行积分，第一项表示这个体积元里单位时间总电荷量的变化；第二项表示单位时间内溢出体积元的总电荷量。

1.2　对麦克斯韦方程运用高斯定理，推导垂直分量 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 的边界条件。

1.3　对麦克斯韦方程运用斯托克斯理论，推导 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的切向边界条件。

1.4　设 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\exp(i\omega t)$ 和 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0\exp(i\omega t)$ 是麦克斯韦方程组的解。

（a）证明 $\boldsymbol{E}^*$、$\boldsymbol{H}^*$ 也满足麦克斯韦方程组。注意 $\boldsymbol{E}^*$、$\boldsymbol{H}^*$ 和 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 实际上是同一个场，因为它们只是实部具有物理意义。

（b）证明复共轭波

$$E_c=E_0^*\exp(i\omega t)\text{ 和 }H_c=H_0^*\exp(i\omega t)$$

也能满足麦克斯韦方程组，假设介质是无损耗的（也就是 ε 和 μ 是实张量）。

1.5　电磁场动量密度和麦克斯韦方程组应力张量为

$$\boldsymbol{P}=\mu\varepsilon(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})$$

$$T_{ij}=\varepsilon E_iE_j+\mu H_iH_j-\frac{1}{2}\delta_{ij}(\varepsilon E^2+\mu H^2)$$

推导动力学方程：

$$\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t}=\nabla\cdot\boldsymbol{T}-\boldsymbol{F}$$

式中，$\boldsymbol{F}$ 是由电磁场施加在电荷和电流分布上的洛伦兹力，$\boldsymbol{F}=\rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}$。

1.6　考虑一个电量为 q 的点电荷在电场 $\boldsymbol{E}$ 的作用下

（a）证明电场单位时间内对电荷做的功为：功/时间 $=\boldsymbol{E}\cdot q\boldsymbol{v}=\boldsymbol{E}\cdot q\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$，其中 $v=\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 是点电荷的速度。

（b）考虑含有大量电荷的介质，证明单位时间做的总功是

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{E}\cdot\sum_i q_i\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}$$

式中，i 表示第 i 个微粒，求和是对所有电荷微粒求和。

（c）电极化强度 $\boldsymbol{P}$ 定义为单位体积的偶极动量，证明

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\text{Volume}}=\boldsymbol{E}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}$$

1.7　考虑光脉冲在长度为 L 的均匀介质中传输

（a）证明传输的时间是

$$\tau=L(\frac{n}{c}+\frac{\omega}{c}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega})=L(\frac{n}{c}-\frac{\lambda}{c}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda})$$

（b）群速度色散的定义为

$$D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(\frac{\tau}{L})$$

证明其可以写成

$$D=-\frac{\mathrm{d}}{c\lambda}(\lambda^2\frac{\mathrm{d}^2n}{\mathrm{d}\lambda^2})$$

注意括号里的项是无量纲的，参数 D 的量纲是 s/m-m。实际应用中，D 的单位常常表示成 ps/nm-km。

考虑两个波的叠加，令

$$v_1 = \frac{\omega_1}{k_1}, \quad v_2 = \frac{\omega_2}{k_2}, \quad v_g = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1}$$

证明

$$(v_2 - v_g)(v_1 - v_g) > 0$$

换句话说，群速度要么同时大于 v_1 和 v_2，要么同时小于 v_1 和 v_2。在正常色散介质中，群速度总是同时小于 v_1 和 v_2 的。

1.8　利用式（1.5-20），在 $\lambda = 0.5\mu\text{m}$ 和 $\lambda = 2.0\mu\text{m}$ 的光谱区域内，画出以下各图。

（a）画出 n 和 λ 的关系图。

（b）画出群速度（以 c 为单位）和 λ 的关系图。

（c）画出 D（以 ps/nm-km 为单位）和 λ 的关系图。

1.9　推导椭圆偏振方程式（1.6-12）。

1.10　分别推导椭圆偏振的长短轴表达式（1.6-14），倾斜角表达式（1.6-15）。

1.11　证明如果 $\sin\delta > 0$，则椭圆偏振光的电场强度矢量的末端沿顺时针方向旋转，如果 $\sin\delta < 0$ 时，则为逆时针方向旋转。

1.12

（a）找出一个正交于偏振态 $J(\psi,\delta) = \begin{bmatrix} \cos\psi \\ e^{i\delta}\sin\psi \end{bmatrix}$ 的偏振态。

答案：$\begin{bmatrix} \sin\psi \\ e^{i(\pi+\delta)}\cos\psi \end{bmatrix}$

（b）证明两个相互正交偏振态的椭圆的主轴相互垂直，并且旋向相反。

1.13　分别推导椭圆偏振的倾斜角表达式（1.6-18）和椭圆率表达式（1.6-19）。

1.14　考虑形如 $\boldsymbol{E}_a(z,t) = \text{Re}[\boldsymbol{A}e^{i(\omega t - kz)}]$ 和 $\boldsymbol{E}_b(z,t) = \text{Re}[\boldsymbol{B}e^{i(\omega t - kz)}]$ 两个单色平面波，这两个波的偏振态是正交的，即 $\boldsymbol{A}^* \cdot \boldsymbol{B} = 0$。

（a）设 δ_a 和 δ_b 是式（1.6-5）定义的相角，证明 $\delta_a - \delta_b = \pm\pi$。

（b）δ_a 和 δ_b 都在 $-\pi < \delta < \pi$ 之间，证明 $\delta_a\delta_b \leqslant 0$。

（c）χ_a 和 χ_b 都是复数，表示这两个波的偏振态，证明 $\chi_a^*\chi_b = -1$。

（d）证明这两个椭圆偏振的主轴相互正交，并且椭圆率的大小相等，符号相反。

1.15　证明任何偏振态都可以通过使用一个四分之一波片转化成一个线偏振态，描述你的方法。

1.16　画出右旋圆偏振光在一个给定的时间点（如 $t = 0$），电场强度矢量末端在空间中分布。证明其轨迹是左螺旋。（这是圆偏振光左右手旋向的传统定义，这种约定的好处是空间螺旋的左右手性独立于观察的方向。）

（a）证明：振幅相同，旋向相反的两束圆偏振光的线性叠加的结果是一束平面偏振光。什么决定了结果光束的偏振平面？

（b）证明：通常情况下，两束椭圆偏振光的线性叠加是另一束椭圆偏振光，写出结果光束是平面偏振光或圆偏振光的条件。

1.17

（a）证明：利用线偏振器不能区分非偏振光与圆偏振光。通常情况下，利用波片和偏振器可以确定偏振度。

（b）给定一束完全偏振光（例如，椭圆偏振光），证明：利用单个线偏振器可以测量椭圆率和主轴的方位。

1.18　以 $\boldsymbol{E}_1=(a,ib)$ 和 $\boldsymbol{E}_2=(b,-ia)$ 为基矢，其中 a 和 b 是实数。

（a）设 $\boldsymbol{E}=(\cos\psi,\sin\psi)=c_1\boldsymbol{E}_1+c_2\boldsymbol{E}_2$，求 c_1 和 c_2。

（b）证明：椭圆偏振光通过光有源介质传播后，可以保持其椭圆偏振性。偏振椭圆的主轴旋转的角度和线偏振光的旋转角度相同。

1.19　一块半波片的相位延迟量 $\Gamma=\pi$。假定波片的方位角（即 x 轴与波片慢轴之间的夹角）为ψ。

（a）假定入射光束为 y 方向线偏振光，求出射光束的偏振态。

（b）证明：无论波片的方位角为多少，半波片都可以将右旋圆偏振光转换为左旋圆偏振光；反之亦然。

（c）E7 是一种向列液晶，当 $\lambda=577\text{nm}$ 时，$n_o=1.52$，$n_e=1.75$，求该波长的半波片厚度，假定切割时使晶体的晶面与主轴平行（即 a 平板）。

1.20　一块四分之一波片的相位延迟量 $\Gamma=\pi/2$。假定波片的方位角为ψ。

（a）假定入射光束为 y 方向线偏振光，求出射光束的偏振态。

（b）如果从（a）得到的出射光的偏振态可用复平面上的一组复数表示，证明：当ψ从 0 变化到$\pi/2$时，这些点的轨迹是双曲线的一支，并求双曲线方程。

（c）ZLI-1646 是一种向列液晶，当 $\lambda=589\text{nm}$ 时，$n_o=1.478$，$n_e=1.558$ 时，求 a 平板石英在该波长的四分之一波片厚度。

1.21　一块波片的相位延迟量为Γ，方位角为ψ。

（a）假定入射光是 y 方向的偏振光，求出射光的偏振态。

（b）用复数表示（a）中出射光的偏振态。

（c）出射光的偏振态是用复平面上的点表示的，假定Γ的变化从 0 到 2π，ψ 的变化从 0 到$\pi/2$，证明出射光束的偏振态可以在复平面上的任何地方。从物理上说，只要有合适的波片，任何偏振态都可以由线偏振光得到。

（d）证明：当ψ从 0 变化到$\pi/2$时，这些点的轨迹是双曲线的一支，并求双曲线方程。

（e）证明波片的琼斯矩阵 $\boldsymbol{W}$ 是幺正矩阵，即

$$W^{\dagger}W=1$$

式中，剑符†表示取厄米共轭。

（f）设$\boldsymbol{V}_1'$和$\boldsymbol{V}_2'$分别是与入射琼斯矢量$\boldsymbol{V}_1$和$\boldsymbol{V}_2$对应的出射琼斯矢量。证明：如果$\boldsymbol{V}_1$和$\boldsymbol{V}_2$正交，则$\boldsymbol{V}_1'$和$\boldsymbol{V}_2'$也正交。

1.22　一个理想的偏振器可以认为是一个作用在入射偏振态上投影操作，并且出射的偏振矢量沿着偏振器的传输轴。

（a）忽略式（1.9-12）中的绝对相位因子，证明

$$P_0^2=P_0 \text{和} P^2=P$$

满足这些条件的操作在线性代数中称为投影操作。

（b）如果 $\boldsymbol{E}_1$ 是电场的振幅，证明：光束通过偏振器后的振幅是

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}_1)$$

式中，$\boldsymbol{p}$ 是沿着偏振器传播轴的单位矢量。

（c）如果入射光是垂直偏振的（如 $\boldsymbol{E}_1=\hat{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{E}_0$），偏振器的传输轴沿 x 方向（如 $\boldsymbol{p}=\hat{\boldsymbol{x}}$），则出射光束振幅为零，因为 $\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{y}}=0$。然而，如果有第二个偏振器放在第一个偏振器前面，并和第一个偏振器呈 45° 角，则出射的振幅将不再为零，求此时的振幅。

（d）有 N 个偏振器，第一个的方位角为 $\psi_1=\pi/2N$，第二个为 $\psi_2=2(\pi/2N)$，第三为 $\psi_3=3(\pi/2N)$，…，第 N 个为 $N(\pi/2N)$。设入射光是水平偏振的，证明：出射光是垂直偏振的，振幅为

$$[\cos(\pi/2N)]^N$$

计算 $N=1,2,3,\cdots,10$ 的振幅值。证明当取 $N\to\infty$ 的极限时，幅度变为 1；换句话说，方位类似于风扇的一系列偏振器可以无衰减地旋转光的偏振态。

1.23　在太阳物理学中，太阳光中氢的分布是通过在 H_α 线波长（$\lambda=6563\,\mathring{A}$）处拍摄照片来度量的。需要一个带宽极窄（约 1Å）的滤波器来提高信噪比。Lyot 和 Ohman 设计的偏振滤波器由一系列双折射板构成，这些双折射板由水平偏振器隔开。这些板的厚度呈几何级数变化，即 d，$2d$，$4d$，$8d$，…，所有这些板都是以 45° 的方位角放置[4~7]。

（a）如果 n_o 和 n_e 是这些板的折射率，证明：N 个板的透过率为

$$T=\frac{1}{2}\cos^2 x\cos^2 2x\cos^2 4x\cdots\cos^2 2^{N-1}x$$

式中

$$x=\frac{\pi\mathrm{d}(n_e-n_o)}{\lambda}=\frac{\pi\mathrm{d}(n_e-n_o)v}{c}$$

（b）证明：透过率可以写成

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2^N x}{2^N\sin x}\right)^2$$

（c）证明：整个系统的传输带宽（FWHM，半高全宽）是由最厚的板的带宽支配的，即

$$\Delta v_{1/2}\sim\frac{c}{d(n_e-n_o)}$$

系统的 F，其定义是 $\Delta v/\Delta v_{1/2}$，是

$$F\sim 2^N$$

（d）用石英作为双折射材料，在 H_α 线设计一个带宽为 1 $\mathring{A}$ 的滤波器。假定在 $\lambda=6563\,\mathring{A}$ 处，$n_o=1.5416$ 和 $n_e=1.5506$，求所需的最厚平板的厚度。

（e）根据（b）证明带宽（FWHM）为

$$\Delta v_{1/2}=0.886\frac{c}{2^N d(n_e-n_o)}$$

1.24　在 1.9 节的例子中，我们假定 a-平板的 z 轴相对于偏振器的传输轴的方位角是 45°，如果这个方位角是一个普通的角度 θ，证明：透过率可以写成

$$T=\frac{1}{2}\sin^2 2\theta\sin^2(\Gamma/2)$$

当 $\theta=45°$ 时，可以简化成式（1.9-41）。

1.25　可以看出，一个普通的双折射网络（如，一系列波片）等效于一个波片和一个偏振旋转器。一个偏振旋转器可以将一个输入光束的偏振椭圆旋转一个角度而不改变椭圆的形状。椭圆旋转器的琼斯矩阵可以写成

$$A(\rho)=\begin{bmatrix}\cos\rho & -\sin\rho\\ \sin\rho & \cos\rho\end{bmatrix}$$

式中，ρ 是旋转的角度。一个 ρ 偏振旋转等效于一个 $-\rho$ 的坐标旋转。

（a）求一个相位延迟为 Γ，相角为 ψ 的双折射波片，通过一个偏振旋转器后的琼斯矩阵，并证明这个琼斯矩阵是幺正的。

（b）普通的双折射网络的琼斯矩阵是幺正的。根据（a）的结果，一个任意的双折射网络等效于一个通过一个偏振旋转器的相位延迟波片。把普通的双折射网络的琼斯矩阵写成

$$M=\begin{bmatrix}a+ib & c+id\\ -c+id & a-ib\end{bmatrix}$$

式中，a,b,c,d 是实数。证明：相位延迟 Γ，相角 ψ，等效网络（一个波片和一个旋转器）的旋转角度 ρ 可以写成

$$\cos^2(\Gamma/2)=a^2+c^2,\sin^2(\Gamma/2)=b^2+d^2$$
$$\tan(\rho+2\psi)=d/b,\tan\rho=-c/a$$

根据（a）和（b）的结果，电场强度矢量振动方向沿着等效波片主轴的线偏振输入光将被转变成线偏振输出光。

1.26　假定一个普通的双折射网络，存在两个线偏振的输入状态，相应地有两个线性的输出状态。这两个输入状态是正交的，输出状态也是正交的。

（a）一个线偏振光可以通过一个相位延迟为 Γ 的波片（单轴）可以转变为椭圆偏振光。θ 是偏振矢量和 x 轴之间的夹角，使 c 轴（慢轴）平行与 x 轴，证明：当 θ 从 0 变化到 π，输出偏振态在邦加球上描绘了一个大圆。这个圆可以通过相关量绕 S_1 轴旋转一个角度 Γ 得到。证明：当 Γ 从 0 变化到 2π 时，输出偏振态描绘了在邦加球上的一个圆，这个圆可以通过绕 S_1 轴在赤道上旋转初始偏振态一个角度 Γ 得到。对于任意的相位延迟 Γ，输出偏振态可以通过初始偏振态的相关量绕 S_1 轴旋转角度 Γ 得到。

（b）如果一个偏振旋转器（ρ）放在题 1.25（a）中的波片后面，证明：当 θ 从 0 变化到 π，输出偏振态在邦加球上描绘了一个大圆。这个圆可以通过旋转绕 S_1 轴将过圆心的圆旋转一个角度得到。输出偏振态也在邦加球上描绘出一个大圆。这个大圆可以通过绕极轴把（a）中的大圆旋转 2ρ 角度得到。根据这个结论，任何单色光的输入偏振态都可以通过使用一个单波片和一个偏振旋转器的组合转换成任何输出偏振态。

（c）运用题 1.25 中的等效电路证明：假设一个通用双折射网络，总存在两个线偏振的输入偏振，其对应的输出偏振也是线性的，且这两个偏振态是相互正交的，求出输入和输出偏振态。

这些线偏振态的存在可以用几何证明如下：假设输入光是线偏振光，得到的输出是椭圆偏振光。输入偏振线偏振态的偏振角度从 0 变化到 π，输出偏振态将在邦加球上描绘出一个大圆。这个大圆要么就是赤道，要么是和赤道相交于两点，这两个点对应线偏振的输出态。

1.27

（a）推导式（1.7-11）和式（1.7-13）中的电场强度矢量的本征偏振表达式。

（b）利用关系式 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$，得到电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 相应的本征偏振表达式。

（c）n_1 和 n_2 是菲涅耳方程（1.7-12）的解，$\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{D}_1,\boldsymbol{D}_2$ 是相应的本征场矢量。计算 $\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2$ 和 $\boldsymbol{D}_1\cdot\boldsymbol{D}_2$，并证明：$\boldsymbol{D}_1$ 和 $\boldsymbol{D}_2$ 总是相互正交的，而 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$ 只有在单轴晶体或者各向同性介质中时才是相互正交的。

（d）证明：$\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{D}_2=0$ 和 $\boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{D}_1=0$。

1.28

（a）直接由式（1.7-10）推导菲涅耳方程式（1.7-12）。

（b）证明：菲涅耳方程式（1.7-12）是关于 n^2 的二次方程，即

$$An^4+Bn^2+C=0$$

并求 A,B,C 的表达式。

（c）证明：$\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z$ 为实数的纯电介质的情况中，$B^2-4AC>0$。

（d）从方程式（1.7-10）推导单轴晶体情况下的方程式（1.7-16）。

（e）证明：在各向同性介质中，方程式（1.7-10）可以简化为

$$k^2-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}(\frac{\omega}{c})^2=0$$

1.29　证明：在各向异性介质中传输的波包的群速度也表示了能量的传播速度，即 $\boldsymbol{v}_g=\boldsymbol{v}_e$。并证明等式 $\boldsymbol{v}_g=\boldsymbol{v}_e$ 同样也适用于复数场的振幅 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$。

1.30

（a）推导单轴晶体中非寻常光的群速度关于传输矢量极角 θ 的函数表达式。

（b）推导相速度和群速度之间的角度 α 的表达式，这个角度同样也是场矢量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 之间的角度。

（c）证明：当 $\theta=0,\pi/2$ 时，$\alpha=0$。求出 α 最大的 θ 的值，并求出 $\alpha_{\max}$ 的表达式。计算 $n_o=1.478$，$n_e=1.558$ 的 ZLI-1646 所对应的 $\alpha_{\max}$ 值。

（d）证明：对 $n_o\cong n_e$ 的情况，当 $\theta\cong45^\circ$ 时，角度分离量达到最大值 $\alpha_{\max}$，并证明 $\alpha_{\max}$ 正比于 $|n_o-n_e|$。

1.31

（a）证明：折射率面方程式（1.7-10）也可以写成

$$\frac{k_x{}^2}{k^2-\omega^2\mu\varepsilon_x}+\frac{k_y{}^2}{k^2-\omega^2\mu\varepsilon_y}+\frac{k_z{}^2}{k^2-\omega^2\mu\varepsilon_z}=1$$

式中，$k^2=k_x{}^2+k_y{}^2+k_z{}^2$。

（b）对上面的方程进行梯度运算，求出折射率面的法向矢量，并证明：法向矢量垂直于方程式（1.7-11）的本征矢。这点证明了 $\boldsymbol{E}$ 的本征矢与折射率面相切。

1.32　各向异性晶体的双折射现象可以用来产生偏振光。有一束光从方解石 $(n_o=1.658,n_e=1.486)$ 的内部入射到平面的边界，假设晶体的 z 轴垂直与入射平面。

（a）求能使正常波发生全反射的角度的范围，透射波因此是完全偏振的。

（b）利用（a）中描述的基本规则设计一个方解石格兰棱镜，如图 P1.32 所示。

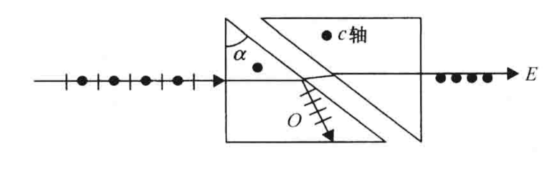


图 P1.32

求顶角α的范围。

1.33　双色偏振器是一种吸收特性和反射特性都很强的依赖于电场振动方向的材料。如果两个吸收系数有很大差异，那么很薄的材料就可以把非偏振光转变为线偏振光。

（a）设α_1和α_2是与两个独立偏振相对应的吸收系数，推导两个透射分量之比相对于介质厚度的函数表达式。

（b）证明：严格来讲，当存在吸收时，传输的正常模式就不再是线偏振的。

1.34　波动方程式（1.7-8）可以写成

$$\boldsymbol{s}\times(\boldsymbol{s}\times\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_0}{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{D})=-\frac{1}{n^2}\boldsymbol{D}$$

式中，$\boldsymbol{s}$ 是传输方向的单位矢量。令$\boldsymbol{D}_1$和$\boldsymbol{D}_2$分别是本征值的归一化$1/n_1^2, 1/n_2^2$本征矢量。假设$\boldsymbol{\varepsilon}_0/\boldsymbol{\varepsilon}$是厄米特张量。

（a）证明

$$(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_0}{\boldsymbol{\varepsilon}})_{11}\equiv\boldsymbol{D}_1^*\cdot\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_0}{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{D}_1\equiv\frac{1}{n_1^2},$$

$$(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_0}{\boldsymbol{\varepsilon}})_{22}\equiv\boldsymbol{D}_2^*\cdot\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_0}{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{D}_2\equiv\frac{1}{n_2^2},$$

$$(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_0}{\boldsymbol{\varepsilon}})_{12}\equiv\boldsymbol{D}_1^*\cdot\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_0}{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{D}_2=0$$

（b）证明：$\boldsymbol{D}_1^*\cdot\boldsymbol{D}_2=0$

1.35

（a）证明：传输方向的功率流由下式给出

$$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{s}=\frac{1}{2}\frac{c}{\varepsilon_0}(\frac{1}{n_1^3}|\boldsymbol{D}_1|^2+\frac{1}{n_2^3}|\boldsymbol{D}_2|^2)$$

式中，$\boldsymbol{D}_1$和$\boldsymbol{D}_2$本征模的电位移矢量的振幅，n_1和n_2是相应的折射率。

（b）证明

$$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{s}=\frac{1}{2\mu c}(n_1|\boldsymbol{A}_1|^2+n_2|\boldsymbol{A}_2|^2)$$

式中，$\boldsymbol{A}_1$和$\boldsymbol{A}_2$是电场强度矢量的横向部分。

（c）证明：沿传输方向的总的功率流是一个积分常数，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}(n_1|\boldsymbol{A}_1|^2+n_2|\boldsymbol{A}_2|^2)=0$$

式中，ξ是沿传输方向$\boldsymbol{s}$的距离（如，$\xi=\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{r}$）。

1.36　考虑一个有限横向尺寸的圆偏振光。

（a）横向尺寸比波长λ大很多，证明电场和磁场强度矢量可以近似地写为

$$E(x,y,z,t) \approx E_0(x,y)(\hat{x} - i\,\hat{y}) - \frac{i}{k}(\frac{\partial E_0}{\partial x} - i\frac{\partial E_0}{\partial y})\hat{z}e^{i(\omega t - kz)}$$

$$H(x,y,z,t) \approx i\frac{k}{\omega\mu}E(x,y,z,t)$$

（b）利用角动量的定义 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{P}$，其中 P 是习题 1.5 中定义的线动量，计算沿传输方向（$+z$）的角度量的时间平均分量。假定电磁波的能量归一化为 $\hbar\omega$，证明这个角动量分量是 $\hbar$。

（c）证明：角动量的横向分量为 0。

1.37 根据习题 1.6，施加在电介质上的电场，单位体积所做的功是 $W = \int \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{P}$，其中 $\boldsymbol{P}$ 是极化率，在线性介质中 $P_i = \varepsilon_0 \chi_{ij} E_j$。在二维平面内沿两条不同路径从（0，0）到 (E_{10}, E_{20}) 进行积分。

（a）路径 A：先从（0，0）到 $(E_{10}, 0)$，然后从 $(E_{10}, 0)$ 到 (E_{10}, E_{20})。证明积分产生的结果如下：

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0\chi_{11}E_{10}^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0\chi_{22}E_{20}^2 + \varepsilon_0\chi_{12}E_{10}E_{20}$$

（b）路径 B：先从（0，0）到 $(0, E_{20})$，然后从 $(0, E_{20})$ 到 (E_{10}, E_{20})。证明积分产生的结果如下：

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0\chi_{11}E_{10}^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0\chi_{22}E_{20}^2 + \varepsilon_0\chi_{21}E_{10}E_{20}$$

在无损介质中，积分应该是独立于路径的。这导致 $\chi_{12} = \chi_{21}$。三维空间中，经过简单的分析可以得到 $\chi_{ij} = \chi_{ji}$。

参考文献

1. Jones, R. C., New calculus for the treatment of optical systems. *J. Opt. Soc. Am.* **31**:488 (1941).
2. Yariv, A., and P. Yeh, *Optical Waves in Crystals*. Wiley, New York, 1984.
3. Yeh, P., *Optical Waves in Layered Media*. Wiley, New York, 1988.
4. Lyot, B., Optical apparatus with wide field using interference of polarized light. *C. R. Acad. Sci. (Paris)* **197**:1593 (1933).
5. Lyot, B., Filter monochromatique polarisant et ses applications en physique solaire. *Ann. Astrophys.* **7**:31 (1944).
6. Öhman, Y., A new monochromator. *Nature* **41**:157 (1938).
7. Öhman, Y., On some new birefringent filter for solar research. *Ark. Astron.* **2**:165 (1958).

第 2 章　光线和光束的传播

2.0　引言

在第 1 章中讨论了平面波在各向同性介质中的传播问题。本章将处理各种常用在光电系统里的光学介质中光线传播问题。它们包括均匀和各向同性材料、各向异性材料、薄透镜、电介质界面、梯度折射率透镜和曲面镜。在几何光学中，可以近似地使用射线的概念来代替光波。这种近似仅能使用在传播孔径远大于光波波长,光的衍射效应可以忽略的情况下。光线在各向同性介质中沿直线传播,在各向异性介质中遵循费马特定律传播。根据定义，光线与波前垂直，因此对光线行为的了解将有助于追踪光波通过各种光学元件时的行径，我们发现，可以用一个简单的 2×2 矩阵来描述光线通过这些元件（或从这些元件上反射）的情形。此外，这些矩阵还可用来描写球面波的传播，以及高斯光束的传播，而激光的输出光束正是高斯形的。这些矩阵也同样能处理旁轴光线通过各种不同介质时的传播。

2.1　光线矩阵

考虑一束傍轴光线通过焦距为 f 的薄透镜的情形，如图 2.1 所示。在大多数光学系统中，各向同性的光学介质被制作成球形的表面。将柱形对称轴 z 轴叫做光轴。于光轴的交角很小，sin 和 tan 值可以近似取角度本身值的那些光线称做旁轴光线。在这样的一个柱坐标系统中，我们取一组光线为 $r(z)$，r 代表光线到轴的距离。这些通过光轴光线称做子午光线。

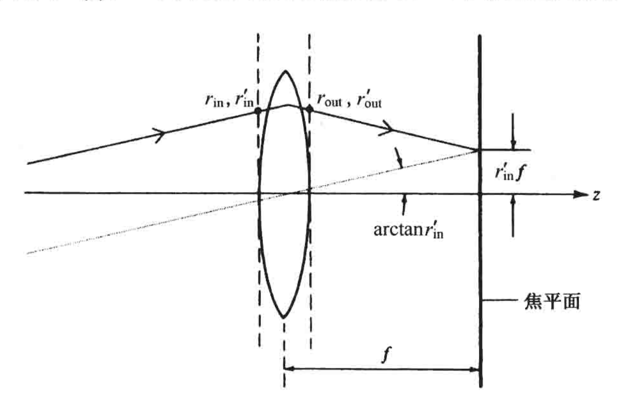


图 2.1　薄透镜对光线的偏折

在薄透镜中，出射光线和入射光线可以表示为

$$r_{out} = r_{in} \tag{2.1-1}$$

$$r'_{out} = r'_{in} - \frac{r_{in}}{f} \tag{2.1-2}$$

r 表示于光轴交角的光线，r' 代表这些光线的斜率。根据旁轴光线近似原理，斜率就等

于光线与光轴的交角。入射光线没有变化，而出射光线由于薄透镜，斜率发生了改变。方程式（2.1-2）可以简单描述为薄透镜的聚焦作用，即平行光经过薄透镜后产生了汇聚效应。

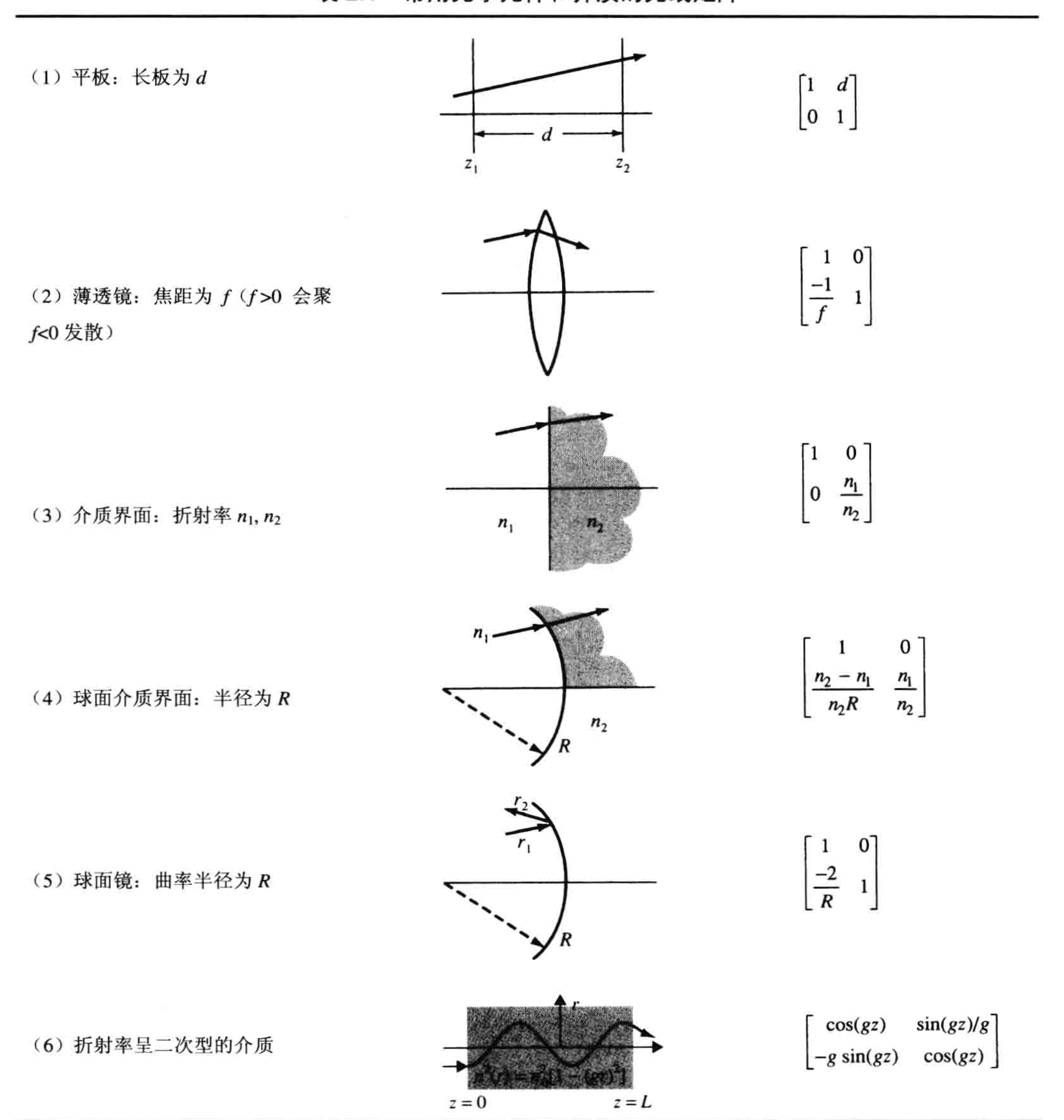
方程式（2.1-1）和式（2.1-2）可以应用矩阵相乘法规则改写为

$$\begin{bmatrix} r_{\text{out}} \\ r'_{\text{out}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{\text{in}} \\ r'_{\text{in}} \end{bmatrix} \tag{2.1-3}$$

对于会聚透镜 $f>0$，而发散透镜的 f 是负的。其他一些光学元件的光线矩阵见表 2.1。由表 2.1 看出，光线通过一个长度为 d 的各向同性介质后可以用如下矩阵描述：

$$\begin{bmatrix} r_{\text{out}} \\ r'_{\text{out}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{\text{in}} \\ r'_{\text{in}} \end{bmatrix} \tag{2.1-4}$$

表 2.1　常用光学元件和介质的光线矩阵



（1）平板：长板为 d		$\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
（2）薄透镜：焦距为 f（$f>0$ 会聚 $f<0$ 发散）		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{f} & 1 \end{bmatrix}$
（3）介质界面：折射率 n_1, n_2		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
（4）球面介质界面：半径为 R		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2-n_1}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
（5）球面镜：曲率半径为 R		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-2}{R} & 1 \end{bmatrix}$
（6）折射率呈二次型的介质		$\begin{bmatrix} \cos(gz) & \sin(gz)/g \\ -g\sin(gz) & \cos(gz) \end{bmatrix}$

在矩阵方法中，每条光线被表示为一个光线矢量，光学器件被表示为光线矩阵。光线矢量描述为光线到光轴的距离 r_z 和于光轴的夹角 r'_z。在任意一个光学系统中，出射光线矢量可以通过入射光线矢量于表中的光学元件矩阵相乘得到。

我们现在有条件来讨论一下光线经过双周期性透镜系统的传播问题，这种系统是由许多相距为 d 焦距为 f_1 和 f_2 的透镜组成的，如图 2.2 所示。在本书的下一章中可看到这种情况在形式上等价于：高斯光束在一个光学共振腔内的传播，此共振腔是由曲率半径为 $R_1=2f_1$ 和 $R_2=2f_2$ 构成的，反射镜之间的距离为 d。

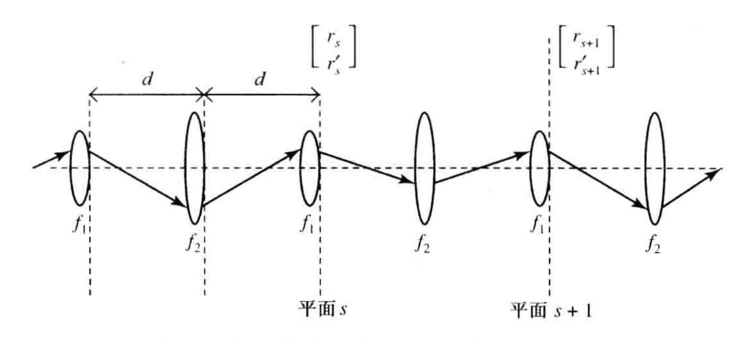


图 2.2　光线穿过一系列双周期性透镜的传播

在 s 和 $s+1$ 平面之间那一段可被当做周期透镜序列的基本单元。将透出一个单元和射入此单元的光线的参量联系起来的矩阵是两个矩阵的乘积，每一个涉及一个透镜，即

$$\begin{bmatrix} r_{s+1} \\ r'_{s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{d} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{d} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_s \\ r'_s \end{bmatrix} \tag{2.1-5}$$

将式（2.1-5）通过矩阵乘法得到

$$\begin{bmatrix} r_{s+1} \\ r'_{s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_s \\ r'_s \end{bmatrix} \tag{2.1-6}$$

上式也可以由方程式表达为

$$\begin{aligned} r_{s+1} &= Ar_s + Br'_s \\ r'_{s+1} &= Cr_s + Dr'_s \end{aligned} \tag{2.1-7}$$

式中，A，B，C，D 为矩阵元素

$$A = 1 - \frac{\mathrm{d}}{f_2}$$

$$B = d\left(2 - \frac{\mathrm{d}}{f_2}\right)$$

$$C = -\left[\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\left(1 - \frac{\mathrm{d}}{f_1}\right)\right]$$

$$D = -\left[\frac{\mathrm{d}}{f_1} - \left(1 - \frac{\mathrm{d}}{f_1}\right)\left(1 - \frac{\mathrm{d}}{f_2}\right)\right] \tag{2.1-8}$$

需要注意，基本单元光线是一个单位矩阵，即

$$AD - BC = 1 \tag{2.1-9}$$

方程式（2.1-6）可以描述为光线通过 N 个基本单元，在单元 0～N 之间，得到

$$\begin{bmatrix} r_N \\ r'_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^N \begin{bmatrix} r_0 \\ r'_0 \end{bmatrix} \tag{2.1-10}$$

第 N 个单位矩阵的能量可以简单地描述为如下矩阵定律（切比雪夫定律）

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^N = \begin{bmatrix} AU_{N-1} - U_{N-2} & BU_{N-1} \\ CU_{N-1} & DU_{N-1} - U_{N-2} \end{bmatrix} \tag{2.1-11}$$

式中

$$U_N = \frac{\sin(N+1)\theta}{\sin\theta} \tag{2.1-12}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{A+D}{2}\right) \tag{2.1-13}$$

如果一条光线从 0 平面开始，以有限的 r_0 和 r'_0 传播，那么这条光线将一直被透镜系统约束，到平面 N 时，r_n 和 r'_n 参数都不会改变。由方程式（2.1-10）～（2.1-13）得，约束传播的条件是需要一个正角度 θ，即

$$\left|\frac{A+D}{2}\right| \leqslant 1 \tag{2.1-14}$$

对于系统参数来说（方程式（2.1-8）)，约束传播的条件是

$$-1 \leqslant 1 - \frac{d}{f_1} - \frac{d}{f_2} + \frac{d^2}{2f_1 f_2} \leqslant 1 \tag{2.1-15}$$

或者是

$$0 \leqslant \left(1 - \frac{d}{2f_1}\right)\left(1 - \frac{d}{2f_2}\right) \leqslant 1 \tag{2.1-16}$$

对于另一种情况，如果条件方程式（2.1-14）越是条件不成立，角度参数 θ 变成一个负角度，$\theta = iq$，q 为实数。在这种情况下，U_N 变为

$$U_N = \frac{\sinh(N+1)q}{\sinh q} \tag{2.1-17}$$

在这种情况下，将不能约束光线的传播。

相同透镜构成的波导——一种特殊情况

考虑图 2.2 中所有透镜焦距 $f_1 = f_2 = f$ 都相同的特殊情况，这种最简单的透镜波导。这时约束传播的条件方程式（2.1-16）变成

$$\left(1 - \frac{d}{2f}\right)^2 \leqslant 1 \tag{2.1-18}$$

由于 d 总是取正，所以当 $f > 0$ 时这个条件总是成立的。换句话说，在最简单的透镜波导中，约束传播条件仅在凸透镜的情况下成立，这时，条件可以简化为

$$0 \leqslant d \leqslant 4f \tag{2.1-19}$$

相同的问题可以直接被解决。在这种情况下，从同一平面发出的光线参数到另一个平面可以表示为

$$\begin{bmatrix} r_{s+1} \\ r'_{s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_s \\ r'_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_s \\ r'_s \end{bmatrix} \tag{2.1-20}$$

将式（2.1-20）的矩阵相乘得到

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= d \\ C &= -1/f \\ D &= 1 - d/f \end{aligned} \tag{2.1-21}$$

通过方程式（2.1-14）得到约束条件为

$$-1 \leqslant 1 - \frac{\mathrm{d}}{2f} \leqslant 1 \tag{2.1-22}$$

这个条件与式（2.1-18）和式（2.1-19）是等价的。

在 m 米处的光斑半径可以通过方程式（2.1-10）～（2.1-12）得到

$$r_m = r_{\max} \sin(m\theta + \alpha) \tag{2.1-23}$$

$$\cos\theta = 1 - d/2f \tag{2.1-24}$$

使用方程式（2.1-10）～（2.1-12）并分开表示 A，B，C，D 矩阵，得到

$$(r_{\max})^2 = \frac{4f}{4f - d}(r_0^2 + dr_0 r'_0 + dfr_0'^2) \tag{2.1-25}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{4f/d - 1}}{(1 + 2fr'_0/r_0)} \tag{2.1-26}$$

其中 m 相应于紧靠第 n 个透镜右边的平面。上述二式的推导留给读者当做练习。

条件可以通过观察一束激光在很多个相同的透镜间传播得到，当条件式（2.1-19）和式（2.1-22）不成立时，光线将迅速发散开来。

光学共振腔中的光线

考虑光线在由两个曲面镜构成的光学共振腔中光线的传播。除了在反射时光线路径要折叠外，光线在曲率半径为 R 的镜面上的反射与通过焦距为 $f = R/2$ 的透镜是等价的，因此可以利用上节的公式来描述光线在相距为 d 的两个曲率半径为 R_1 和 R_2 的曲面反射镜之间的传播问题。图 2.3 表示这个光学共振腔还有它的等效透镜系统。

对于两个凹面透镜，约束条件变为

$$0 \leqslant \left(1 - \frac{d}{R_1}\right)\left(1 - \frac{d}{R_2}\right) \leqslant 1 \tag{2.1-27}$$

d 是两个反射镜间的距离，R_1 和 R_2 是曲面镜的半径。

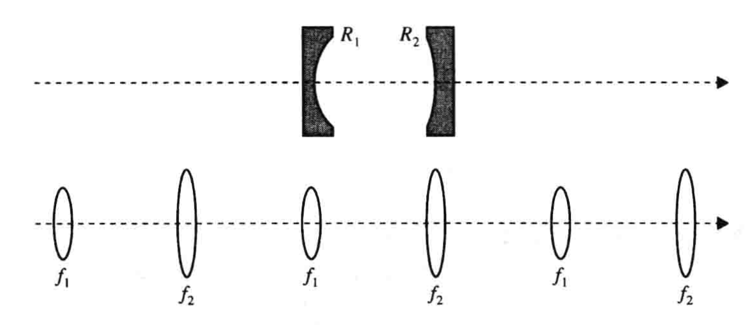


图 2.3　光学共振腔和它的等效透镜系统。R_1 和 R_2 是曲面镜的半径。$f_1 = R_1/2$，$f_2 = R_2/2$

2.2　偏折光线和重入光线

偏折光线

前面我们只讨了一些在同一平面内并且都穿过光轴的特殊光线。一般来说，光线可以沿着光轴向三个不同的方向传播（比如一个螺旋轨迹）。这些光线称为偏折光线。对于这些光线，x 和 y 轴的参数是独立的。要完整地描述这些光线需要 $x(z)$，$x'(z)$，$y(z)$，$y'(z)$。在前章提到的透镜波导中，这些光线可以表示为

$$\begin{bmatrix} x_N \\ x'_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^N \begin{bmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{bmatrix} \tag{2.2-1}$$

$$\begin{bmatrix} y_N \\ y'_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^N \begin{bmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{bmatrix} \tag{2.2-2}$$

我们注意到每个光线参数（x 和 y）在透镜波导中传播时遵循相同的矩阵。使用方程式（2.1-11）～（2.1-13），在 N 平面处的光线可以表示为

$$x_N = x_{\max} \sin(N\theta + \alpha_x) \tag{2.2-3}$$

$$y_N = y_{\max} \sin(N\theta + \alpha_y) \tag{2.2-4}$$

式中，N 是整数，α_x 和 α_y 是常量。这些常量取决于 0 平面时光线参数，一般来说，α_x 和 α_y 是不同的。

根据方程式（2.2-3）和式（2.2-4），当 θ 为正的时候，(x_N，y_N）位于一个椭圆上。这些是偏折光线，光线的坐标取决于矩形 $2x_{\max}$ 和 $2y_{\max}$。在 $\alpha_x = \alpha_y$ 的特殊情况时，光线轨迹位于通过光轴的子午平面内。θ 作为一个系统参数，独立于光线的坐标。

重入光线

基于方程式（2.2-3）和式（2.2-4），光线在周期的透镜波导中传播时坐标是 $N\theta$ 的正弦。在这样的情况下，光线在每次周期传播后将衰减。如果系统参数 $\theta/2\pi$ 是一个常数，那么

$$N\theta = 2M\pi \tag{2.2-5}$$

式中，M 是一个整数。在这种情况下，当在 N 个周期以后光线矩阵将取决于方程式（2.1-11）和

式（2.1-12）

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

那么光线经过 N 次往返后回到它的出发点，这时在反射镜上连续地重复相同的光路图。

例：重入光线在对称共焦共振腔中的传播。

考虑用两个半径为 R 的理想的曲面镜做成的光学共振腔。如果镜间距离 $d=R$，两个曲面镜有一个共同的焦点。这种反射镜叫做共焦反射镜。这种反射镜系统的等效透镜波导是 $f_1=f_2=R/2$，系统参数 θ 通过方程式（2.1-8）得到

$$\theta = \arccos\left(\frac{A+D}{2}\right) = \arccos(-1) = \pi$$

在反射镜中的光线将在通过两个周期的等效透镜波导时重复。由于每个在透镜波导里的周期相当于一个双程的反射镜系统，光线轨迹将在反射镜中重复 2 个双程后重复。需要注意的是光线轨迹的周期独立于开始发射时的条件参量(r_0，r_0')。

2.3　在类透镜介质中的光线

这节中将讨论光线在各向异性介质中，特别是类透镜介质中的传播。在几何光学中，两点间沿直线传播的光线耗时最少。这就是费马时间最短原理，用变分法表示如下

$$\delta\int_{P_1}^{P_2} \frac{n}{c}\mathrm{d}s = 0 \tag{2.3-1}$$

式中，P_1 和 P_2 是两个点，c 是真空中的光速，n 是介质的折射率，ds 是沿光路径的微分元。光程在两点间的距离是固定的。

将光线轨迹表示成如下形式

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t) \tag{2.3-2}$$

式中，t 是变量，方程式（2.3-1）可以写成

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} n(x,y,z)\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,\mathrm{d}t = 0 \tag{2.3-3}$$

式中，x'，y'，z' 根据参量 t 变化，且忽略常量 c。如果我们定义

$$F(x,x',y,y',z,z',t) = n(x,y,z)\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \tag{2.3-4}$$

则根据方程式（2.3-1）的条件，欧拉–拉格朗日方程可以写成

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right),\quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right),\quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) \tag{2.3-5}$$

也就是说，通过确定光程的光线轨迹必须符合欧拉-拉格朗日方程式（2.3-5）。应用

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}t\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \tag{2.3-6}$$

则上述欧拉–拉格朗日方程可以被写成

$$\frac{\partial n}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right),\quad \frac{\partial n}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right),\quad \frac{\partial n}{\partial z}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right) \tag{2.3-7}$$

这三个方程可以写成一个矢量方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right)=\boldsymbol{\nabla}n \tag{2.3-8}$$

这里 s 是从 P_1 点开始的弧的长度，$\boldsymbol{r}$ 代表（x，y，z）的矢量。这是光线方程，左边代表了光线的弯折程度。光线在传播过程中总是偏向折射率大的一边。光线方程可以解释一个大气中的现象，包罗海市蜃楼和绿光。在本章中我们将主要考察在平方律介质（或者是类透镜介质）中的光线方程。

现在讨论光线在如下折射率介质中的传播情况

$$n^2(x,y)=n_0^2[1-g^2(x^2+y^2)] \quad \text{with} \quad g^2(x^2+y^2)\ll 1 \tag{2.3-9}$$

式中 n_0 是光对称轴处的折射率，g 是表示介质特性的常量。当穿过折射率为 n，长度为 dz 的介质后，波产生的相位延迟是 $(2\pi\mathrm{d}z/\mathrm{d}\lambda)n$，这可以直接导出，按照式（2.3-9）所描述的薄介质棒与一个薄透镜的行为相同。它们均引入一个与 r^2 成正比的相移。在对称轴（r=0）处这种介质有最大的折射率。折射率从对称轴处开始减少。这种介质我们称为梯度折射率介质。用柱坐标可以表示为

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

方程式（2.3-9）可以写成

$$n^2(r)=n_0^2[1-(gr)^2] \tag{2.3-10}$$

对于近轴光线，可以在方程式（2.3-8）中用 $\mathrm{d}/\mathrm{d}z$ 替代 $\mathrm{d}/\mathrm{d}s$。对折射率介质应用方程式（2.3-9），得到

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}z^2}+g^2\boldsymbol{r}=0 \quad \text{with} \quad \boldsymbol{r}=(x,y) \tag{2.3-11}$$

这是一个在类透镜介质中光线轨迹微分方程。对于子午光线，上述方程可以写成

$$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}^2z}+g^2r=0 \quad \text{with} \quad r=\sqrt{x^2+y^2} \tag{2.3-12}$$

如果入射平面在 z=0 处，光线的位置为 r_0 斜率为 r_0'，按照方程式（2.3-12）光线轨迹方程可以写成

$$\begin{aligned} r(z)&=r_0\cos(gz)+r_0'\sin(gz)/g \\ r'(z)&=-r_0g\sin(gz)+r_0'\cos(gz) \end{aligned} \tag{2.3-13}$$

光线轨迹方程也可以写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} r \\ r' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos(gz) & \sin(gz)/g \\ -g\sin(gz) & \cos(gz) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_0 \\ r_0' \end{bmatrix} \tag{2.3-14}$$

根据方程式（2.3-13），光线在光轴附近来回振荡，如图 2.4 所示。这符合光线总向折射率大的方向偏折。事实上，注意到光线轨迹方程是一个 z 的周期函数，其周期为

$$\Lambda=\frac{2\pi}{g} \tag{2.3-15}$$

这个周期也称为螺距。

作为周期性行为的结果，这样一段类透镜介质可以被用来成像。这样一段类透镜介质叫做梯度–棒透镜或简称棒透镜。为了对此进行描述，考虑一束平行光线在 z=0 处入射到这样一类介质。所有这些光线平行于 z 轴。这些光线的轨迹可以表示为

$$r(z) = r_0 \cos(gz) \tag{2.3-16}$$

式中，r_0 是每一条光线的入射点。当经过距离 d 以后

$$gd = \pi/2 \tag{2.3-17}$$

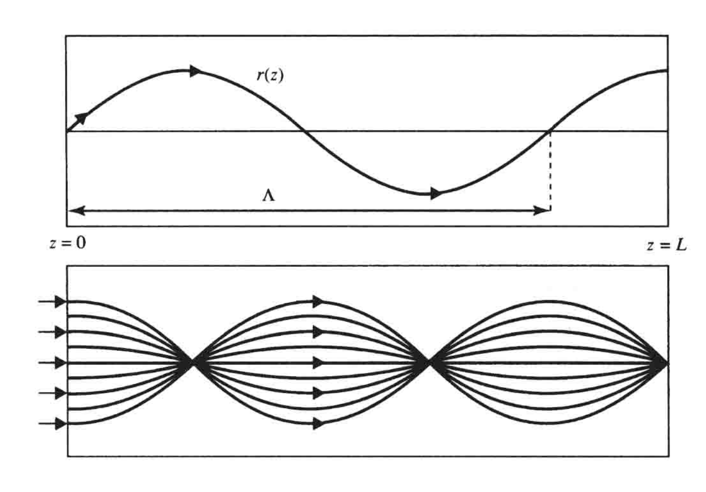


图 2.4　折射率随平方律变化介质中的光线

所有的光线汇聚入光轴上的一点，如果将这一点称为焦点，则焦距是

$$f = \pi/2g = \Lambda/4 \tag{2.3-18}$$

式中，$\Lambda = 2\pi/g$ 是周期。如果这种梯度–棒介质足够长，这些光线将分开并且再次汇聚。图 2.4 表示了这些光线在介质中的传播路径。

如果介质长度 L 不是焦距 f 的整数倍，那么光线将在 z=L 处向一个公共焦点会聚，它与出射平面的距离为

$$h = \frac{1}{n_0 g \tan(gL)} \tag{2.3-19}$$

假设介质在 $z>L$ 处具有折射率 n=1，而且入射角较小，式中因子 n_0 取决于边界处的折射率。方程式（2.3-19）的推导留给读者作为练习题（习题 2.3）如果式（2.3-19）中 h 是负值，那么光束在 z=L 处发散。发散光束的原点位于介质中 z=L+h 处（注意 h<0）。在这种情形下，介质棒相当于一个负透镜。

引起平方律折射率变化的物理因素包括下列几种。

1. 光强度类似高斯分布的激光束在弱吸收介质中的传播。由于 n 与温度 T 有关，故吸收热量引起的折射率也有某种分布[9]。如果 $\mathrm{d}n/\mathrm{d}T<0$，像大多数材料那样，在光轴处吸收热量最强，折射率最小，于是光束随距离 z 增大而发散。如果 $\mathrm{d}n/\mathrm{d}T>0$，光束被聚焦；如果 $\mathrm{d}n/\mathrm{d}T<0$ 将产生负透镜效应。

2. 光强度类似高斯分布的激光束在克尔介质中的传播。由于非线性效应，介质的折射率

随着光强的增加而增加，如下式所示

$$n(x,y,z)=n_0+n_2I(x,y,z)$$

式中 n_0 是常量，n_2 称为克尔系数。对于高斯光束，在光束轴线附近光强呈平方律分布。如果 $n_2>0$，类透镜介质可由引入激光束而产生；如果 $n_2<0$ 将产生负透镜效应。克尔效应将在第 8 章和第 14 章中讨论。

3. 由离子交换扩散形成的梯度折射率光纤。空心玻璃管中的离子交换扩散，在空心管融化为实心波导后引起沿径向的折射率分布。这种波导管可以在医学检查时用来传播光学图像。

上面对光线的描述均在包含 z 轴的子午面。另外有一类光线不在子午面内传播，这些光线称为偏折光线。典型的偏折光线事例是围绕 z 轴的螺旋线（偏折光线的例子见习题 2.19）。

2.4　平方律折射率介质中的波动方程

在几何光学中，一束平行光线可以利用薄透镜或梯度-棒透镜聚焦为一点。对于理想情形，聚焦点有无限小尺寸，在几何光学中，衍射效应完全被忽略。本节将考虑电磁辐射波的自然特性来研究光束的传播。特别感兴趣的是光束中能量主要沿一个方向的传播，同时也对光束波面为球面的波感兴趣。本章后面将证明，球面波光束在由球面镜构成的光学共振腔中传播损耗最小。

在第 1 章中得到电磁波在在各向同性介质中的传播方程

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E})+\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}=0 \tag{2.4-1}$$

在本节中，将讨论这个方程的光线形式的解。应用旋度展开

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E})=\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E})-\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{E} \tag{2.4-2}$$

使用方程式（1.1-3）和 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$，得到

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{\nabla}\varepsilon\right) \tag{2.4-3}$$

如果假设在一个波长的范围内 $\varepsilon<<1$，方程式（2.4-3）的右边可忽略，得

$$\nabla^2\boldsymbol{E}+k^2(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}=0 \tag{2.4-4}$$

式中

$$k^2(\boldsymbol{r})=\omega^2\mu\varepsilon(\boldsymbol{r})\left(1-i\frac{\sigma(\boldsymbol{r})}{\omega\varepsilon}\right) \tag{2.4-5}$$

这样使 ε 和 $\boldsymbol{r}$ 独立。取复数 k，这样就能表示在介质中的衰减（$\sigma>0$）和增益（$\sigma<0$）。通过在第 1 章的讨论，平面波的场振幅 $E_0\exp[(i\omega t-kz)]$ 将呈指数形式增益或衰减。

方程式（2.4-4）是亥姆霍兹方程。处理激光束在介质中传播时常采用以光轴为对称的柱坐标。考虑一个折射率按以下变化的类透镜介质

$$n^2(x,y)=\frac{\varepsilon(r)}{\varepsilon_0}=n_0^2[1-g^2(x^2+y^2)]\quad\text{with}\quad g^2(x^2+y^2)\ll 1 \tag{2.4-6}$$

式中，n_0 是光轴处的折射率，g 是一个实的介质特性常量。当 g=0 时对应各向同性介质。

在柱坐标中，拉普拉斯∇^2可以写成

$$\nabla^2 = \nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2.4-7}$$

由于只考虑向一个方向传播的平面波，可以定义 $\boldsymbol{E}$ 为一个单独的横向场元素。$\boldsymbol{E}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{a}}\psi(r, z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz} \tag{2.4-8}$$

式中，$\hat{\boldsymbol{a}}$ 是 xy 平面极坐标的一个单位矢量，由式（2.4-4）和式（2.4-7）得

$$\nabla_t^2\psi - 2ik\psi' - k^2g^2r^2\psi = 0 \tag{2.4-9}$$

式中，$\psi' = \partial\psi/\partial z$，并假设场强变化得足够慢，即

$$\psi'' \ll k\psi', k^2\psi \tag{2.4-10}$$

这种近似称为幅度慢变化（SVA）近似。这种近似在传输的横向尺度远大于波长时成立(见习题 2.22)。在柱坐标对称系统中讨论光束，引入两个复变量 $P(z)$ 和 $q(z)$，则ψ 可以表示为

$$\psi = \exp\left[-i\left(P(z) + \frac{k}{2q(z)}r^2\right)\right] \tag{2.4-11}$$

这个方程可以看做一个相位为 $P(z)$ 的光波和一个曲率为 $q(z)$ 的球面波。问题是找到 $P(z)$ 和 $q(z)$ 使方程式（2.4-11）是方程式（2.4-9）的解。

将ψ 代入方程式（2.4-9），使用式（2.4-7），得到

$$-\left(\frac{k}{q}\right)^2 r^2 - 2i\left(\frac{k}{q}\right) - k^2r^2\left(\frac{1}{q}\right)' - 2kP' - k^2g^2r^2 = 0 \tag{2.4-12}$$

如果方程式（2.4-12）中的 r=0，则

$$\left(\frac{1}{q}\right)^2 + \left(\frac{1}{q}\right)' + g^2 = 0 \quad \text{and} \quad P' = -\frac{i}{q} \tag{2.4-13}$$

ψ 的亥姆霍兹方程可以写成式（2.4-13）。第一个方程可以求出 $q(z)$，第二个可以求出 $P(z)$。在实际中，非线性方程式（2.4-13）的通解是不存在的。在 2.5 中，我们将考虑在 g=0 时各向同性介质中的解。

2.5　均匀介质中的高斯光束

如果介质是各向同性的，根据方程式（2.4-6），令 g=0，方程式（2.4-13）变成

$$\left(\frac{1}{q}\right)^2 + \left(\frac{1}{q}\right)' = 0, \qquad P' = -\frac{i}{q} \tag{2.5-1}$$

取 $u(z)$ 为

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} \tag{2.5-2}$$

直接由方程式（2.5-1）得到

$$\frac{d^2u}{dz^2} = 0 \tag{2.5-3}$$

方程式（2.5-3）的通解可以表示为

$$u(z) = az + b \tag{2.5-4}$$

式中，a 和 b 是任意常数。按照方程式（2.5-2 光线参数 $q(z)$ ）可写成

$$\frac{1}{q} = \frac{a}{az + b} \tag{2.5-5}$$

或者等价于

$$q(z) = z + q_0 \tag{2.5-6}$$

式中，q_0 是一个常量（ $q_0=q(0)=b/a$)。另一个光线参数 $P(z)$ 可以由式（2.5-1）和式（2.5-6）得到

$$P' = -\frac{i}{q} = -\frac{i}{z + q_0} \tag{2.5-7}$$

因此，经过积分可得到

$$P(z) = -i\ \ln\left(1 + \frac{z}{q_0}\right) \tag{2.5-8}$$

式中，任意常量可取为 0。因为这个常量只能修正式（2.4-11）电场解的相位，这相当于时间原点的移动。

将式（2.5-6）和式（2.5-8）代入方程式（2.4-11），得到如下对称柱坐标形式的亥姆霍兹方程解

$$\psi = \frac{q_0}{q_0 + z}\exp\left(-i\frac{k}{2(q_0 + z)}r^2\right) \tag{2.5-9}$$

式中，q_0 是一个任意复数常量。对于一个物理上能实现的一束光的能量集中在轴附近时，当 r 趋向正无穷时，场强必定趋向于 0。这就要求复常数 q_0 的虚部为正，可以选择一个新的 z 轴原点，将 q_0 转变为一个纯虚数。现在可以将 q_0 用一个新常数 ω_0 来表示

$$q_0 = i\frac{\pi\omega_0^2 n}{\lambda} = i\frac{k\omega_0^2}{2} \equiv iz_0 \tag{2.5-10}$$

式中，n 是介质的折射率，z_0 是 q_0 的振幅。为了理解 ω_0 的物理意义，考察 z=0 处场振幅

$$\psi(z = 0) = \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_0^2}\right) \tag{2.5-11}$$

我们注意到光束振幅服从高斯分布，光斑大小是 ω_0 。所以 ω_0 是在 z=0 时的光斑尺寸。

如果 $z\neq 0$，根据式（2.5-9）和式（2.5-10）可以把光束振幅写成

$$\psi = \frac{1}{1 - iz/z_0}\exp\left(-\frac{r^2}{\omega_0^2(1 - iz/z_0)}\right) \tag{2.5-12}$$

或者

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{1+(z/z_0)^2}} \exp\left(i\arctan\frac{z}{z_0}\right)\exp\left(-\frac{r^2}{\omega_0^2[1+(z/z_0)^2]}(1+iz/z_0)\right) \tag{2.5-13}$$

如果定义参数

$$\omega^2(z) = \omega_0^2\left(1+\frac{z^2}{z_0^2}\right) = \omega_0^2\left[1+\left(\frac{\lambda z}{\pi\omega_0^2 n}\right)^2\right] \tag{2.5-14}$$

$$R(z) = z\left(1+\frac{z_0^2}{z^2}\right) = z\left[1+\left(\frac{\pi\omega_0^2 n}{\lambda z}\right)^2\right] \tag{2.5-15}$$

所以

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{z+iz_0} = \frac{1}{R(z)} - i\frac{\lambda}{\pi\omega^2(z)n} \tag{2.5-16}$$

$$\eta(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right) = \arctan\left(\frac{\lambda z}{\pi\omega_0^2 n}\right) \tag{2.5-17}$$

将方程式（2.5-9），式（2.5-11）～（2.5-13）合并，带入 $E=\psi\exp(-ikz)$ 得到

$$E(x,y,z) = E_0\frac{\omega_0}{\omega(z)}\exp\left(-i[kz-\eta(z)]-i\frac{kr^2}{2q(z)}\right)$$

或等价为

$$E(x,y,z) = E_0\frac{\omega_0}{\omega(z)}\exp\left[-i[kz-\eta(z)]-r^2\left(\frac{1}{\omega^2(z)}+\frac{ik}{2R(z)}\right)\right] \tag{2.5-18}$$

式中，$k=2\pi n/\lambda$，这是我们的基本结论。我们将把它看做高斯光束的基本解，因为在求解方程式（2.4-4）时，仅考虑横向依赖关系 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 的情形，因此排除了更为复杂的与方位角有关的解。对那些高阶模将另行讨论。

由式（2.5-18）可以看出，当参量 $\omega(z)$（它按照式（2.5-14）变化）等于距离 r 时，其场振幅下降为轴上值的 $1/e$ 倍。因此将它称为光束的“光斑大小”。参量 ω_0 为最小光斑大小，它是在 $z=0$ 平面上的光斑大小。式（2.5-14）中的参量 R 是非常近于球面的波阵面在 z 处的曲率半径。推导出等相位面（波阵面）的曲率半径表达式，或更简单地，研究位于 $z=0$ 处的点辐射源所发出的球面波的形式，就可证明这个结论。球面波的形式为

$$\begin{aligned} E &\propto \frac{1}{R}e^{-ikR} = \frac{1}{R}\exp(-ik\sqrt{x^2+y^2+z^2}) \\ &\approx \frac{1}{R}\exp\left(-ikz-ik\frac{x^2+y^2}{2R}\right),\quad x^2+y^2 \ll z^2 \end{aligned} \tag{2.5-19}$$

因为 z 等于球面波的曲率半径 R。将式（2.5-19）与式（2.5-18）进行比较可知，R 就是高斯光束的曲率半径。如果忽略 $\eta(z)$，则复参数 q 被作为高斯光束的曲率半径。复参数 q 通常称为高斯光束参数，或者称为高斯光束的复曲率半径。

习惯上认为决定 R 符号的规则是：如果曲率中心位于 $z'>z$，R 就是负的，反之 R 就是正的。根据式（2.5-18），一旦指定了基模高斯光束的最小光斑大小 ω_0 和它的位置（即 $z=0$ 平面），就可唯一地确定它的形式。这时由式（2.5-14）和式（2.5-15）就可求得在任一平面 z

处的光斑大小 ω 和曲率半径 R。图 2.5 给出了这些特性。图中的双曲线代表光线的方向，它们是包含 z 轴的平面与下列双曲面的交线

$$x^2 + y^2 = \text{const.}\ \omega^2(z) \tag{2.5-20}$$

这些双曲面代表能量传播方向。图中球面的曲率半径由式（2.5-15）式确定。对于 z 值很大的情形，双曲面 $x^2 + y^2 = \omega^2$ 渐近于一圆锥体

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\lambda}{\pi\omega_0 n} z \tag{2.5-21}$$

这个锥体的半顶角可作为光束发散角的度量，它由下式给出

$$\theta_{\text{beam}} = \arctan\left(\frac{\lambda}{\pi\omega_0 n}\right) \cong \frac{\lambda}{\pi\omega_0 n} \quad \text{for} \quad \theta_{\text{beam}} \ll \pi \tag{2.5-22}$$

最后这个结果是光波衍射的精确表示，由此公式可知，在横向方向限制光束孔径半径为 ω_0 的光波在远场（$z \gg \pi\omega_0^2 n/\lambda$）处按式（2.5-22）发散（衍射）。

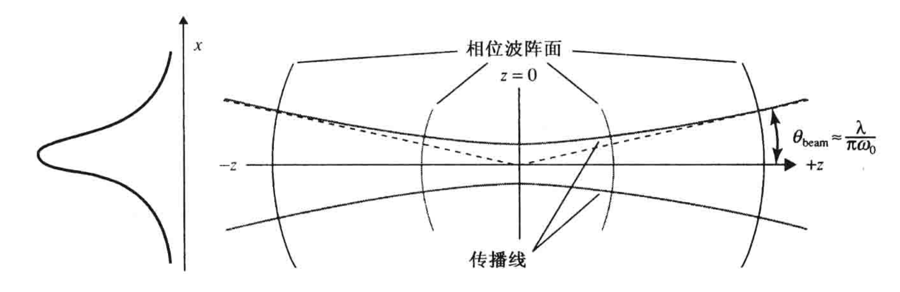


图 2.5　高斯光束的传播

例：高斯光束。

激光器的输出是高斯光束。设一个高斯光束的光斑大小在输出时的 ω_0 =1mm，波长 λ=1.06μm。根据方程式（2.5-10），参数 z_0 是

$$z_0 = \frac{\pi\omega_0^2 n}{\lambda} = \frac{\pi\omega_0^2}{\lambda} = 3\text{m}$$

假设最小的光斑 ω_0 在激光器的输出处.光斑大小在输出后 10m 处变为

$$\omega_{(z)} = \omega_0\left(1+\frac{z^2}{z_0^2}\right)^{1/2} = \omega_0\left[1+\left(\frac{\lambda_z}{\pi\omega_0^2}\right)^2\right]^{1/2} = 3.5\text{mm}$$

曲率半径为

$$R_{(z)} = \left(1+\frac{{z_0}^2}{z^2}\right) = z\left[1+\left(\frac{\pi\omega_0^2}{\lambda_z}\right)^2\right] = 10.9\text{m}$$

光束发散角为

$$\theta_{\text{beam}} = \arctan\left(\frac{\lambda}{\pi\omega_0}\right) \cong \frac{\lambda}{\pi\omega_0} = 0.00034\text{radian} = 0.02^\circ$$

2.6　在类透镜介质中的基模高斯光束——ABCD 定律

前一节是在各向同性介质中讨论高斯光束的解的。在这一节中，我们回到类透镜介质中讨论，这时 $g \neq 0$。P 和 q 遵循方程式（2.4-11），根据方程式（2.4-13）

$$\left(\frac{1}{q}\right)^2 + \left(\frac{1}{q}\right)' + g^2 = 0 \quad \text{and} \quad P' = -\frac{i}{q} \tag{2.6-1}$$

如果定义 u 为

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} \tag{2.6-2}$$

从式（2.6-1）中得到方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z^2} + g^2 u = 0 \tag{2.6-3}$$

通解可以写成

$$\begin{aligned} u(z) &= a\sin gz + b\cos gz \\ u'(z) &= ag\cos gz - bg\sin gz \end{aligned} \tag{2.6-4}$$

式中，a 和 b 是任意常量。

将方程式（2.6-4）带入式（2.6-2）解出输入值 q_0，我们得到光束的复曲率半径

$$q(z) = \frac{\cos(gz)q_0 + \sin(gz)/g}{-\sin(gz)gq_0 + \cos(gz)} \tag{2.6-5}$$

这是方程式（2.6-1）的解，它描述了光线在 z=0 时的复参数 $q(z)$。$q(z)$ 的物理意义可以通过方程式（2.4-11）得到。设一个包含 r 的 $\psi(r,z)$，方程式（2.4-11）可以写成

$$\psi \propto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr^2/2q(z)} \tag{2.6-6}$$

如果将 $q(z)$ 的实部和虚部定义为

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i\frac{\lambda}{\pi n\omega^2(z)} \tag{2.6-7}$$

得到

$$\psi \propto \exp\left(\frac{-r^2}{\omega^2(z)} - i\frac{kr^2}{2R(z)}\right) \tag{2.6-8}$$

$\omega(z)$ 是光斑大小，R 是曲率半径，这和由式（2.5-18）描述的均匀介质中的情况一样。在各向同性介质中，方程式（2.6-5）等价于式（2.5-4）。

高斯光束的变换——ABCD 定律

2.5 节已经导出了高斯光束通过一个表征一般类透镜介质中传播变换定律式（2.6-5）。对比方程式（2.6-5）和表 2.1（6）和方程式（2.3-14），高斯光束的复曲率半径可以表示为

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \tag{2.6-9}$$

式中 A，B，C，D 是表征同一介质的光线矩阵元，它将位于平面 2 处的光线（r，r'）与位于平面 1 处的光线连系起来。从而可直接得出结论：对于表 2-1 中列出的任何元件，光线无论是通过它传播或从它反射也都遵守式（2.6-9），因为这些元件都可以看成类透镜介质的特殊情形。对比方程式（2.6-3）和方程式（2.3-12），我们注意到参数 $r(z)$ 和 $u(z)$ 的功能是一样的定义于方程式（2.6-2）。方程式（2.6-9）是 bilinear 变换。对于类透镜介质，所有的矩阵元素都是实数。

对于焦距为 f 的薄透镜，用式（2.6-9）和表 2.1（2）可得

$$\frac{1}{q_2}=\frac{1}{q_1}-\frac{1}{f} \tag{2.6-10}$$

因而由式（2.6-7）得

$$\omega_2=\omega_1$$

$$\frac{1}{R_2}=\frac{1}{R_1}-\frac{1}{f} \tag{2.6-11}$$

如果将式中的 f 以 $R/2$ 代替，这些结果同样适用于在曲率半径为 R 的镜面上的反射。下面研究高斯光束穿过两个相邻的类透镜介质的传播。描述第一种介质的光线矩阵是（A_1, B_1, C_1, D_1），描述第二种介质的光线矩阵为（A_2, B_2, C_2, D_2）。入射光束参量取为 q_1，出射光束的参量取为 q_3，由式（2.6-9）得到在介质 1 出射处的光束参量为

$$q_2=\frac{A_1q_1+B_1}{C_1q_1+D_1}$$

而

$$q_3=\frac{A_2q_2+B_2}{C_2q_2+D_2}$$

联合上述两式即得

$$q_3=\frac{A_Tq_1+B_T}{C_Tq_1+D_T} \tag{2.6-12}$$

式中，（A_T, B_T, C_T, D_T）为将输出平面（3）与输入平面（1）相联系的光线矩阵元，即

$$\begin{bmatrix} A_T & B_T \\ C_T & D_T \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \tag{2.6-13}$$

由归纳法可已得出如下结论：式（2.6-9）适用于高斯光束通穿过任意数目（例如 n 个）类透镜介质或元件的传播。矩阵（A_T, B_T, C_T, D_T）是表征传播路径上各元件特性的 n 个光线矩阵的有序乘积。

ABCD 定律的最大作用是能够通过复杂的类透镜元件序列的高斯光束的参量 q（z），由式（2.6-7）可以求得在任一平面 z 处的光束半径 R（z）和光斑大小 $\omega(z)$。下面的例子可清楚地说明如何应用这个方法。

例：高斯光束的聚焦。

以高斯光束为例来解释 ABCD 定律的应用。我们考虑高斯光束射入一个焦距为 f 的薄透镜的情形，该光束的腰部正好在透镜中心，如图 2.6 所示。我们将求出出射光束腰部位置及在腰部的光束半径。

在输入平面 1 处 $\omega=\omega_{01}, R_1=\infty$，因而

$$\frac{1}{q_1}=\frac{1}{R_1}-i\frac{\lambda}{\pi\omega_{01}^2 n}=-i\frac{\lambda}{\pi\omega_{01}^2 n}\cong\frac{1}{iz_1}$$

相似地，在平面 2 处 $\omega=\omega_{02,}R_2=\infty$

$$\frac{1}{q_2}=\frac{1}{R_2}-i\frac{\lambda}{\pi{\omega_{02}}^2 n}=-i\frac{\lambda}{\pi{\omega_{02}}^2 n}\cong\frac{1}{iz_2}$$

两个参数通过 ABCD 定律

$$q_2=\frac{Aq_1+B}{Cq_1+D}$$

这里 ABCD 是如下矩阵

$$\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & d_2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1/f & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & d_1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

通过矩阵乘法得

$$A=1-\frac{d_2}{f},\quad B=d_1+d_2-\frac{d_1 d_2}{f}$$

$$C=-\frac{1}{f},\quad D=1-\frac{d_1}{f}$$

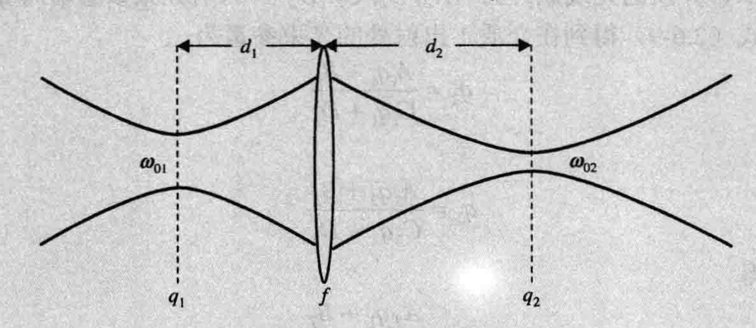


图 2.6　高斯光束的聚焦

使用变换方程，有

$$iz_2=\frac{Aiz_1+B}{Ciz_2+D}=\frac{(Aiz_1+B)(-izC+D)}{C^2z_1^2+D^2}=\frac{ACz_1^2+BD+iz_1}{C^2z_1^2+D^2}$$

当 AD−BC=1 时，由于 A, B, C, D, z_1，z_2 都是实矩阵，所以得到

$$ACz_1^2+BD=0 \tag{2.6-14}$$

和

$$z_2=\frac{z_1}{C^2z_1^2+D^2} \tag{2.6-15}$$

使用 $AD-BC=1$，在以上两个方程中约去 z_1 得

$$z_2=\frac{A}{D}z_1=\frac{d_2-f}{d_1-f}z_1$$

或者表示为

$$\omega_{02}^2=\frac{d_2-f}{d_1-f}\omega_{01}^2 \tag{2.6-16}$$

输出光束的束腰可以通过方程（2.6-14）得到

$$z_1^2 = -\frac{BD}{AC} = \frac{(d_1 - f)(d_1 f + d_2 f - d_1 d_2)}{d_2 - f}$$

或者写成

$$(d_2 - f) = \frac{f^2}{z_1^2 + (d_1 - f)^2}(d_1 - f) \tag{2.6-17}$$

最小的光斑可以通过方程（2.6-16）和式（2.6-17）写成

$$\omega_{02}^2 = \frac{f^2}{z_1^2 + (d_1 - f)^2}\omega_{01}^2 \tag{2.6-18}$$

最后两个表达式是光束腰的位置和光斑大小。

现在讨论一些限制条件。

（a）对于一个点光源，z_1 接近于 0 的时候，图像的位置根据方程式（2.6-17）给出

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f} \tag{2.6-19}$$

类似于透镜方程。

（b）对于一个光斑无限大的输入高斯光束（平面波的 z_1 接近于无穷大），则输出光束腰的位置在焦点（ $d_2 = f$ ）处。

（c）当输入高斯光束的腰在前焦点（ $d_1 = f$ ）处，输出光束的腰在焦点（ $d_2 = f$ ）处，输出光束的光斑大小和入射光束光斑大小的关系如下

$$z_1 z_2 = f^2 \tag{2.6-20}$$

或者

$$\omega_{01}^2 \omega_{02}^2 = \frac{\lambda^2}{\pi^2 n^2} f^2 \tag{2.6-21}$$

（d）在高斯光束的束腰位于透镜（ $d_1 = 0$ ）处，输出光束的束腰和位置由下式决定

$$d_2 = \frac{f}{1 + (f/\pi\omega_{01}^2 n/\lambda)^2} = \frac{f}{1 + (f/z_1)^2} \tag{2.6-22}$$

和

$$\frac{\omega_{02}}{\omega_{01}} = \frac{f\lambda/\pi\omega_{01}^2 n}{\sqrt{1 + (f\lambda/\pi\omega_{01}^2 n)^2}} = \frac{f/z_1}{\sqrt{1 + (f/z_1)^2}} \tag{2.6-23}$$

共焦光线参数是

$$z_1 \equiv \frac{\pi\omega_{01}^2 n}{\lambda}$$

式（2.5-14）可知其含义是光束光斑大小增大 $\sqrt{2}$ 倍时离开输入光束腰部的距离，因此可以方便地用它作为入射光束发散度的一种度量，z_1 越小，汇聚性就越“强”。

根据方程式（2.6-11），光束通过一个薄透镜，它的曲率半径减少 $1/f$ ，而光斑尺寸保持不变。应用方程式（2.6-8），输入–输出关系可以写成

$$E_{\text{out}}(x, y) = E_{\text{in}}(x, y)\exp\left(+i\frac{kr^2}{2f}\right) = E_{\text{in}}(x, y)\exp\left(+i\frac{k(x^2+y^2)}{2f}\right) \quad (2.6\text{-}24)$$

式中 f 是薄透镜的焦距，$k = 2\pi n/\lambda$。

2.7　在透镜波导中的高斯光束

ABCD 定律应用的另一个例子是研究高斯光束通过如图 2.2 所示的薄透镜序列的传播。把 s=N 平面中的光线与 s=0 平面联系起来的矩阵为

$$\begin{bmatrix} A_T & B_T \\ C_T & D_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^N \quad (2.7\text{-}1)$$

式中，（A，B，C，D）是通过一个双透镜基本单元（$\Delta s = 1$）的光线传播矩阵，由式（2.1-6）表示。对于行列式值为 1（幺模的行列式）的矩阵的第 N 次幂可用著名公式求出

$$\begin{aligned} A_T &= \frac{A\sin(N\theta) - \sin[(N-1)\theta]}{\sin\theta} \\ B_T &= \frac{B\sin(N\theta)}{\sin\theta} \\ C_T &= \frac{C\sin(N\theta)}{\sin\theta} \\ D_T &= \frac{D\sin(N\theta) - \sin[(N-1)\theta]}{\sin\theta} \end{aligned} \quad (2.7\text{-}2)$$

式中

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(A+D) = \left(1 - \frac{d}{f_2} - \frac{d}{f_1} + \frac{d^2}{2f_1f_2}\right) \quad (2.7\text{-}3)$$

再将式（2.7-2）代入式（2.6-9）中，得

$$q_N = \frac{\{A\sin(N\theta) - \sin[(N-1)\theta]\}q_0 + B\sin(N\theta)}{C\sin(N\theta)q_0 + D\sin(N\theta) - \sin[(N-1)\theta]} \quad (2.7\text{-}4)$$

下面考察 N 趋向无穷大时，q_N 的行为，对于 $|\cos\theta| > 1$ 时，方程右边的正弦函数就会成为指数增长函数，这导致右边取极值，可以证明这个极值是实数（见习题 2.7）。具有实参数 q 的高斯光束是无约束光束。当 $|\cos\theta| \leqslant 1$ 时，方程右边保持以 N 为函数振荡。具有实常数的双线性变换仍然保持约束光束。当 $|\cos\theta| \leqslant 1$ 时光线可以被约束传播，或者写成

$$0 \leqslant \left(1 - \frac{d}{2f_1}\right)\left(1 - \frac{d}{2f_2}\right) \leqslant 1 \quad (2.7\text{-}5)$$

这一结果与式（2.1-16）的稳定光线传播条件相同。

2.8　在均匀介质中的高斯光束高阶模

在上述处理中，认为高斯模的场仅于沿轴向 z 及轴距离 r 有关。若不要求满足 $\frac{\partial}{\partial\phi} = 0$ 的

条件式中 ϕ 是圆柱坐标系（r，ϕ，z）中的方位角且取 $g=0$，那么波动方程式（2.4-4）有如下形式的解

$$
\begin{aligned}
E_{l,m}(x,y,z) &= E_0\frac{\omega_0}{\omega(z)}H_l\left(\sqrt{2}\frac{x}{\omega(z)}\right)H_m\left(\sqrt{2}\frac{y}{\omega(z)}\right)\times\exp\left(-ik\frac{x^2+y^2}{2q(z)}-ikz+i(l+m+1)\eta\right)\\
&= E_0\frac{\omega_0}{\omega(z)}H_l\left(\sqrt{2}\frac{x}{\omega(z)}\right)H_m\left(\sqrt{2}\frac{y}{\omega(z)}\right)\times\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{\omega^2(z)}-ik\frac{x^2+y^2}{2R(z)}-ikz+i(l+m+1)\eta\right)
\end{aligned}
\tag{2.8-1}
$$

式中，H_l 为 l 阶厄米多项式，$\omega(z)$，$R(z)$，$q(z)$ 和 η 的由式（2.5-14）～（2.5-17）给出。

为了以后参考，写出在轴上的相移表达式

$$
\begin{aligned}
\theta &= kz-(l+m+1)\arctan\left(\frac{z}{z_0}\right)\\
z_0 &= \frac{\pi\omega_0^2 n}{\lambda}
\end{aligned}
\tag{2.8-2}
$$

电场沿 x（或 y）的横向变化可看出呈 $H_l(\xi)\exp(-\xi^2/2)$ 的形式，式中 $\xi=\sqrt{2}x/\omega$。这个函数曾经被深入地研讨过，因为它在量子力学中也代表简谐振子[13]的波函数 $u_l(\xi)$ [2]。厄米–高斯光束遵循如下正交规律

$$
\iint E^*_{l_1m_1}(x,y,z)\,E_{l_2m_2}(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\delta_{(l_1m_1)(l_2m_2)}
\tag{2.8-3}
$$

这些厄米–高斯公式可以被用于任意近轴光束 $E(x,y,z)$

$$
E(x,y,z)=\sum_l\sum_m c_{lm}E_{l,m}(x,y,z)
\tag{2.8-4}
$$

c_{lm} 是可以通过正交关系得到的一个常量。

另一种在柱坐标下描述近轴波方程，即拉盖尔-高斯光束

$$
\begin{aligned}
E_{p,m}(r,\phi,z) &= E_0\frac{\omega_0}{\omega(z)}\left(\frac{\sqrt{2}r}{\omega(z)}\right)^{|m|}L_p^{|m|}\left(\frac{2r^2}{\omega^2(z)}\right)\exp\left[-ik\frac{r^2}{2q(z)}-ikz+im\phi+i(2p+|m|+1)\eta\right]\\
&= E_0\frac{\omega_0}{\omega(z)}\left(\frac{\sqrt{2}r}{\omega(z)}\right)^{|m|}L_p^{|m|}\left(\frac{2r^2}{\omega^2(z)}\right)\exp\left[-\frac{r^2}{\omega^2(z)}-ik\frac{r^2}{2R(z)}-ikz+im\phi+i(2p+|m|+1)\eta\right]
\end{aligned}
\tag{2.8-5}
$$

式中，L_p^m 是缔合拉盖尔多项式。在上面的解中，$p\geqslant0$ 是径向指数，整数 m 是方位指数。拉盖尔-高斯光束彼此正交，对处理对称柱坐标中的问题比较方便。作为对称柱坐标系的一种结果，具有 $\exp(\pm im\phi)$ 拉盖尔-高斯模的径向变量相同。按照式（2.8-5）拉盖尔-高斯模的光强模式是柱对称的（即与 ϕ 无关）。也同时注意到，拉盖尔-高斯（p=0，m=0）基模和厄米-高斯光束（l=0，m=0）基模是相同的。

图 2.7 是一些低阶高斯光束模的光束功率。图 2.8 是低阶高斯光束模光强的照片。注意四个低阶模图像与图 2.7 中 $|u_l(\xi)|^2$（$l=0,1,2,3$）的对应关系。

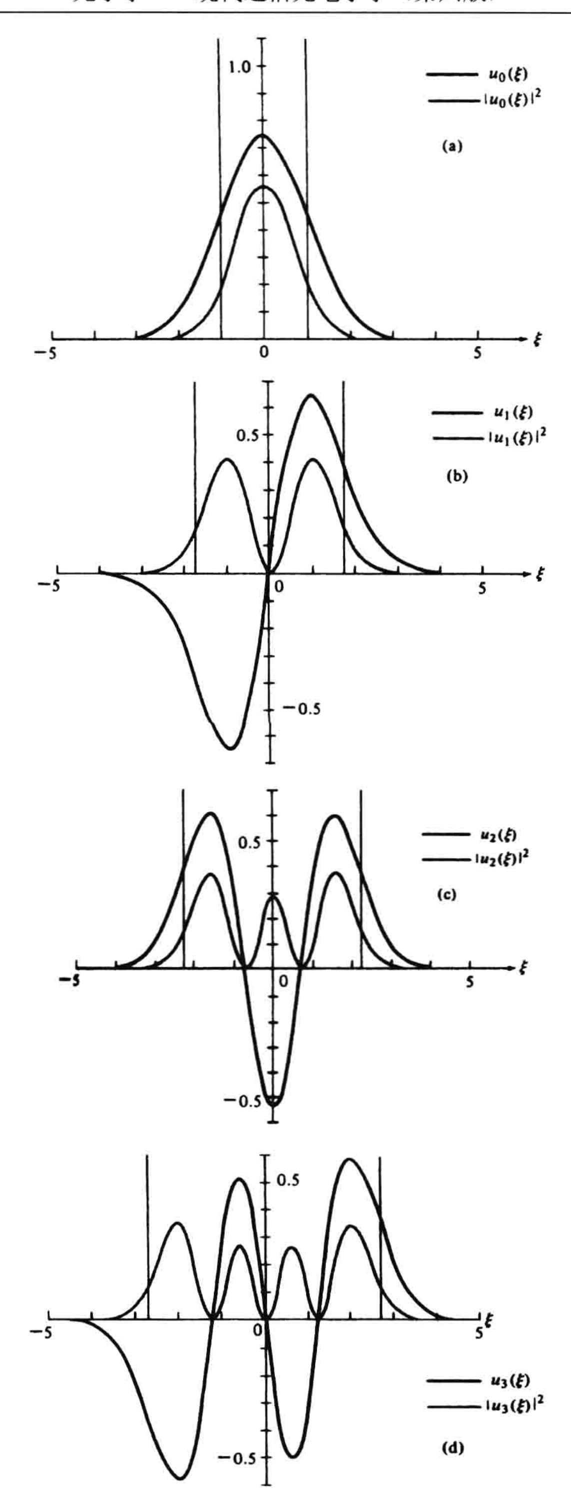


图 2.7　与较高阶光束解［方程式（2.8-1）］相应的厄米-高斯函数 $u_l(\xi)=(\pi^{1/2}l!2^l)^{-1/2}H_l(\xi)e^{-\xi^2/2}$。图中各曲线是归一化的，也就是说所有模式的总光束功率都相同（$\int_{-\infty}^{+\infty}u_l^2(\xi)d\xi=1$）。实线代表函数 $u_l(\xi)$，虚线代表 $u_l^2(\xi)$，其中 l=0，1，2，3，以及 10

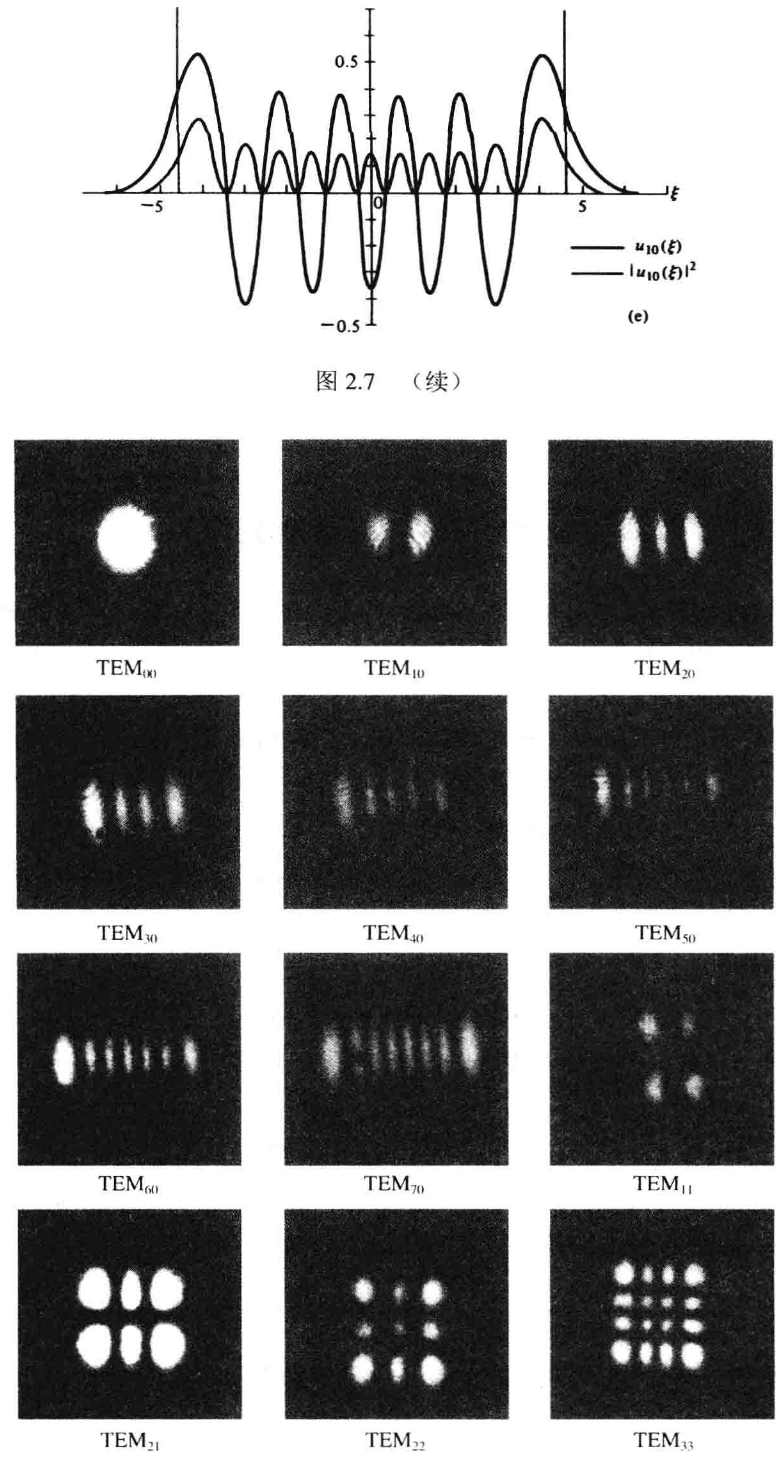


图 2.7　（续）

图 2.8　一些低阶高斯光束模的光强度照片

以下是一些厄米多项式和缔合拉盖尔多项式，这些多项式可供参考。

$$H_0(x)=1$$
$$H_1(x)=2x$$
$$H_2(x)=4x^2-2$$
$$H_3(x)=8x^3-12x$$
$$H_4(x)=16x^4-48x^2+12$$
$$L_0^m(x)=1$$
$$L_1^m(x)=-x+(m+1)$$
$$L_2^m(x)=\frac{1}{2}[x^2-2(m+2)x+(m+1)(m+2)]$$
$$L_3^m(x)=\frac{1}{6}[-x^3+3(m+3)x^2-3(m+2)(m+3)x+(m+1)(m+2)(m+3)]$$

2.9　在平方律折射率变化的介质中的高斯光束

在 2.6 节里我们处理了圆对称高斯光束在类透镜介质中的传播。由于高斯光束在各向同性介质中的解不是在类透镜介质中的解，用方程式（2.6-1）使高斯光束的复参数 q 像 z 参数一样变化。这样，按照式（2.6-4）均匀介质中高斯光束的复参数 q 将是 z 的函数。

这里描述一种不一样的情况。在这种情况下，直接得到类透镜介质中高斯光束的解。换句话说，我们将寻找类透镜介质中的传导模，这种介质的折射率可以描述为

$$n^2(r)=n_0^2(1-g^2r^2)\qquad r^2=x^2+y^2 \tag{2.9-1}$$

式中，n_0 是光对称轴处的折射率，g 是常量。对于传导模，当模在介质中传播时，横向场分布保持不变，复光束参数是常量。

矢量波动方程式（2.4-4）采取下列形式

$$\nabla^2\boldsymbol{E}+k^2(1-g^2r^2)\boldsymbol{E}=0 \tag{2.9-2}$$

式中，$k=n_0\omega/c$ 是波数。考虑到上述最后一个方程中电场的某些标量分量，并假定解的形式为

$$E(x,y)=\psi(x,y)\exp(-i\beta z) \tag{2.9-3}$$

式中，β 是传播常量。考察折射率分布和波动方程，我们注意到，此时波动方程是可分离变量的。令 $\psi(x,y)=U(x)V(y)$，波动方程式（2.9-2）成为

$$\frac{1}{U}\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{1}{V}\frac{\partial^2V}{\partial y^2}+k^2-k^2g^2(x^2+y^2)-\beta^2=0 \tag{2.9-4}$$

式中，U 和 V 是一维函数。因为式（2.9-4）是由仅依赖于 y 和仅依赖于 x 的两部分组成的，于是得到

$$\frac{1}{U}\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+(k^2-\beta^2-k^2g^2x^2)=C \tag{2.9-5}$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - k^2 g^2 y^2 = -C \tag{2.9-6}$$

式中，C 为常数。注意到微分方程式（2.9-2）分成两个。每个方程可以分别求解。由下式定义一个新变量ξ

$$\xi = \alpha y, \quad \alpha \equiv \sqrt{gk} \tag{2.9-7}$$

式（2.9-6）变成

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}\xi^2} + \left(\frac{C}{\alpha^2} - \xi^2\right)V = 0 \tag{2.9-8}$$

上式是一个著名的微分方程，它与简谐振子的薛定谔方程一样[2]。它的解与对应的本征值分别是

$$\frac{C}{\alpha^2} = (2m+1), \quad m = 1, 2, 3, \cdots \tag{2.9-9}$$

$$V_m(\xi) = H_m(\xi)\mathrm{e}^{-\xi^2/2} \tag{2.9-10}$$

式中，H_m 是 m 阶厄米多项式。

现在对式（2.9-5）重复相同的步骤，用$\xi = \alpha x$代入方程得

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + [\frac{k^2 - \beta^2 - C}{\alpha^2} - \xi^2]U = 0$$

方程的本征值与本征函数为

$$\frac{k^2 - \beta^2 - C}{\alpha^2} = (2l+1), \quad l = 1, 2, 3, \cdots \tag{2.9-11}$$

和

$$U_l(\xi) = H_l(\xi)\mathrm{e}^{-\xi^2/2} \tag{2.9-12}$$

于是ψ总的解是

$$\psi(x, y) = H_l\left(\frac{\sqrt{2}x}{\omega_0}\right)H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{\omega_0}\right)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/\omega_0^2}$$

式中，“光斑大小” ω_0 的定义，按照式（2.9-7），有

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{gk}} = \sqrt{\frac{\lambda}{g n_0 \pi}} \tag{2.9-13}$$

光束尺寸同样可以直接从式（2.4-13）中令 $q' = 0$ 得到。换句话说，传导模的复光束参数是一个常量，其大小为 $q = i/g$ 。

于是总（复数）电场是

$$\begin{aligned} E_{l,m}(x, y, z) &= \psi_{l,m}(x, y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_{l,m}z} \\ &= E_0 H_l\left(\sqrt{2}\frac{x}{\omega_0}\right)H_m\left(\sqrt{2}\frac{y}{\omega_0}\right)\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{\omega_0^2}\right)\exp(-i\beta_{l,m}z) \end{aligned} \tag{2.9-14}$$

式中， E_0 是常量。第 l，m 阶模的传播常数 $\beta_{l,m}$ ，可由式（2.9-9）和式（2.9-11）得到

$$\beta_{l,m} = k\left(1 - \frac{2}{k}g(l+m+1)\right)^{1/2} \tag{2.9-15}$$

值得指出的是，上列高阶模的解具有两个特点：（1）与均匀介质的解（g=0）不同，模的“光斑大小”ω与 z 无关，这一点可由折射率的变化（g>0）产生的聚焦作用来解释，它补偿了局限的光束衍射（扩展）的自然倾向。至于折射率随 r 增加（g<0）的情形，从式（2.9-13）和式（2.9-14）可知$\omega^2<0$，所以根本不存在局限解。在这种情形下的折射率分布产生的散焦作用，将导致光束的衍射加强。（2）β 对模指数 l，m 的依赖会导致不同的模有不同的相速度$v_{l,m}=\omega/\beta_{l,m}$，以及不同的群速度$(v_g)_{l,m}=\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}\beta_{l,m}$。

让我们考虑 l，m 模的群速度的模间色散，即群速度与 l，m 的关系

$$(v_g)_{l,m}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\beta_{l,m}} \tag{2.9-16}$$

如果介质折射率的变化很小，以至于

$$\frac{1}{k}g(l+m+1)\ll 1 \tag{2.9-17}$$

可将式（2.9-15）近似地写成

$$\beta_{l,m}\cong k-g(l+m+1)-\frac{g^2}{2k}(l+m+1)^2 \tag{2.9-18}$$

根据式（2.9-16）有

$$(v_g)_{l,m}=\frac{c/n_0}{\left(1+\dfrac{g^2}{2k^2}(l+m+1)^2\right)} \tag{2.9-19}$$

在第 1 章中已经证明，光脉冲以群速度v_g传播。下一章中将讨论以群速度运动的光脉冲在类透镜介质中的传输，同时也将研究群速度色散（$\dfrac{\mathrm{d}v_g}{\mathrm{d}\omega}\neq 0$）对脉冲展宽的影响。

平方律折射率玻璃光导纤维中脉冲的展宽

具有平方律折射率分布式（2.9-1）的玻璃光导纤维是极佳的光学通信系统的波道。在数字光纤通信中，因为需要将信息编码在光脉冲序列上，所以波道的信息容量基本上受单位时间内能传送的脉冲数目的限制。

群速度色散从两方面限制了平方律折射率波道中光脉冲的重复频率。

1. 模间色散

如果光脉冲耦合进入光导纤维的输入端后激发了大量的模式（这种情形相当于输入光被强聚焦，以致光线对着一个大角度），那么每一个模将以式（2.9-19）给出的各自不同的群速度$(v_g)_{l,m}$传播。如果从（0，0）到（$l_{\max}$，$m_{\max}$）中的所有模都被激发了，在 z=L 处的输出脉冲会增宽到

$$\Delta\tau\cong L\left(\frac{1}{(v_g)_{l_{\max},m_{\max}}}-\frac{1}{(v_g)_{0,0}}\right) \tag{2.9-20}$$

可利用式（2.9-19）得到

$$\Delta\tau\cong\frac{n_0g^2L}{2ck^2}[(l_{\max}+m_{\max}+1)^2-1] \tag{2.9-21}$$

所以，每秒钟所能传送的与相邻输出脉冲没有严重重叠的最大脉冲数目为 $f_{\max} \sim 1/\Delta\tau$ 。因此，高码速的数据传输必需采用单模激发方式，这可应用相干单模激光源来实现。

例：考虑一条长达 1km 的平方律折射率光导纤维，$n_0=1.5$，$g^2=3.4\times10^3\text{cm}^{-2}$ 。设波长λ =1μm 的输入光脉冲激发的模式最高达 $l_{\max}=m_{\max}=30$ ，代入式（2.9-21）得到

$$\Delta\tau = 3.6\times10^{-9}\text{s}$$

以及 $f_{\max} \sim (\Delta\tau)^{-1}=2.8\times10^8/\text{s}$，此即可允许的最大脉冲重复率。

2. 群速度色散

如果在光导纤维中只激发单模（l，m），那么式（2.9-21）所示的脉冲展宽就能得以避免，在这种情形下脉冲还是会因 $(v_g)_{l,m}$ 对频率的依赖关系而扩展。这种扩展可以解释如下，具有光谱宽度为 $\Delta\omega$ 的脉冲在距离 L 内的扩展为

$$\Delta\tau = \Delta\left(\frac{L}{v_g}\right) \approx L\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{1}{v_g}\right)\right|\Delta\omega = \frac{L}{v_g^2}\left|\frac{\mathrm{d}v_g}{\mathrm{d}\omega}\right|\Delta\omega \tag{2.9-22}$$

如果光脉冲的光谱宽度与脉冲宽度τ的关系是 $\Delta\omega \sim 2/\tau$ ，则式（2.9-22）变成

$$\Delta\tau \approx \frac{2\pi L}{v_g^2\tau}\left|\frac{\mathrm{d}v_g}{\mathrm{d}\omega}\right| \tag{2.9-23}$$

如果光源线宽 $\Delta\omega$ 超过 $2\pi/\tau$ ，则需要将方程式（2.9-22）中的 $\Delta\omega$ 用实际线宽 $\Delta\omega_s$ 代替。这个问题的严格处理将在第 7 章中进行。

当 $g(l+m+1) \ll k$ 时，我们可以忽略方程（2.9-18）的第二部分，有

$$\beta_{l,m} \cong k - g(l+m+1) \tag{2.9-24}$$

注意到模的传播常量在间隔为 g 的空间中相等。这很容易证明，多模光波导中具有相同空间传播常数的各种不同模式的场分布将周期重复，也即

$$E(x, y, z + 2\pi/g) = E(x, y, z) \tag{2.9-25}$$

这是在类透镜介质中周期性的解。

2.10　光波在二次型增益分布介质中的传播

在许多激光介质中，增益与位置很有关系。增益的这种变化可能由于各种因素所引起，这些因素包括：（1）在气体激光器的等离子体区中高能电子的径向分布；（2）在固体激光器中泵浦强度的变化；及（3）增益饱和度与光束中径向位置有关。

现考虑具有二次型增益（或损耗）的变化的光学介质，取式（2.4-5）中的复数传播常数 $k(r)$ 为

$$k(r) = k \pm i(\alpha_0 - \tfrac{1}{2}\alpha_2 r^2) \tag{2.10-1}$$

式中，α_0 和 α_2 是常量。正（负）号用于增益(或损耗）情况。在式（2.4-6）中假设 $g^2r^2 \ll 1$ 。即如果 $g^2 = i\alpha_2/k$ ，式（2.10-1）可以从式（2.4-6）中得到。值代入式（2.4-13）可求得复光束半径的稳态（ $(1/q)'=0$ ）解

$$\frac{1}{q} = -ig = -i\sqrt{\frac{i\alpha_2}{k}} \tag{2.10-2}$$

由式（2.6-5）和式（2.10-2）可得稳态光束半径和光斑大小为

$$\omega_0^2 = 2\sqrt{\frac{\lambda}{\pi n \alpha_2}}$$
$$R = 2\sqrt{\frac{\pi n}{\lambda \alpha_2}} \tag{2.10-3}$$

式中，n 是折射率的实部。由此求得了相应于光斑大小恒定但曲率半径有限的相位波阵面的稳态解。在二次型增益变化的介质中，高斯光束的一般（非稳态）行为由式（2.6-5）描述，其中 $g^2 = i\alpha_2 / k$ 。

实验数据指出光斑大小随增益参量 α_2 的增加而减小，这与式（2.10-3）一致。实验结果如图 2.9 所示。

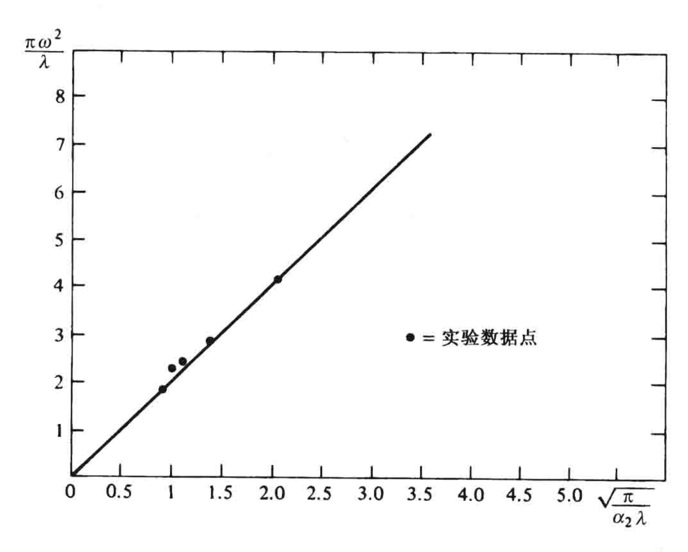


图 2.9　描述光束半径与二次型增益常数 α_2 之间关系的理论曲线。实验点是在辐射波长为氙 3.39μm 激光器中得到的，通过控制非饱和激光增益来改变 α_2（引自参考文献[11]）

2.11　椭圆高斯光束

直到现在为止，所研究的光束解都有一个共同的特性。由式（2.5-18）给出的电场按照下列规律衰减

$$E_{l,m} \propto \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\omega^2(z)}\right) \tag{2.11-1}$$

因而电场下降到其轴上值的 e^{-1} 倍的点在 xy 平面中的轨迹是一个以 $\omega(z)$ 为半径的圆，将这种光束称之为圆高斯光束。

波动方程式（2.4-9）还允许在 x 和 y 方向的变化表征为

$$E_{l,m} \propto \exp\left(-\frac{x^2}{\omega_x^2(z)} - \frac{y^2}{\omega_y^2(z)}\right) \tag{2.11-2}$$

的解，并且 $\omega_x \neq \omega_y$。这样的光束称为椭圆高斯光束。当一个圆高斯光束通过柱面透镜时就变成椭圆高斯光束；或者，另一个例子是，由像散共振腔发射出的激光束，这种共振腔的一个反射镜在 zy 和 zx 平面中有不同的曲率半径。

现在不去重复这种情况下的全部推导而只指出一些主要的步骤。代替式（2.4-11），假设波动方程的一个解为

$$\psi = \exp\left[-i\left(P(z) + \frac{k}{2q_x(z)}x^2 + \frac{k}{2q_y(z)}y^2\right)\right] \tag{2.11-3}$$

式中，q_x 和 q_y 是复高斯光束参数。我们将式（2.4-6）推广并假设一个发散的平方折射率介质的折射率分布具有以下形式

$$n^2(x, y) = n_0^2(1 - g_x^2 x^2 - g_y^2 y^2)$$

式中，g_x 和 g_y 是常数。

利用式（2.11-3）和 2.4 节中的方法，可得如下结果

$$\left(\frac{1}{q_x}\right)^2 + \left(\frac{1}{q_x}\right)' + g_x^2 = 0, \qquad \left(\frac{1}{q_y}\right)^2 + \left(\frac{1}{q_y}\right)' + g_y^2 = 0 \tag{2.11-4}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\frac{i}{2}\left(\frac{1}{q_x} + \frac{1}{q_y}\right) \tag{2.11-5}$$

对于均匀（$g_x = g_y = 0$）光束的情形，可得像式（2.5-6）那样的方程

$$q_x(z) = z + C_x \tag{2.11-6}$$

式中，C_x 是一个任意积分常数。发现将 C_x 写成如下形式是有用的

$$C_x = -z_x + q_{0x} \tag{2.11-7}$$

式中，z_x 是实数，q_{0x} 是虚数。从下面的讨论中会清楚了解这两个常数的物理意义。将 x 换成 y，对于 $q_y(z)$ 可得到类似的结果。将 $q_x(z)$和$q_y(z)$ 的解代入式（2.11-5）可得

$$P = -\frac{i}{2}[\ln(1 + \frac{z - z_x}{q_{0x}}) + \ln(1 + \frac{z - z_y}{q_{0y}})]$$

按照式（2.5-6）到式（2.5-18）的推导，可直接得到

$$\begin{aligned} E(x, y, z) &= E_0 \frac{\sqrt{\omega_{0x}\omega_{0y}}}{\sqrt{\omega_x(z)\omega_y(z)}} \exp\left(-i[kz - \eta(z)] - \frac{ikx^2}{2q_x(z)} - \frac{iky^2}{2q_y(z)}\right) \\ &= E_0 \frac{\sqrt{\omega_{0x}\omega_{0y}}}{\sqrt{\omega_x(z)\omega_y(z)}} \exp\left[-i[kz - \eta(z)] - x^2\left(\frac{1}{\omega_x^2(z)} + \frac{ik}{2R_x(z)}\right) - y^2\left(\frac{1}{\omega_y^2(z)} + \frac{ik}{2R_y(z)}\right)\right] \end{aligned} \tag{2.11-8}$$

式中，

$$q_{0x} = i\frac{\pi\omega_{0x}^2 n}{\lambda}$$

$$\omega_x^2(z) = \omega_{0x}^2\left[1 + \left(\frac{\lambda(z - z_x)}{\pi\omega_{0x}^2 n}\right)^2\right] \tag{2.11-9}$$

$$R_x(z) = (z - z_x)\left[1 + \left(\frac{\pi\omega_{0x}^2 n}{\lambda(z - z_x)}\right)^2\right]$$

式中，$n = n_0$ 是介质的折射率。将 x 用 y 代替可得到 q_{0y}，ω_y 和 R_y 的类似表达式。

式（2.11-8）中的相位延迟 $\eta(z)$ 现在由下式给出

$$\eta(z) = \tfrac{1}{2}\arctan\left(\frac{\lambda(z - z_x)}{\pi\omega_{0x}^2 n}\right) + \tfrac{1}{2}\arctan\left(\frac{\lambda(z - z_y)}{\pi\omega_{0y}^2 n}\right) \tag{2.11-10}$$

上述结果表明，对于圆高斯光束导出的全部结果可分别应用于描述椭圆高斯光束在 xz 和 yz 平面的的行为。为了便于进行分析，可认为椭圆光束是两个独立的“光束”。对于这两个光束来说，腰部位置（z=0）不一定相同。在图 2.10 所示的例子中，xz 光束的腰部位置在 $z = z_x$ 处，yz 光束的腰部位置在 $z = z_y$ 处，其中 z_x 和 z_y 为任意值。

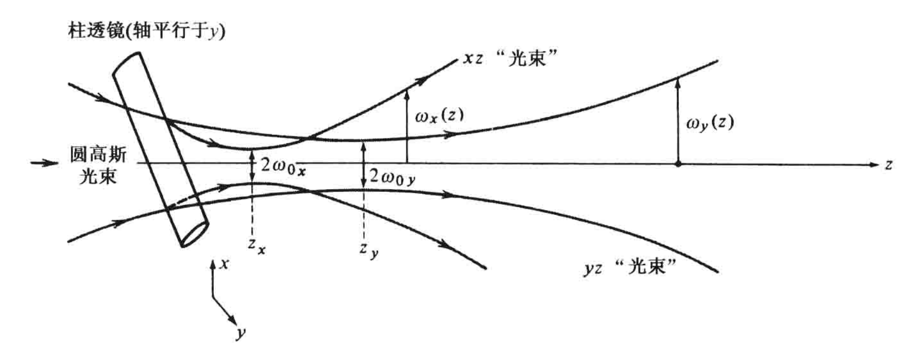


图 2.10　将圆高斯光束经柱透镜聚焦后产生椭圆高斯光束的示意图

由式（2.11-4）和式（2.4-11）之间的类似性，还可得出下列结论：ABCD 变换定律式（2.6-9）可以分别适用于 $q_x(z)$ 和 $q_y(z)$。根据式（2.11-8），它们由下式给出

$$\frac{1}{q_x(z)} = \frac{1}{R_x(z)} - i\frac{\lambda}{\pi n\omega_x^2(z)}$$
$$\frac{1}{q_y(z)} = \frac{1}{R_y(z)} - i\frac{\lambda}{\pi n\omega_y^2(z)} \tag{2.11-11}$$

在二次型类透镜介质中的椭圆高斯光束

现在研究稳态椭圆光束在折射率为

$$n^2(x, y) = n_0^2(1 - g_x^2 x^2 - g_y^2 y^2) \tag{2.11-12}$$

的介质中的传播。

按照 2.9 节所给的相同的推导步骤可得

$$E_{l,m}(r)=E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_{l,m}z}H_l\left(\sqrt{2}\frac{x}{\omega_x}\right)H_m\left(\sqrt{2}\frac{y}{\omega_y}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{\omega_x^2}-\frac{y^2}{\omega_y^2}\right) \tag{2.11-13}$$

式中，E_0 是常量，以及

$$\omega_x=\sqrt{\frac{2}{g_xk}}=\sqrt{\frac{\lambda}{g_xn_0\pi}},\quad \omega_y=\sqrt{\frac{2}{g_yk}}=\sqrt{\frac{\lambda}{g_yn_0\pi}} \tag{2.11-14}$$

$$\beta_{l,m}=k\left\{1-\frac{2}{k}\left[g_x\left(l+\frac{1}{2}\right)+g_y\left(m+\frac{1}{2}\right)\right]\right\}^{1/2},\quad m,l=0,1,2,3,\cdots \tag{2.11-15}$$

光束在 yz 和 xz 平面上的光斑大小和曲率半径都不相同，如均匀介质式（2.11-12）的情形一样。不过光束的参量与 z 无关。

实验上观测到，条状砷化镓（GaAs）结激光器的输出呈椭圆高斯光束，图 2.11 给出了实验上的某些（0，m）模式的近场和远场光强分布图。

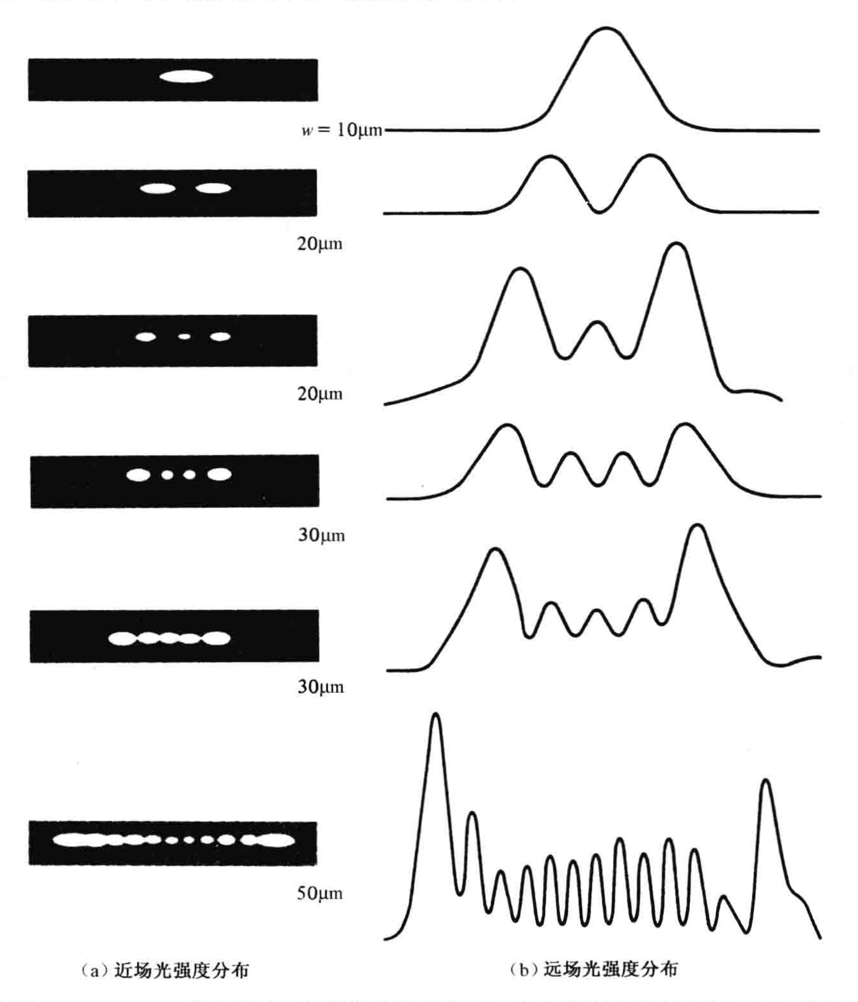


图 2.11　条状结构 GaAs-GaAlAs 激光器输出的近场光强度分布（a）和远场光强度分布（b）（引自参考文献[12]）

2.12　光线传播和衍射积分

在前几章中，讨论了光线和高斯光束在各向同性介质中的传播，这些传播可以简单的通过 ABCD 定律描述出来。现在考虑在有限的尺度上的光线传播。首先描述将光束分解许多平面波的叠加。利用波动方程的线性性，所有的光波都可以用平面波的线性组合表示，这样波的传播可以用这些平面波成分的传播来描述。这可引出波传播的积分表示，这就是菲涅耳-基尔霍夫衍射积分。在这一节的最后我们将看到 ABCD 定律在类透镜介质中也适用于菲涅耳-基尔霍夫积分。

参考图 2.12，考虑一个沿 z 轴的光束。E（x，y）是振幅。振幅可以用平面波的傅里叶变换写出

$$E(x, y) = \iint A(k_x, k_y)\exp(-ik_x x - ik_y y)\,\mathrm{d}k_x\,\mathrm{d}k_y \quad (z = 0) \tag{2.12-1}$$

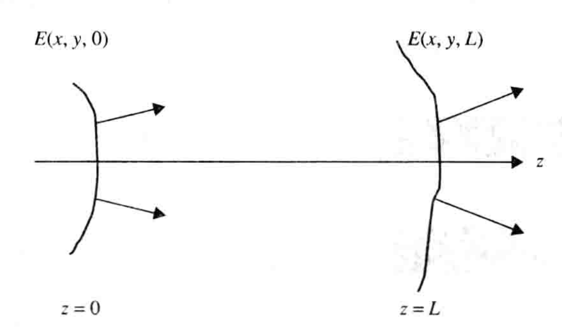


图 2.12　从 z=0 到 z=L 传播的光束

$A(k_x,k_y)$ 是 (k_x,k_y) 平面波的振幅。假定光束沿 z 轴传播，$A(k_x,k_y)$ 在 (k_x,k_y) 平面在（0，0）的附近。$A(k_x,k_y)$ 是 E（x，y）的傅里叶变换.振幅在 z>0 的时候可以写成

$$E(x, y, z) = \iint A(k_x, k_y)\exp(-ik_x x - ik_y y)\exp(-ik_z z)\,\mathrm{d}k_x\,\mathrm{d}k_y \tag{2.12-2}$$

k_z 是波矢量的 z 参数。这个方程可以看做一组平面波元素的线性相加。波矢量必须满足

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{\omega}{c}n\right)^2 \equiv k^2 \tag{2.12-3}$$

n 是介质折射率，ω 是角频率，k 是在介质中的波数。对于一个近轴光束，$A(k_x,k_y)$ 的傅里叶变换仅在以下条件成立时有意义

$$k_x, k_y \ll k \tag{2.12-4}$$

在这种情况下，z 参数 k_z 可以被写成

$$k_z = k - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k} \tag{2.12-5}$$

将方程式（2.12-5）代入方程式（2.12-2），得到

$$E(x, y, z) = \iint A(k_x, k_y)\, \mathrm{e}^{-ikz+i[(k_x^2+k_y^2)/2k]z} \exp(-ik_x x - ik_y y)\, \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y \tag{2.12-6}$$

对比方程式（2.12-1），注意到傅里叶变换 E（x, y, z）可以被写成

$$A'(k_x, k_y) = H(k_x, k_y)A(k_x, k_y) = \mathrm{e}^{-ikz+i[(k_x^2+k_y^2)/2k]z} A(k_x, k_y) \tag{2.12-7}$$

H 是变换功能符号。在经过 z 的空间以后 H 可以表示为

$$H(k_x, k_y) = \mathrm{e}^{-ikz+i[(k_x^2+k_y^2)/2k]z} \tag{2.12-8}$$

逆推方程式（2.12-1），E（x, y）的傅里叶变换可以写成

$$A(k_x, k_y) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint E(x, y) \exp(ik_x x + ik_y y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \tag{2.12-9}$$

为了找出 z>0 时的场振幅，将方程式（2.12-9）的傅里叶变换代入方程式（2.12-6）得

$$E(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y' \iint E(x', y')\mathrm{e}^{-ik_x(x-x')-ik_y(y-y')}\mathrm{e}^{-ikz+i[(k_x^2+k_y^2)/2k]z}\, \mathrm{d}k_x\, \mathrm{d}k_y \tag{2.12-10}$$

对 k_x 和 k_y 进行变换得到

$$E(x, y, z) = \frac{i}{\lambda z}\, \mathrm{e}^{-ikz} \iint E(x', y')\mathrm{e}^{-ik[(x-x')^2+(y-y')^2]/2z}\, \mathrm{d}x'\, \mathrm{d}y' \tag{2.12-11}$$

菲涅耳-基尔霍夫衍射常被写成

$$E(x, y, L) = \frac{i}{\lambda L}\, \mathrm{e}^{-ikL} \iint E(x', y')\mathrm{e}^{-ik[(x-x')^2+(y-y')^2]/2L}\, \mathrm{d}x'\, \mathrm{d}y' \tag{2.12-12}$$

L 是到 z=0 处的传播距离。根据惠更斯原理，在点 (x, y) 处的场是由发射源 (x', y') 所发射的所有球面波相加得到的。为了得到上述方程，使用以下积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2 - \beta x)\, \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) \tag{2.12-13}$$

给出在 z=0 平面处的场 $E(x', y')$，则在 z=L 处的场 $E(x, y, L)$ 可以通过把积分式（2.12-12）带入源平面 (x', y') 得到。

例：菲涅耳-基尔霍夫衍射。

设有一束在 z=0 处的高斯光束。场振幅可以写成

$$E(x, y, 0) = E_0 \exp[-(x^2 + y^2)/a^2]$$

a 是常量，物理意义是光束大小。

将上式代入式（2.12-11）和式（2.12-13）得

$$E(x, y, z) = \frac{E_0 \mathrm{e}^{-ikz}}{1 - i\dfrac{\lambda z}{\pi a^2 n}} \exp\left(-i\frac{k}{2R}(x^2 + y^2)\right)\exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\omega^2}\right)$$

和

$$R = z + \frac{1}{z}\left(\frac{\pi a^2 n}{\lambda}\right)^2, \omega^2 = a^2\left[1 + \left(\frac{z\lambda}{\pi a^2 n}\right)^2\right]$$

结果与高斯光束的传播相同。

对菲涅耳–基尔霍夫衍射积分式（2.12-12）做一些变化

$$f_1(x_1, y_1) = \frac{ik}{2\pi L}\exp(-ikL)\iint f_0(x_0, y_0)\exp\left(-\frac{ik}{2L}[(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2]\right)\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0 \quad (2.12\text{-}14)$$

使得在各向同性的介质中 $z=L$ 的 $f_1(x_1, y_1)$ 处和 $z=0$ 处的 $f_0(x_0, y_0)$ 关联。式（2.12-4）可以写成

$$f_1(x_1, y_1) = \frac{ik}{2\pi L}\iint f_0(x_0, y_0)\exp[-ik\rho(x_0, y_0; x_1, y_1)]\,\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0 \quad (2.12\text{-}15)$$

式中

$$\rho(x_0, y_0; x_1, y_1) = L + \frac{1}{2L}(x_1 - x_0)^2 + \frac{1}{2L}(y_1 - y_0)^2 \quad (2.12\text{-}16)$$

是点 (x_0, y_0) 和观察点 (x_1, y_1) 处的距离。当 $\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \ll L$ 时，结果可以延伸为干涉介质，包括级联的近轴和轴对称元件。可以用 *ABCD* 法则全部描述。图 2.13 是这样一个系统的例子。

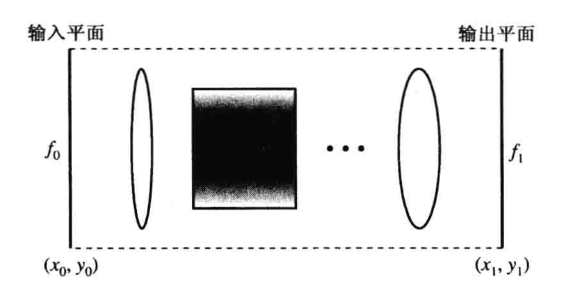


图 2.13　一个级联的类透镜（近轴）器件的所有 *ABCD* 矩阵

结果是

$$f_1(x_1, y_1) = \frac{ik_0}{2\pi B}\exp(-ik_0 L)\iint f_0(x_0, y_0)$$
$$\exp\left(-\frac{ik_0}{2B}[A(x_0^2 + y_0^2) - 2x_0x_1 - 2y_0y_1 + D(x_1^2 + y_1^2)]\right)\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0 \quad (2.12\text{-}17)$$

这个结论可以由费马定律证明。如图 2.14，考虑一个可以用 *ABCD* 矩阵表示的光学系统。X_0, X_1 分别是输入和输出平面上的一点。假设无损耗，且处于真空状态，折射率恒定。设 X_0, X_1 之间的光路为 $\rho(x_0, x_1)$，推算在 X_0, X_1 之间的光线，光轴 P_0 和 P_1 正交。

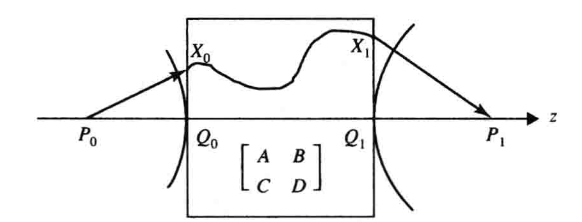


图 2.14　通过 *A,B,C,D* 矩阵的光学系统的一束光。此图用于用费马原理证明菲涅耳-基尔霍夫衍射积分式（2.12-17）

根据费马原理，沿着光轴的光路 $P_0Q_0Q_1P_1$ 应该于 $P_0X_0X_1P_1$ 相同。设半径和曲率半径为

$$R_0 = P_0Q_0$$
$$R_1 = Q_1P_1 \tag{2.12-18}$$

光线路径可以被写成

$$P_0Q_0Q_1P_1 = R_0 + \sum_i n_iL_i + R_1 \tag{2.12-19}$$

$$P_0X_0X_1P_1 = R_0 + \frac{x_0^2}{2R_0} + \rho(x_0, x_1) + R_1 + \frac{x_1^2}{2R_1} \tag{2.12-20}$$

使用上述方程，当 $P_0Q_0Q_1P_1 = P_0X_0X_1P_1$ 时，得到

$$\rho(x_0, x_1) = \sum_i n_iL_i - \frac{x_0^2}{2R_0} - \frac{x_1^2}{2R_1} \tag{2.12-21}$$

光线斜率为

$$x_0' = \frac{x_0}{R_0} \quad \text{and} \quad x_1' = \frac{x_1}{R_1} \tag{2.12-22}$$

光线参数（包括斜率）可以写成

$$x_1 = Ax_0 + Bx_0'$$
$$x_1' = Cx_0 + Dx_0' \tag{2.12-23}$$

消去 R_0, R_1 和光线斜率，得到

$$\rho(x_0, x_1) = \sum_i n_iL_i + \frac{1}{2B}(Ax_0^2 + Dx_1^2 - 2x_0x_1) \tag{2.12-24}$$

从点 (x_0, y_0) 到点 (x_1, y_1) 的情况可以延伸为

$$\rho(x_0, y_0; x_1, y_1) = \sum_i n_iL_i + \frac{1}{2B}[A(x_0^2 + y_0^2) + D(x_1^2 + y_1^2) - 2x_0x_1 - 2y_0y_1] \tag{2.12-25}$$

将方程式（2.12-25）代入式（2.12-15）得到式（2.12-17）。其中 $(ik/2\pi L)$ 被换为 $(ik/2\pi B)$。矩阵元素 B 在传播距离 $L = z_1 - z_0$ 时相同。这样，任意一束光通过一系列的近轴光学系统可以通过在输出和输入平面间的 $ABCD$ 矩阵表示出来。

为了表示这个结果式（2.12-17），使用它通过 $ABCD$ 定律得到一个像。重新组织方程式（2.12-17）中的元素，写成

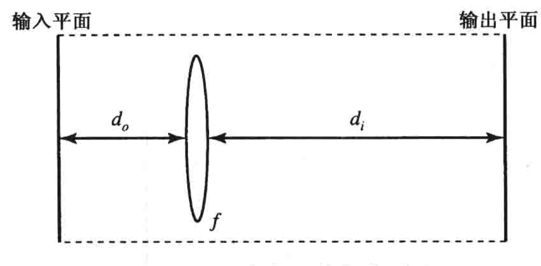


图 2.15　一个单透镜物像系统

$$f_1(x_1, y_1) = \frac{ik_0}{2\pi B} \exp\left[-ik_0 L - \frac{ik_0}{2B}\left(D - \frac{1}{A}\right)(x_1^2 + y_1^2)\right] \times$$
$$\iint f_0(x_0, y_0) \exp\left\{-\frac{ik_0}{2B}\left[A\left(x_0 - \frac{x_1}{A}\right)^2 + A\left(y_0 - \frac{y_1}{A}\right)^2\right]\right\} dx_0\, dy_0 \qquad (2.12\text{-}26)$$

它简单的表示了

$$\lim_{B\to 0} \sqrt{\frac{i}{2\pi B}} \exp\left(-i\frac{x^2}{2B}\right) = \delta(x) \qquad (2.12\text{-}27)$$

$\delta(x)$ 是迪拉克 δ 函数。将式（2.12-27）代入式（2.12-26）得

$$\lim_{B\to 0} f_1(x_1, y_1) = \frac{\exp(-ik_0 L)}{A} f_0\left(\frac{x_1}{A}, \frac{y_1}{A}\right) \exp\left(-i\frac{k_0(DA-1)}{2AB}(x_1^2 + y_1^2)\right) \qquad (2.12\text{-}28)$$

当 $AD-BC=1$ 时，将方程式（2.12-28）重新写成

$$\lim_{B\to 0} f_1(x_1, y_1) = \frac{\exp(-ik_0 L)}{A} \exp\left(-i\frac{k_0 C}{2A}(x_1^2 + y_1^2)\right) \times f_0\left(\frac{x_1}{A}, \frac{y_1}{A}\right) \qquad (2.12\text{-}29)$$

这是主要结果。表示了 B 的极限趋向于 0，$f_1(x_1, y_1)$ 是 $f_0(x_1/A, y_1/A)$ 通过乘 A 按平方律放大的。联系普遍像条件 B=0 和放大系数 A，将图 2.15 作为一个简单的习题，当 B 趋向于 0 时，得到类透镜公式

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} \qquad (2.12\text{-}30)$$

放大系数 $A=-\dfrac{d_i}{d_o}$，d_o 和 d_i 分别是物和像。

夫琅和费近似

式（2.12-14）中的衍射积分可以简单地表达为夫琅和费公式，其中

$$k(x_0^2 + y_0^2) \ll 2L \qquad (2.12\text{-}31)$$

对应所有在源场中的点 (x_0, y_0)。整个场近似于 $\exp\left[-ik(x_0^2 + y_0^2)/2L\right]$。菲涅耳-基尔霍夫衍射积分根据式（2.12-14）变成

$$f_1(x_1, y_1) = \frac{ik}{2\pi L} \exp[-ikL - ik(x_1^2 + y_1^2)/2L] \iint f_0(x_0, y_0) \exp\left(\frac{ik}{L}(x_1 x_0 + y_1 y_0)\right) dx_0\, dy_0 \qquad (2.12\text{-}32)$$

当式（2.12-31）条件满足时，$f_1(x_1, y_1)$ 是在 $z=L$ 处 $f_0(x_0, y_0)$ 的傅里叶变换。这属于弗郎霍夫衍射。式（2.12-31）定义的场通常称做远场。远场是源场的傅里叶变换。

例：一个圆孔的远场。

假设一束 $\lambda = 1\mu m$ 的光穿过一个 a=1cm 的圆孔。远场根据式（2.12-31）得

$$L \gg k(x_0^2 + y_0^2)_{max}/2 = \pi a^2/\lambda = 314m$$

这是当远场离圆孔相当远时的情况，远场分布也可以通过一个图像透镜观察得到。

习题

2.1 周期性透镜波导的矩阵元是一个幺正矩阵（$AD-BC=1$），求解下面的本征值问题：

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r \\ r' \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} r \\ r' \end{bmatrix}$$

（a）证明：方程的特征值 λ 就是 $\lambda = e^{\pm i\theta}$，其中 $\exp(\pm i\theta)$ 由式（2.1-13）给出。

（b）证明本征矢量是

$$\begin{bmatrix} r \\ r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ e^{i\theta} - A \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} r \\ r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ e^{-i\theta} - A \end{bmatrix}$$

假设这两个 B 是有限的且θ不是π的整数倍，这两个本征矢量是独立的，证明它们虽然独立但不正交。

（c）$M^{-1}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}M = \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix}$

证明 $M = \begin{bmatrix} B & B \\ e^{i\theta} - A & e^{-i\theta} - A \end{bmatrix}$，找到 M^{-1}。

2.2 如果给定两个互相独立的本征矢量，则任意一个光线矢量可以看做本征矢量的线性组合，换句话说，可以将其写成

$\begin{bmatrix} r_0 \\ r_0' \end{bmatrix} = \alpha_0\begin{bmatrix} B \\ e^{i\theta} - A \end{bmatrix} + \beta_0\begin{bmatrix} B \\ e^{-i\theta} - A \end{bmatrix}$，其中 α_0 和 β_0 是常量。

（a）由 r_0 和 r_0' 求出 α_0 和 β_0，由于 r_0 和 r_0' 是实数，α_0 和 β_0 互为复共轭。

（b）证明光线矢量在第 m 个周期后可以写成

$$\begin{bmatrix} r_m \\ r_m' \end{bmatrix} = \alpha_0 e^{im\theta}\begin{bmatrix} B \\ e^{i\theta} - A \end{bmatrix} + \beta_0 e^{-im\theta}\begin{bmatrix} B \\ e^{-i\theta} - A \end{bmatrix}$$

然后证明光线位置的普遍表达式可写成 $r_m = r_{\max}\sin(m\theta + \alpha)$。

（c）从式（2.1-10）和式（2.1-11）推导方程式（2.1-23）。

（d）通过方程式（2.1-24）推导方程式（2.1-26）。

2.3 推导方程式（2.3-19）。

2.4 一个由均匀介质球面构成的薄透镜。曲率半径分别是 R_1 和 R_2。证明当一个平面波入射到这个薄透镜时，其输入–输出关系满足下列关系

$$E_{\text{out}}(x, y) = E_{\text{in}}(x, y)\exp(ik\frac{x^2 + y^2}{2f})\exp(-i\phi)$$

式中，f 是这个薄透镜的焦距。同时证明 f 由下式给出

$$\frac{1}{f} = (n-1)(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$$

ϕ 的物理意义是什么？

2.5 证明占据 $0 \leqslant z \leqslant l$ 区域的类透镜介质会把位于 $z<0$ 的轴上点在某一点上成像（如果成像点在 $z<l$，则会形成虚像）。

2.6 推导表 2.1 的光线矩阵。

2.7 对于受约束的高斯光束，其复光线参数 q 一定在上复平面内。

（a）使用高斯光束变换的 ABCD 定律（2.6-9）

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}$$

证明如果 q_1 在上复平面中，q_2 也在上复平面中，假设 A, B, C 和 D 是实数，并且 $AB–CD$=1。[提示：分母有理化。]

（b）利用（a），如果 q_0 在下复平面中，证明 q_N 总在下复平面

$$q_N = \frac{\{A\sin(N\theta) - \sin[(N-1)\theta]\}q_0 + B\sin(N\theta)}{C\sin(N\theta)q_0 + D\sin(N\theta) - \sin[(N-1)\theta]}$$

假设θ是实数。

（c）证明$|\cos\theta| > 1$，当 N 趋向无穷时，q_N 变为实数。[提示：首先证明极限的存在，然后证明极限为 $q = (Aq + B)/(Cq + D)$ 。]

2.8 考虑一高斯光束正常入射到折射率为 n 的固体棱镜（见图 P2.8）。

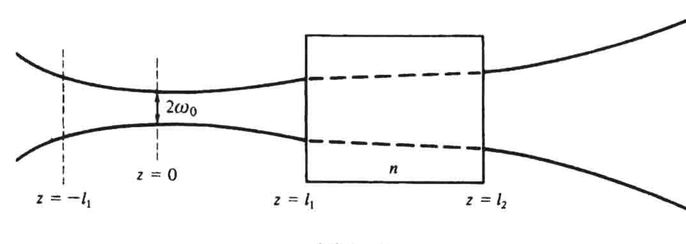


图 P2.8

（a）试求出射光束的远场衍射角。

（b）假设该棱镜向左移动一直到它的入射面位于 $z= -l_1$ 处。试求新的出射光束的束腰大小及位置?（假设该晶体足够长，以至于新束腰部位于晶体之中。）

2.9 束腰在 z=0 处，波长为 λ 的高斯光束入射到位于 $z = l$ 的透镜上（见图 P2.9），试求出透镜的焦距 f 。使新束腰位于 z=L 处。证明（对于给定的 l 和 L）可能存在两个解。对每个解画出光束的传播情况。

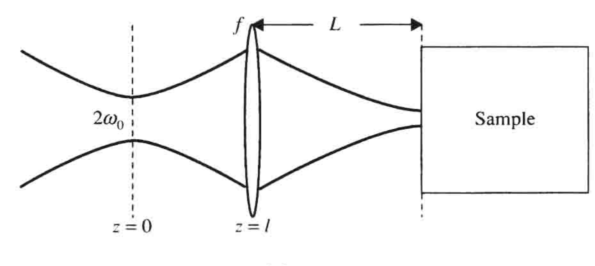


图 P2.9

2.10 补全 2.11 节中所有省略的推导步骤。

2.11 一根平方律折射率变化的光纤 n=1.5，g^2=3.3×10^{2}cm^{-2}。波长λ=1μm 的光束在此光纤中传播，试求在（a）单模 l=m=0 激发情况下；（b）所有 l，m<5 的模都被激发情况

下，此光束的光斑大小及每秒钟内光脉冲数目的极大值。利用任一种典型的玻璃的色散数据，$g^2=3.3\times10^2\text{cm}^{-2}$，$l_{\max}=m_{\max}=30$，请比较模间色散和材料色散对脉冲展宽的相对影响。

2.12　一个厚透镜，入射面和出射面的曲率半径分别为 R_1 和 R_2，介质折射率为 n，透镜厚度是 d。

（a）求这个透镜的 A、B、C、D 矩阵。

（b）入射光线焦点离左边的距离。

2.13　证明：$\lim\limits_{B\to0}\sqrt{\dfrac{i}{2\pi B}}\exp(-i\dfrac{x^2}{2B})=\delta(x)$，其中 $\delta(x)$ 是狄拉克函数。

2.14　对于薄透镜成像，证明由普遍的成像条件 B=0 可得到式（2.12-7）。

2.15　证明斯奈尔定律始终符合最少时间的费马原理。

2.16　通过光线方程直接推导出斯奈尔定律。

2.17　大气中的折射率大约为 $n=1+\Delta n\exp[-\alpha(r-R)],R<r$。

式中，Δn 大约为 0.0003，r 是地球中心的距离，R 是地球的曲率半径，α 大约是 1/7.8km。在日出和日落时光线接近水平。

（a）设 β 是目标矢量光线和水平面夹角（x 轴）。证明光线方程可以写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(n\beta)=\hat{y}\,.\,\Delta n=\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r}\cos\theta$$

其中 r 是径向坐标，y 是纵坐标轴，$r^2=R^2+x^2$。

（b）设 $r=R+z$，R 是地球半径。光线弯折可以对上式从 0 到无穷大求出积分。证明

$$\beta_\infty=\int_0^\infty(\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r})\frac{R}{\sqrt{(R^2+z^2)-R^2}}\mathrm{d}z$$

（c）证明

$$\beta_\infty=-\Delta n\sqrt{\frac{\alpha R\pi}{2}}$$

[提示：忽略分母上的 z^2，（$z\ll2Rz$）。当 R=6400km 以及高度在 100km 以上时 $(\mathrm{d}n/\mathrm{d}r)$ 近似为零，上述取舍是合理的。] 计算中用到的数据：R=6400km，Δn =0.0003，$\beta_\infty=0.011=0.6°$。

2.18　（a）证明题 2.1 中的逆矩阵可以被写为

$$M^{-1}=\frac{1}{2B\sin\theta}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}-A & -B\\ A-\mathrm{e}^{\mathrm{i}e} & B\end{bmatrix}$$

（b）证明

$$\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}^N=M\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}N\theta} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}N\theta}\end{bmatrix}M^{-1}$$

（c）用矩阵乘法推导式（2.1-11）矩阵。

2.19　存在于类透镜介质中由式（2.3-10）描述的光线，它们并不被约束在子午面上，这些光线称为偏折光线。

（a）从方程式（2.3-8）或者方程式（2.3-11），证明存在螺旋线。换句话说，证明解

$$r=a,\theta=bz$$

符合光线方程，式中 a 和 b 是常量，螺距是 $2\pi/b$。

（b）证明 b 和螺旋半径 a 的关系是

$$b^2=\frac{2n_0^2g^2}{n^2-n_0^2g^2a^2}=\frac{2n_0^2g^2}{n_0^2-2n_0^2g^2a^2}$$

式中 n 是 $r=a$ 处的介质折射率。

（c）证明存在圆形路径。证明圆形路径满足方程 $n_0^2=n_0^2g^2r^2$。

注意：圆形路径可以认为简并螺距为零或者无穷大距离 b。

2.20 由方程（2.3-9）描述的类透镜介质可以看成有一系列相同间隔为 d 的透镜组成的波导的极限情况。令 $z=Nd$，考虑 $d\to 0$，$f\to\infty$，$df=1/g^2$ 的极限。

（a）证明 $\theta\to\sqrt{d/f}$ 和 $N\theta\to gz$。

（b）令 $A=1$，$B=d$，$C=-1/f$，$D=1-d/f$，证明当 $N\to\infty$ 时

$$\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}^N=\begin{bmatrix}\cos(gz) & \sin(gz)/g\\ -g\sin(gz) & \cos(gz)\end{bmatrix}$$

因此，类透镜介质可以看成透镜波导的一种分布。

2.21 对下列情况，设 p=0,1 和 m=0,1,2。

（a）画出拉盖尔–高斯光束的前几个低阶模强度分布。

（b）画出（p，m）和（p，$-m$）模的和。

（c）将几个低价拉格朗日–高斯光束用厄米–高斯光束的线性组合表示。

2.22 （a）以在各向同性介质中的基本高斯光束为例，证明

$$k(\partial\psi/\partial z)=\left[-\frac{k}{q}+\frac{ik(kr^2/2)}{q^2}\right]\psi$$

$$\partial^2\psi/\partial z^2=\left[\frac{2}{q^2}-\frac{4i(kr^2/2)}{q^3}-\frac{(kr^2/2)^2}{q^4}\right]\psi$$

（b）证明：在高斯光束中，$(kr^2/2q)\leqslant 1$，如果 $\omega_0\gg\lambda$，即光斑大小远大于波长，则 SVA 是合理的。

（c）证明 SVA 近似与傍轴光线近似等价。

参考文献

1. Marcuse, D., *Light Transmission Optics*. Van Nostrand, Princeton, NJ, 1972.
2. Yariv, A., *Quantum Electronics*, 2nd ed. Wiley, New York, 1975, Section 2.2.
3. Siegman, A. E., *Lasers*, University Science Books, Mill Valley, CA, 1986, pp. 779–782.
4. Kogelnik, H., and W. Rigrod, *Proc. IRE* **50**:230 (1962).
5. Kawakami, S., and J. Nishizawa, An optical waveguide with the optimum distribution of the refractive index with reference to waveform distortion. *IEEE Trans. Microwave Theory Technique* **10**:814 (1968).
6. Miller, S. E., E. A. J. Marcatili, and T. Li, Research toward optical fiber transmission systems. *Proc. IEEE* **61**:1703 (1973).
7. Cohen, L. G., and H. M. Presby, Shuttle pulse measurement of pulse spreading in a low loss graded index fiber. *Appl. Opt.* **14**:1361 (1975).

8. Bloom, D. M., L. F. Mollenauer, Chinlon Lin, D. W. Taylor, and A. M. DelGaudio, Direct demonstration of distortionless picosecond-pulse propagation in kilometer-length optical fibers. *Opt. Lett.* **4**:297 (1979).
9. Suematsu, Y., Long wavelength optical fiber communication. *Proc. IEEE* **71**:692 (1983).
10. Bennett, W. R., Inversion mechanisms in gas lasers. *Appl. Opt. Suppl. Chem. Lasers* **2**:3 (1965).
11. Casperson, L., and A. Yariv, The Gaussian mode in optical resonators with a radial gain profile. *Appl. Phys. Lett.* **12**:355 (1968).
12. Zachos, T. H., Gaussian beams from GaAs junction lasers. *Appl. Phys. Lett.* **12**:318 (1969).
13. Baues, P., Huygens' principle in inhomogeneous isotropic media. *Optoelectronics* **1**:37 (1969).
14. Collins, S. A., Lens-system diffraction integral written in terms of matrix optics. *J. Opt. Soc. Am.* **60**:1168 (1970).
15. Yariv, A., Imaging of coherent fields through lenslike systems. *Opt. Lett.* **19**:1607 (1994).

第 3 章　电介质平板和光纤中的导波

3.0　引言

迄今为止，我们已经讨论了自由空间中波的传播，包括平面波和光束的传播。由于衍射效应，光束有限的横截面在自由空间传播时将会展开。利用透镜或梯度折射率介质聚焦光束。一般来说，高折射率的介质可被用来限制光束的传播。在这一章中，将证明介质平板和圆形光纤可以用来限制电磁传播。这些传播模式被称为导波（或传导模式），而能够传输导波的结构被称为波导。在这一章中，首先讨论导波在电介质平板中的传播。在均匀介质中传播的有限横向尺度的光束将会有所发散。而这种发散合理设计的传导介质结构中则会消失。在介质波导中，这些传播模式的横向截面尺寸由介质波导本身所决定。

首先从介质平板结构中推出传导模式的特性。相应的模式是本征值方程的解，这个本征值方程是从以波导几何结构为边界条件的麦克斯韦方程推出的。同时推导出横电模（TE）传播模式和横磁模（TM）的传播。物理学对于受限传播的解释是平面波在介质界面发生全内反射。在对平板波导进行讨论后，将会涉及圆形光纤中的导波这个重要的内容。接着将简要介绍等效折射率的理论，这对于理解二维结构的光波导很有帮助。在这一章的最后部分，将研究由光纤色散导致的信号恶化和由散射和吸收导致的信号的衰减。关于波导之间的耦合和光纤中色散补偿的研究将在这本书的后面章节进行讨论。

3.1　对称板波导中的 TE 和 TM 模

介质平板是最简单的光波导。图 3.1 给出了一个典型平板波导的例子。它包括一个很薄的夹在两个半无限边界的媒质（包层）中的介质层（叫做导波层或芯层）。一般情况下，导波层的折射率要比包层的大。另外，导波层的厚度通常与波长同量级。在对称平板波导中，上下包层的媒质是一样的。最简单的例子就是玻璃膜（层）夹在空气或低折射率液体（或固体）中。

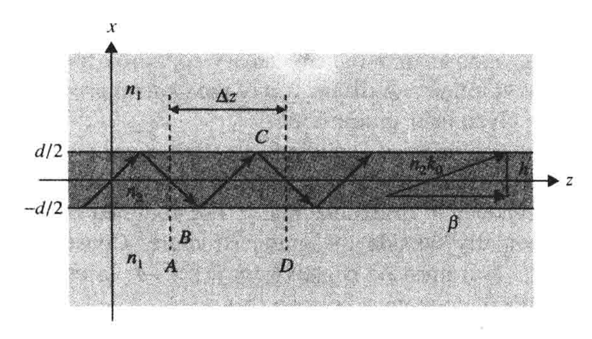


图 3.1　对称平板波导的示意图。波导包括一个厚度为 d 折射率为 n_2 导波层，包层介质的折射率为　$n_1 \cdot k_0 = \omega / c$

下面的方程描述了对称介质波导的折射率分布

$$n(x)=\begin{cases}n_2,|x|<d/2\\n_1,\text{其他地方}\end{cases}\tag{3.1-1}$$

式中，d 是导波层（芯层）的厚度，n_2 是芯层的折射率，而 n_1 是包层媒质的折射率。为了实现传导，n_2 必须比 n_1 大。接下来的问题就是找出这些传导模式。

由于媒质在电介质结构中是均匀分布的，所以处理这类问题的电磁方法相对比较简单。另外，均匀介质中的麦克斯韦方程的解是简单的平面波。因而所要做的就是写出每个部分平面波方程，在界面满足边界条件从而确保波函数的连续性。现在计算沿 z 轴方向传播的单色光波。麦克斯韦方程可以写成

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=i\omega\varepsilon_0 n^2\boldsymbol{E},\qquad \nabla\times\boldsymbol{E}=-i\omega\mu\boldsymbol{H}\tag{3.1-2}$$

式中，n 是方程（3.1-1）中所给出的折射率。由于整个结构沿 z 轴是均匀的，波动方程（3.1-2）的解可表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(x,t)&=\boldsymbol{E}_m(x)\exp[i(\omega t-\beta z)]\\\boldsymbol{H}(x,t)&=\boldsymbol{H}_m(x)\exp[i(\omega t-\beta z)]\end{aligned}\tag{3.1-3}$$

式中，β 是波矢量的 z 分量，并作为由麦克斯韦方程所决定的传播常数，而 $\boldsymbol{E}_m(x)$ 和 $\boldsymbol{H}_m(x)$ 是传导模式的波函数，下标 m 是一个整数（称为模式数）。对于一个均匀的各向同性层状介质结构，波动方程可以通过式（3.1-2）消去 $\boldsymbol{H}$ 来得出

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\boldsymbol{E}(x,y)+[k_0^2n^2(r)-\beta^2]\boldsymbol{E}(x,y)=0\tag{3.1-4}$$

式中，$k_0=\omega/c$ 是真空中的波数。注意到上述方程对于 TM 波（矢量 $\boldsymbol{H}$ 是垂直于 xz 平面）在介质界面上是无效的。将分别解出波导结构中各部分的方程，然后在各个界面与场矢量的切向分量匹配。除了连续性条件界面，另一个重要的传导模式边界条件是场振幅在无穷远处为零。关于方程式（3.1-4）一般特性的分析将在本书的后面进行。

在介质结构每个部分得出方程式（3.1-4）的解。传播常数 β 是一个很重要的参数，它决定模场的变化是呈正弦还是指数形式。对于受限模式，其模场振幅在波导结构以外的地方必须呈指数递减。因此，对于 $|x|>\frac{1}{2}d$，方程式（3.1-4）中的 $(n\omega/c)^2-\beta^2$ 必须是负的。换句话说，一个受限模式的传播常数 β 必须满足

$$\beta>\frac{n_1\omega}{c}\tag{3.1-5}$$

式中，n_1 是包层的折射率。另一方面，由模场的连续性，场量 $\boldsymbol{E}_m(x)$ 达到最大值。最大值的存在要求模场的拉普拉斯因子必须是负的。换句话说，受限模式的传播常数必须满足

$$\beta<\frac{n_2\omega}{c}\tag{3.1-6}$$

因此将会得到满足这些传播条件，方程式（3.1-5）和式（3.1-6），的受限模式。这些模式同样可以被归类为 TE 或者 TM 模。TE 模的电场垂直于 xz 平面（入射面或传播面）并仅包括了模场的 E_y，H_x 和 H_z 分量。而 TM 模包含模场的 H_y，E_x 和 E_z 分量。

波导中 TE 模

TE 模的电场振幅可以写成以下

$$E_y(x, z, t) = E_m(x) \exp[i(\omega t - \beta z)] \tag{3.1-7}$$

以非常类似于方势阱中的粒子的波函数的方式，将模函数 $\boldsymbol{E}_m(x)$ 可以写成

$$E_m(x) = \begin{cases} A \sin hx + B \cos hx, & |x| < \frac{1}{2}d \\ C \exp(-qx), & x > \frac{1}{2}d \\ D \exp(qx), & x < -\frac{1}{2}d \end{cases} \tag{3.1-8}$$

式中，A, B, C 和 D 是常数，而参数 h 和 q 跟传播常数有关

$$h = \left[\left(\frac{n_2\omega}{c}\right)^2 - \beta^2\right]^{1/2}$$
$$q = \left[\beta^2 - \left(\frac{n_1\omega}{c}\right)^2\right]^{1/2} \tag{3.1-9}$$

参数 h 可以看做波导层中波矢的横向分量。为了得到合适的解，电场和磁场的切向分量 E_y 和 H_z 在界面上必须是连续的。由于 $H_z = (i/\omega\mu)(\partial E_y/\partial x)$，必须使其量值与 TE 模函数 $\boldsymbol{E}_m(x)$ 在界面上的斜率一致。由此可以得出

$$A\sin(\frac{1}{2}hd) + B\cos(\frac{1}{2}hd) = C\exp(-\frac{1}{2}qd)$$
$$hA\cos(\frac{1}{2}hd) - hB\sin(\frac{1}{2}hd) = -qC\exp(-\frac{1}{2}qd)$$
$$-A\sin(\frac{1}{2}hd) + B\cos(\frac{1}{2}hd) = D\exp(-\frac{1}{2}qd)$$
$$hA\cos(\frac{1}{2}hd) + hB\sin(\frac{1}{2}hd) = qD\exp(-\frac{1}{2}qd)$$

由此得出

$$2A \sin(\frac{1}{2}hd) = (C - D) \exp(-\frac{1}{2}qd) \tag{3.1-10}$$

$$2hA \cos(\frac{1}{2}hd) = -q(C - D) \exp(-\frac{1}{2}qd) \tag{3.1-11}$$

$$2B \cos(\frac{1}{2}hd) = (C + D) \exp(-\frac{1}{2}qd) \tag{3.1-12}$$

$$2hB \sin(\frac{1}{2}hd) = q(C + D) \exp(-\frac{1}{2}qd) \tag{3.1-13}$$

通过解上述方程，能得出两组解。

（a）对称模（$A=0$ 和 $C=D$）：由方程式（3.1-12）和式（3.1-13）得出

$$h\tan\left(\frac{1}{2}hd\right) = q \quad \text{（对称 TE 模）} \tag{3.1-14}$$

（b）不对称模（$B=0$ 和 $C=-D$）：由方程式（3.1-10）和式（3.1-11）给出

$$h\cot\left(\frac{1}{2}hd\right) = -q \quad \text{（非对称 TE 模）} \tag{3.1-15}$$

注意到方程式（3.1-14）和式（3.1-15）不能同时满足，因为消去 q 会产生一个纯虚数 h 和一个负的 q 值。尽管如此，这两个方程能够合并成一个简单的方程（如习题 3.14）

$$\tan(hd) = \frac{2hq}{h^2 - q^2} \tag{3.1-16}$$

TE 模的解可分成两类，第一类，

$$A = 0,\quad C = D,\quad h\tan(\frac{1}{2}hd) = q \tag{3.1-17}$$

第二类

$$B = 0,\quad C = -D,\quad h\cot(\frac{1}{2}hd) = -q \tag{3.1-18}$$

第一类解对应对称的波函数，第二类解则对应非对称的波函数。

TE 模的传播常数可以由方程式（3.1-17）和式（3.1-18）的数值解或图解得到，h 和 q 的定义由式（3.1-9）给出。下面将描绘一个非常简单而又很著名的图解，它将很清晰显示出 TE 模的数量是怎样由厚度 d 和折射率差异所决定的。通过代入 $u = \frac{1}{2}hd$ 和 $v = \frac{1}{2}qd$，方程式（3.1-17）变为 $u\tan u = v$，并由

$$u^2 + v^2 = (n_2^2 - n_1^2)\left(\frac{\omega d}{2c}\right)^2 = (n_2^2 - n_1^2)\left(\frac{\pi d}{\lambda}\right)^2 \equiv V^2 \tag{3.1-19}$$

由于 u 和 v 被限制为正值，传播常数可由曲线 $v = u\tan u$ 和在 uv 平面的第一象限中半径为 $V = (n_2^2 - n_1^2)^{1/2}(\pi d/\lambda)$ 的圆相交得出。类似地，方程（3.1-18）的解可以由曲线 $v = -u\cot u$ 和 uv 平面的圆的相交得出。图 3.2 给出了 3 个不同 V 值对应的图解。对于 V=1.2，只有 1 个模式 TE_0。当 V=2.5 时有两个模（TE_0 和 TE_1）而 V=5 时则有 4 个。这表明模式的数目由 V 值所决定。

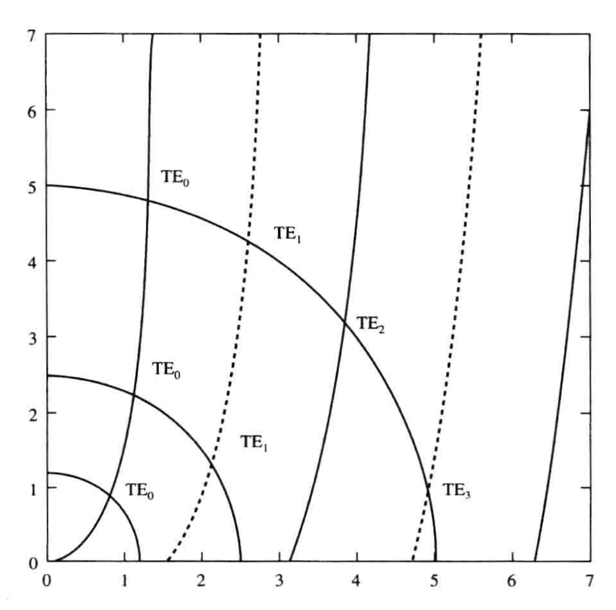


图 3.2　对应 3 个不同的 V 值方程式（3.1-17）和方程式（3.1-18）的图解。实线是 $v = u\tan u$，虚线是 $v = -u\cot u$

由图 3.2 可以很清楚的得出，TE 模的数目由参量 V 的大小所确定。当 V 在 0 到 $\frac{1}{2}\pi$ 之间时，只有第一类的一个 TE 模。当 V 大于 $\frac{1}{2}\pi$ 时，出现第二类的第一个模式。随着参量 V 的增大，第一个和其他的束缚受限模式先后出现。图 3.3 给出了 $n_2 = 1.6$，$n_1 = 1.5$，$d = 5\mu m$ 和 $\lambda = 1.55\mu m$ 时对称平板波导的波函数。根据方程（3.1-19），参数 V=5.64。这个波导支持 4 个 TE 模。由图 3.3 不难发现，给定传播常数 β，第 m 个波函数就有 m–1 个模式。同时也注意到不管是对称还是非对称的波函数它都是以 x=0 为原点。依据前面的讨论，波函数被分成两类（见方程式（3.1-17）和方程式（3.1-18））的讨论结果。这个分类是依据折射率 n（x）在 x=0 时对称而对应的直接结果。

注意到这个解具有确定的对称性有时可以简化传播常数的求解，只需得出正 x 的解。偶数解的斜率为零，而奇数解在原点 x=0 处有零点。因而偶数解的波函数可以写成 $\cos(hx)$，而奇数解的可以写成 $\sin(hx)$。这两个解在 $|x| > \frac{1}{2}d$ 区域呈指数型衰减。而通过匹配在 $|x| = \frac{1}{2}d$ 处的值和斜率便可以得出解。

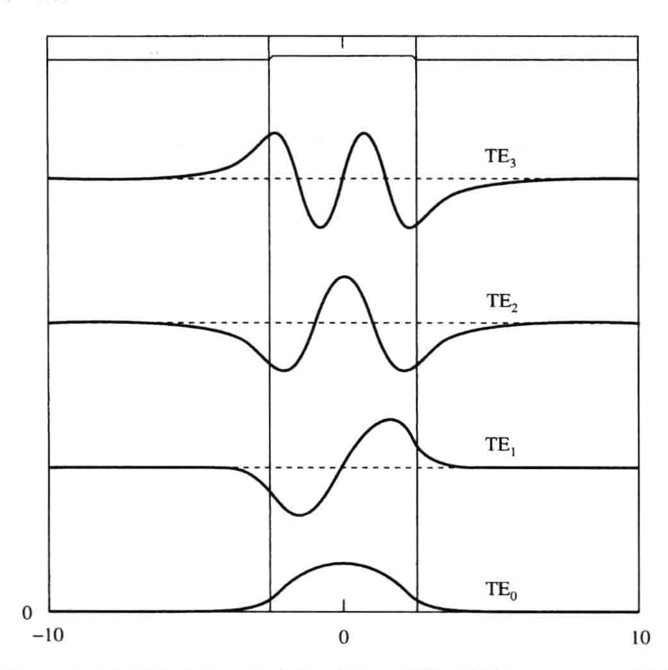


图 3.3　$n_2 = 1.6$ 和 $n_1 = 1.5$ 的对称平板波导的波函数。芯层的厚度 $d = 5\mu m$，波长 $\lambda = 1.55\mu m$。归一化传播常数为 1.5946，1.5785，1.5521 和 1.5175。基模具有最大的传播常数。模式的限制因子（在芯层内的能量的分值）Γ=0.9914，0.9631,0.9033 和 0.7511。基模具有最高的限制因子

为便于描述和比较受限模式，定义归一化传播常数为

$$\bar{\beta} = \frac{\beta}{\omega/c} \tag{3.1-20}$$

这个归一化传播常数通常被称为模式中等效折射率 $n_{有效}$，它与模式的相速度有关：

$$\overline{\beta} = n_{有效} = \frac{c}{v_p} \tag{3.1-21}$$

式中，v_p 是该模式的相速度，$v_p = \omega / \beta$。因而对于受限模式来说，归一化传播常数 $\overline{\beta}$ 或等效折射率 $n_{有效}$ 的大小介于 n_2 和 n_1 之间。

波导中 TM 模式

现在考虑 TM 模，其磁场矢量垂直于传播面（xz 平面)。TM 模的推导原则跟 TE 模相近似。场振幅可以写成

$$\begin{aligned} H_y(x, z, t) &= H_m(x) \exp[i(\omega t - \beta z)] \\ E_x(x, z, t) &= \frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial}{\partial z} H_y \\ E_z(x, z, t) &= -\frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial}{\partial x} H_y \end{aligned} \tag{3.1-22}$$

波函数 $H_m(x)$ 为

$$H_m(x) = \begin{cases} A \sin hx + B \cos hx, & |x| < \frac{1}{2}d \\ C \exp(-qx), & x > \frac{1}{2}d \\ D \exp(qx), & x < -\frac{1}{2}d \end{cases} \tag{3.1-23}$$

式中，A, B, C 和 D 是常数，而参量 h 和 q 由方程式（3.1-9）所给出。

类似于方程式（3.1-14）和方程式（3.1-15），H_y 和 E_z 在 $x = \pm\frac{1}{2}d$ 两个界面处的连续性得出下面的本征值方程

$$\begin{aligned} h\tan\left(\frac{1}{2}hd\right) &= \frac{n_2^2}{n_1^2}q \quad 对于偶数解 \\ h\cot\left(\frac{1}{2}hd\right) &= -\frac{n_2^2}{n_1^2}q \quad 对于奇数解 \end{aligned} \tag{3.1-24}$$

这两个方程可以合并成一个简单的方程

$$\tan(hd) = \frac{2h\bar{q}}{h^2 - \bar{q}^2} \tag{3.1-25}$$

式中

$$\bar{q} = \frac{n_2^2}{n_1^2}q \tag{3.1-26}$$

方程式（3.1-24）同样可以用前面的图解法来求解。图 3.4 给出了一个典型的对称波导的色散关系(等效折射率 $n_{有效}$ 与归一化频率 V)。

q=0 处的频率是个截止频率。模式在 q=0 处，模场在包层里不再呈指数型衰减，从而传播不再受限。参照图 3.4，注意到 TE_0 和 TM_0 没有截止频率。换句话说，这两个模式被限制在对称波导里。$V = \pi/2$ 是 TE_1 和 TM_1 的截止频率。对于频率 $V < \pi/2$ 的范围，波导只能支持 TE_0 和 TM_0 模式。而在高频范围 $\pi/2 < V < \pi$，另外两个模式 TE_1 和 TM_1 也能在波导里面传播。

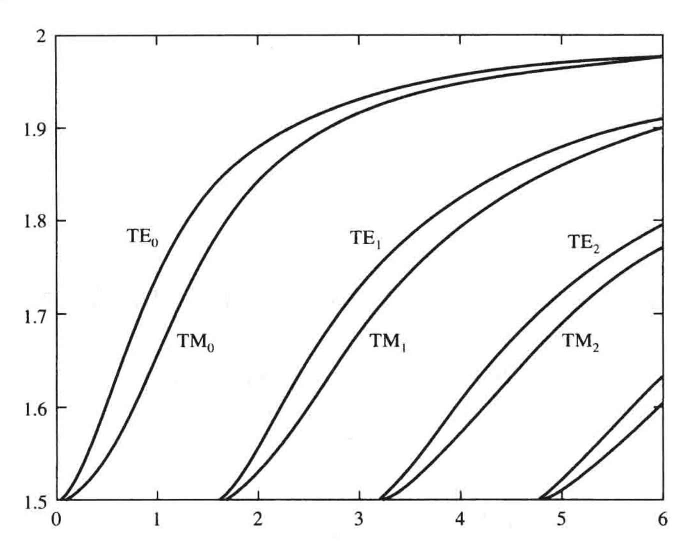


图 3.4　典型对称波导的有效折射率 $n_{有效}$ 与归一化频率 V，$n_1=1.5$ 和 $n_2=2.0$

几何光学方法处理

前面解出了对称平板波导中的 TE 和 TM 模的波方程。这些模式同样也可以用几何光学的方法推导出来。由于波导是由均匀电介质材料层组成的，这使得推导成为可能。在均匀区域的波传播可以替换为两个平面波的叠加。一个可以看成入射波，另一个则当成反射波。由方程式（3.1-5）和方程式（3.1-6）可知，表示受限模的平面波在界面 $|x|=\frac{1}{2}d$ 处发生全内反射。它表明在两个界面上出现全内反射，就足够确保光能被限制在传导层中。尽管如此，它证明全内反射只是一个必要的条件。换句话说，不是所有的光都能通过全反射而束缚在特定的模式里面。一个受限模式，必须有特定的传播常数和在时空上任意点上明确限定的场振幅。考虑模式 $\boldsymbol{E}_m(x)\exp[i(\omega t-\beta z)]$ 以锯齿波的形式

$$E(x, z, t) = E_0(x)\exp[i(\omega t - \beta z - hx)] \tag{3.1-27}$$

式中，E_0 是个常数，h 是横向波数。波沿锯齿形 $ABCD$（参照图 3.1）在时间 Δt 内传播距离 Δz。如果沿光程 $ABCD$ 将传输和在点 B 和 C 的全反射所形成的相移累加，得到一个总的相移

$$\omega\Delta t - \beta\Delta z - 2hd + 2\phi \tag{3.1-28}$$

式中，ϕ 是在一个界面上全反射的相移。从点 A 传播到点 D 的模式 $\boldsymbol{E}_m(x)\exp[i(\omega t-\beta z)]$ 将获得 $\omega\Delta t-\beta\Delta z$ 的相移。因此当相位移是 2π 的倍数时沿锯齿形的反射光成为唯一的模式。也就是

$$-2hd + 2\phi = -2m\pi \tag{3.1-29}$$

m 在这里是整数。$2m\pi$ 前面的减号是对于波导的 TE_m 和 TM_m 模。TE 或 TM 的全内反射的相移 2ϕ 可以很方便地用 h 和 q 的形式表示[1,2]

$$\phi = \begin{cases} 2\tan^{-1}\left(\dfrac{q}{h}\right), & \text{TE} \\ 2\tan^{-1}\left(\dfrac{n_2^2 q}{n_1^2 h}\right), & \text{TM} \end{cases} \tag{3.1-30}$$

这些相移被限制在 0 到 π 之间，因而与基模相对应的条件是 $2hd = 2\phi$（即 $m=0$）。高阶模需要更大的 hd。方程式（3.1-27）中的整数 m 因而假定为只有非负值，即 $m = 0,1,2,3,\cdots$。方程式（3.1-29）的条件相当于方程式（3.1-16）和方程式（3.1-25）的特征值。

考虑图 3.3 中给出的例子。波导的参数为 $n_1 = 1.5, n_2 = 1.6, d = 5.0\mu\text{m}, \lambda = 1.550\mu\text{m}$，归一化频率为 $V = 5.6425$。这样平板波导中存在 4 个 TE 模式。这些模式的归一化传播常数 $\beta(\omega/c)$ 为 1.5946，1.5785，1.5521 和 1.5175。这些传播常数对应的光入射角为 85.29°，80.60°，75.94° 和 71.52°。注意，所有这些角度都比临界角 69.64° 大。基模（$m=0$）总是有最大的传播常数，最大入射角的归一化传播常数接近 n_2。最高阶模有接近 n_1 的最小传播常数和接近临界角的最小入射角。图 3.5 给出了对应前面讨论的模式的锯齿线。

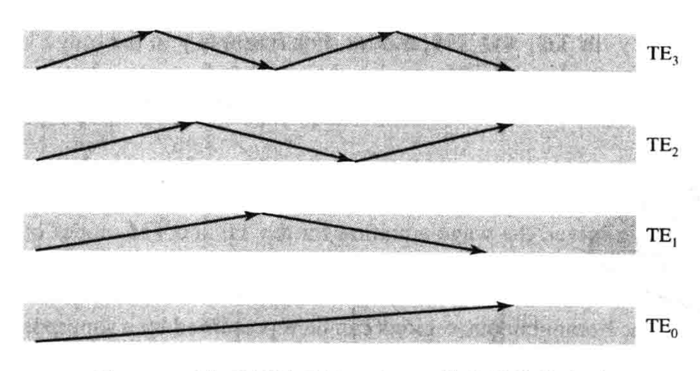


图 3.5　对称平板波导的 4 个 TE 模的锯齿线表示

射线光学提供了方便的方法来得到平板波导的模式条件。在涉及多层或不均匀的复杂的波导结构中，就很难用射线光学方法来处理。另外，射线光学方法只能得到模式条件，场分布和模式正交却不能获得。

3.2　非对称平板波导中的 TE 和 TM 模

3.1 节所叙述的对称平板波导由于其在数学上相对简单而引入束缚传播的概念。实际中，大多数平板波导都是非对称的。事实上，大部分的传导层太薄以致需要一个衬底来支撑整个结构。在这节中，将讨论非对称平板波导中的束缚模。3.1 节中叙述的对称平板波导将会被当做非对称波导的特例。

参照图 3.6，考虑在非对称平板波导中的束缚模的传播，其各层的折射率分布为

$$n(x) = \begin{cases} n_1, & 0 < x \\ n_2, & -t < x < 0 \\ n_3, & x < -t \end{cases} \tag{3.2-1}$$

式中，t 是传导层的厚度，传导层介质的折射率 n_2 要比包层介质的折射率 n_1 和 n_3 大。不失一般性，假设 $n_1 < n_3 < n_2$。为了满足波函数条件，关于麦克斯韦波方程的解是连续、单值和有

限的。首先考虑频率 ω 一定时，解随着传播常数 β 而变化的特性。当 $\beta > n_2\omega/c$ 时，可从方程式（3.1-4）得出各处都有 $(1/E)(\partial^2 E/\partial x^2) > 0$，$E(x)$ 在波导的所有三个区域中呈指数形式。如果令 $E(x) = \exp(-qx)$，在 $x = +\infty$ 处衰减为零。这是为了使得 $E(x)$ 以及其导数在两个界面处的相匹配，而在 $x = -\infty$ 场分布应该是无穷大，如图 3.7（a）所示，这样的解对应能量无限大的场，所以这个解在物理上是没有意思的，它不对应于实际的波。

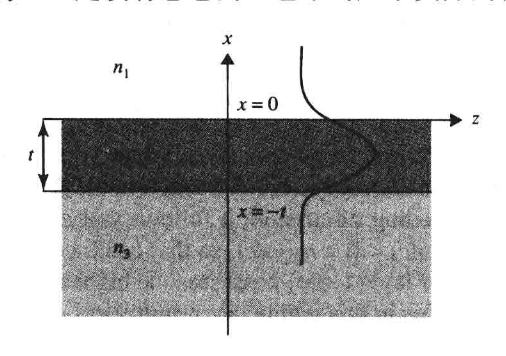


图 3.6　芯层折射率为 n_2 的非对称波导的示意图

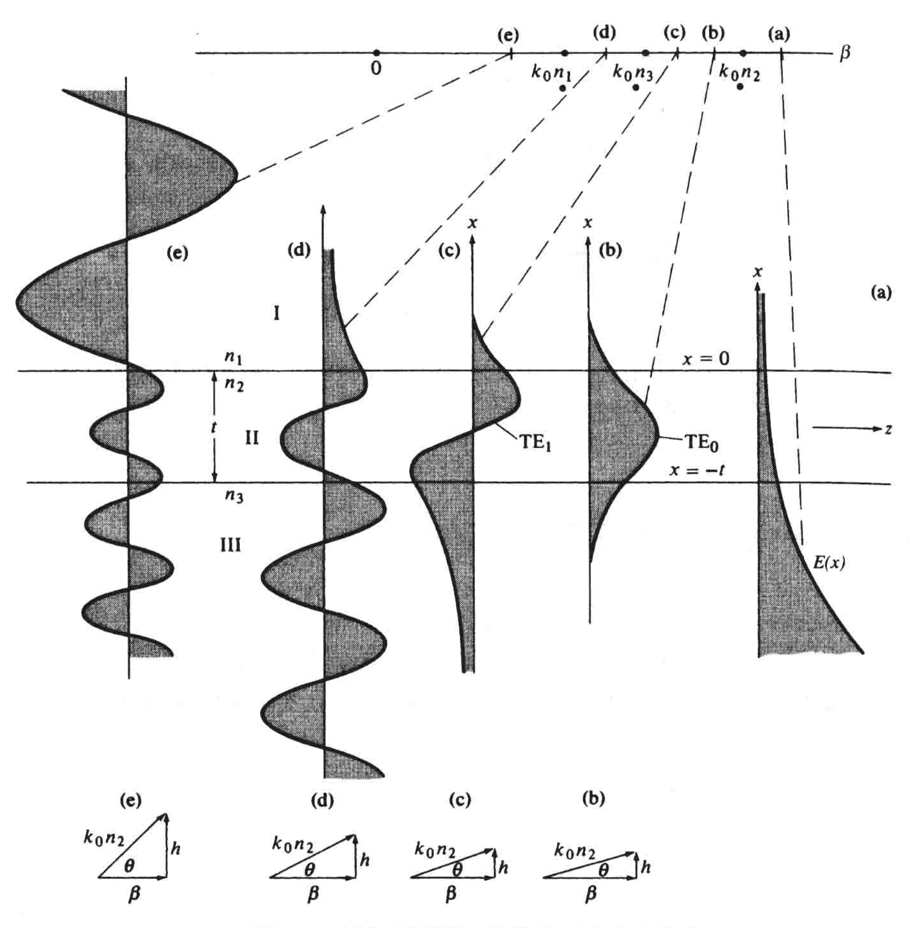


图 3.7　相应于不同 β 值的典型的电场分布

对于$n_3(\omega/c)<\beta<n_2(\omega/c)$，如图 3.7（b）和 3.7（c）所示，因为$(1/E)(\partial^2 E/\partial x^2)>0$，从式（3.1-4）可知，在芯层$(-t<x<0)$具有正弦形式的解，但是在包层的解是指数形式的。这样可以得到一个满足边界条件并在$x<-t$和$x>0$中是指数衰减的解$E(x)$。这些解如图 3.7（b）和 3.7（c）所示。由这些模式所携带的能量被限制在波导层及其附近，因此这些解被称为局限模或波导模。事实上，只有小部分能量会流出波导层之外。从上面的讨论可知，波导模式存在的必要条件是$n_1(\omega/c)$，$n_3(\omega/c)<\beta<n_2(\omega/c)$，所以只有当$n_2>n_1,n_3$，即芯层的折射率最高时波导模式才能存在。在相同的基本常识，这种情况下的束缚模类似于势阱中电子的量子态，即电子被限制在势阱中。

当$n_1(\omega/c)<\beta<n_3(\omega/c)$时，如图 3.7（d）所示，按照式（3.1-4），在$x>0$区域中呈指数形式而在$x<0$区域中呈正弦形式。在这种情形下，绝大多数的能量流进底层，将它叫为衬底辐射模。当$0<\beta<n_1(\omega/c)$时，如图 3.7（e）中所给出的，$E(x)$的解在三个区域中皆为正弦形式的，这就是所谓的波导辐射模。

在 3.3 节中将给出满足界面处边界条件式（3.1-4）的解，这个解说明β在区域（d）和（e）中是连续变量，而在传播区域$n_3(\omega/c)<\beta<n_2(\omega/c)$之中，$\beta$可容许值是分立的。波导模的数目与厚度$t$、频率$\omega$及折射率$n_1,n_2,n_3$有关。对给定的波长，波导模的数目随着$t$而从零开始增加。在某一个$t$值，$TE_1$模变为波导模，进一步增大$t$会容许$TE_2$也存在，如此等等。

现在将注意力放到图 3.6 所描绘的电介质波导式（3.1-4）的解上面。受到传导模式的限制，根据图 3.7，这些模式传播常数β为

$$n_3\frac{\omega}{c}<\beta<n_2\frac{\omega}{c}$$

式中，$n_1<n_3$。这些波导在一般情况下，支持有限的束缚模式，包括与E_y,H_x和H_z相应的 TE 模和与H_y,E_x和E_z相应的 TM 模。可推导出这些模式的波函数和相应的传播常数。

TE 模式

对于 TE 模来说，电场矢量垂直于入射平面（xz 平面）。因而E_y是唯一的电场矢量。TE 模的电场分量E_y可以写成

$$E_y(x,y,z,t)=E_m(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\beta z)} \tag{3.2-2}$$

式中，β是传播常数，$E_m(x)$是波函数的第m个模式。

波函数$E_m(x)$在区域可以写成下面的形式：

$$E_m(x)=\begin{cases} C\exp(-qx), & 0\leqslant x \\ C\left(\cos(hx)-\dfrac{q}{h}\sin(hx)\right), & -t\leqslant x\leqslant 0 \\ C\left(\cos(ht)+\dfrac{q}{h}\sin(ht)\right)\exp[p(x+t)], & x\leqslant -t \end{cases} \tag{3.2-3}$$

式中，C是归一化常数而h,q和p可表示为

$$h=\left[\left(\frac{n_2\omega}{c}\right)^2-\beta^2\right]^{1/2},\quad q=\left[\beta^2-\left(\frac{n_1\omega}{c}\right)^2\right]^{1/2},\quad p=\left[\beta^2-\left(\frac{n_3\omega}{c}\right)^2\right]^{1/2} \tag{3.2-4}$$

这些关系式可由式（3.2-3）和式（3.1-4）推导得出。

边界条件要求 E_y 和 $H_z=(i/\omega\mu)(\partial E_y/\partial x)$ 在 x=0 和 x=$-t$ 两处连续。选择方程（3.2-3）中的系数，使 E_y 在两个分界面处以及 $\partial E_y/\partial x$ 在 x=0 处满足连续条件。再利用 $\partial E_y/\partial x$ 在 x=$-t$ 处的连续性的要求，从式（3.2-3）得到本征方程为

$$h\sin(ht)-q\cos(ht)=p\left(\cos(ht)+\frac{q}{h}\sin(ht)\right)$$

或

$$\tan(ht)=\frac{p+q}{h(1-pq/h^2)} \tag{3.2-5}$$

这称为模式条件。TE 模的传播常数 β 必须满足这些条件。给定折射率为 n_1,n_2,n_3 的一个平板波导，并假定厚度 t 足够大可由式（3.2-5）产生与 β 相对应的有限个解。这些模式是相互正交的。

选择归一化常数 C 使得式（3.2-3）中的电场 $E_m(x)$ 对应模式中沿 z 轴方向具有 1W 的功率流（在 y 方向上单位宽度内）。所以，与模式 $E_y=AE_m(x)$ 相应的功率流是 $|A|^2$ W/m 。而归一化条件变成

$$S_z=\frac{1}{2}\int \mathrm{Re}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*]_z\,\mathrm{d}x=1$$

或等价为

$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}E_yH_x^*\,\mathrm{d}x=\frac{\beta_m}{2\omega\mu}\int_{-\infty}^{\infty}[E_m(x)]^2\mathrm{d}x=1 \tag{3.2-6}$$

式中，m 代表第 m 个 TE 模[与式（3.2-3）的第 m 个本征值相应]，$H_x=-i(\omega\mu)^{-1}\partial E_y/\partial z$ 。将式（3.2-3）代入式（3.2-6），经过运算后得

$$C_m=2h_m\left(\frac{\omega\mu}{|\beta_m|[t+(1/q_m)+(1/p_m)](h_m^2+q_m^2)}\right)^{1/2} \tag{3.2-7}$$

因为这些模式相互正交，有

$$\int_{-\infty}^{\infty}E_mE_l\,\mathrm{d}x=\frac{2\omega\mu}{|\beta_m|}\delta_{l,m} \tag{3.2-8}$$

式中，$\delta_{l,m}$ 是个克罗内克三角。

TM 模式

对于 TM 模，其磁场分量垂直于入射平面（xz 平面）。TM 模的推导在原则上与 TE 模情形类似。场分量为

$$\begin{aligned}H_y(x,z,t)&=H_m(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\beta z)}\\E_x(x,z,t)&=\frac{i}{\omega\varepsilon}\frac{\partial H_y}{\partial z}=\frac{\beta}{\omega\varepsilon}H_m(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\beta z)}\\E_z(x,z,t)&=-\frac{i}{\omega\varepsilon}\frac{\partial H_y}{\partial x}\end{aligned} \tag{3.2-9}$$

$H_m(x)$ 函数在三个区域中的表达形式为：

$$H_m(x)=\begin{cases}-C\left(\dfrac{h}{\bar{q}}\cos(ht)+\sin(ht)\right)e^{p(x+t)}, & x\leqslant -t\\ C\left(-\dfrac{h}{\bar{q}}\cos(hx)+\sin(hx)\right), & -t\leqslant x\leqslant 0\\ -\dfrac{h}{\bar{q}}Ce^{-qx}, & 0\leqslant x\end{cases} \tag{3.2-10}$$

式中，C 是归一化常数而 h,q 和 p 由方程（3.2-4）给出。$\bar{q}$ 将在下面给出定义。

类似于式（3.2-5），H_y 和 E_z 在两个分界面上的连续性要求各个传播常数遵循下列本征方程式

$$\tan(ht)=\frac{h(\bar{p}+\bar{q})}{(h^2-\bar{p}\bar{q})} \tag{3.2-11}$$

式中
$$\bar{p}\equiv\frac{n_2^2}{n_3^2}p \quad 和 \quad \bar{q}\equiv\frac{n_2^2}{n_1^2}q$$

选择归一化常数 C，使式（3.2-9）和式（3.2-10）所代表的场沿 z 轴方向具有 1W 的功率流（在 y 方向上单位宽度内）。因此有

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}H_yE_x^*\,dx=\frac{\beta_m}{2\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H_m^2(x)}{\varepsilon(x)}dx=1$$

或利用 $n_{(x)}^2=\varepsilon_{(x)}/\varepsilon_0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|H_m(x)|^2}{n^2(x)}dx=\frac{2\omega\varepsilon_0}{\beta_m} \tag{3.2-12}$$

利用式（3.2-10），完成式（3.2-12）的积分运算，给出

$$C_m=2\sqrt{\frac{\omega\varepsilon_0}{|\beta_m|t_{有效}}}$$
$$t_{有效}=\frac{\bar{q}^2+h^2}{\bar{q}^2}\left(\frac{t}{n_2^2}+\frac{q^2+h^2}{\bar{q}^2+h^2}\frac{1}{n_1^2q}+\frac{p^2+h^2}{\bar{p}^2+h^2}\frac{1}{n_3^2p}\right) \tag{3.2-13}$$

TM 模同样也是正交的。事实上，所有的 TE 和 TM 模式都是正交的。正交特性将在后面的章节进行讨论。

图 3.8 表示了传播常数 β 与波导厚度（t/λ）的依赖性，$n_2=2.00, n_3=1.70, n_1=1.0$。根据图 3.8，当芯层厚度跟波长相等时（即 $t=\lambda$）波导可以传输两个 TE 和两个 TM 模。事实上，在 $t/\lambda=1$，TE 模的归一化传播常数（或者有效折射率）为 $n_{有效}=1.9594, 1.8375$。图 3.9 表示了这两个 TE 模的波函数。可以看出，波函数不再对称。在芯区波函数呈正弦而在包层迅速消失。

一般来说，一个模式在一定的 t/λ 值（截止）下会变成受缚的。在截止条件下，$p=0$ 和 $\beta=n_3\omega/c$，模的空间延伸到 $x=-\infty$。根据模条件式（3.2-5），式（3.2-11）和式（3.2-4），TE 和 TM 模的截止条件 t/λ 分别由下式给出

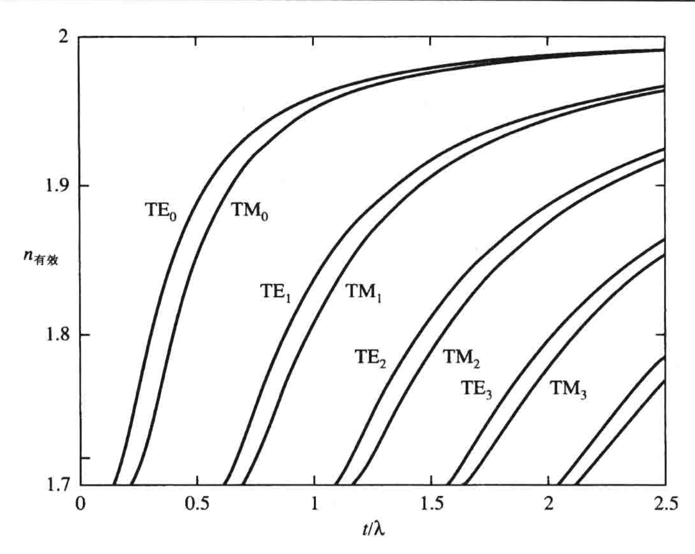


图 3.8　对称波导束缚模的有效折射率与厚度和波长的关系图，其中 $n_1 = 1.0, n_2 = 2.00, n_3 = 1.70$

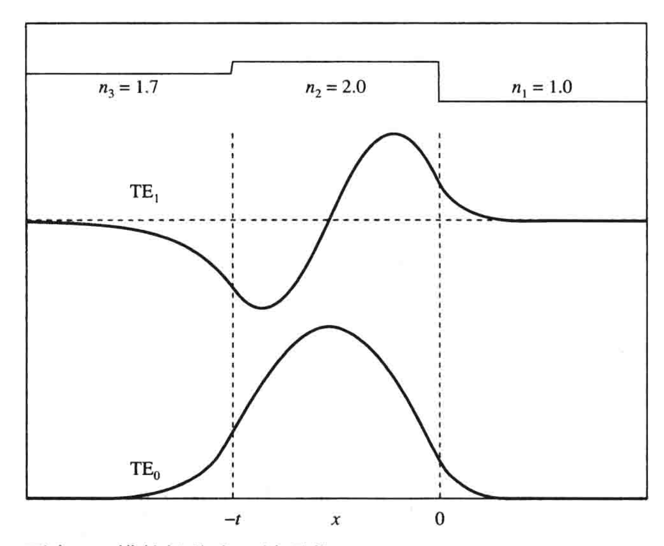


图 3.9　两个 TE 模的场分布，波导的 $n_2 = 2.00, n_3 = 1.70, n_1 = 1.0$ 和 $t/\lambda = 1.0$ 。顶端曲线表示了折射率分布

$$\left(\frac{t}{\lambda}\right)_{\mathrm{TE}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{n_2^2 - n_3^2}}\left[m\pi + \arctan\left(\frac{n_3^2 - n_1^2}{n_2^2 - n_3^2}\right)^{1/2}\right]$$
$$\left(\frac{t}{\lambda}\right)_{\mathrm{TM}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{n_2^2 - n_3^2}}\left[m\pi + \arctan\frac{n_2^2}{n_1^2}\left(\frac{n_3^2 - n_1^2}{n_2^2 - n_3^2}\right)^{1/2}\right] \qquad (3.2\text{-}14)$$

式中，m 是一个整数（$m = 0,1,2,3,\cdots$），它表明为第 m 个束缚的 TE（或 TM）模式。由于 $n_1 < n_2$，可以注意到 TM_m 模的截止厚度比 TE_m 模的要大。对于稍微大于截止值的 t/λ 值，$p \geqslant 0$，而且模式很难被束缚。当 t/λ 值变大，p 值也随之变大，模式开始越来越多地被第 2 层所束缚。这对应于归一化的传播常数或有效折射率，$\beta\lambda/2\pi$，在截止值等于 n_3 并且使得

t/λ 接近 n_2。在对称波导中（$n_1 = n_3$），最低阶的模式 TE_0 和 TM_0 是没有截止条件的，它们被所有的 t/λ 值所束缚。但是当 t/λ 变小时，束缚变弱。

根据不同的 t/λ 值，波导能够传播所有模式的束缚模。为了研究束缚模的数目，定义参数

$$V \equiv \frac{\pi t}{\lambda}\sqrt{n_2^2 - n_3^2} \tag{3.2-15}$$

现在考虑在一个给定的波导中（也就是固定 n_1, n_2, n_3 和 t）随着光波长的逐渐增大，TE 模式会发生什么变化。假设媒介仍然是透明的，而折射率 n_1, n_2 和 n_3 的变化不明显。由于 $\omega/c = 2\pi/\lambda$，减少波长将会使得 ω/c 的值增加。在长波段（低频区），有

$$0 < V < \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{n_3^2 - n_1^2}{n_2^2 - n_3^2}\right)^{1/2} \tag{3.2-16}$$

t/λ 的值小于截止值，没有束缚模式存在这个波导中。当波长增加大到

$$\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{n_3^2 - n_1^2}{n_2^2 - n_3^2}\right)^{1/2} < V < \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{n_3^2 - n_1^2}{n_2^2 - n_3^2}\right)^{1/2} \tag{3.2-17}$$

时，在模式条件式（3.2-5）中有一个解。这个模式被定义为 TE_0 并且有个横向的参数 h 在下面这个范围

$$0 < ht < \pi$$

因此在波导传导层里（$-t < x < 0$）没有零点。当波长进一步减少时，参数 h 在下面这个范围

$$\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{n_3^2 - n_1^2}{n_2^2 - n_3^2}\right)^{1/2} < V < \pi + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{n_3^2 - n_1^2}{n_2^2 - n_3^2}\right)^{1/2} \tag{3.2-18}$$

模场条件式（3.2-5）有两个解。$ht < \pi$ 对应最低阶 TE_0 模。在第二个模式中

$$\pi < ht < 2\pi \tag{3.2-19}$$

因此在传导区域中（$-t < x < 0$）有零点（即在 $E_y = 0$ 处）。这就是 TE_1 模。这些模式都对应相同的频率并都能由相同的输入场同时激起。尽管如此，注意到 TE_0 模有更大的 p 值（也就是 $p_0 > p_1$）而且更加牢固地束缚在传导平板之中。遵循式（3.2-4），$\beta_0 > \beta_1$，因此 TE_0 模的相速度 $v_0 = \omega/\beta_0$ 比 TE_1 模的要小。可推导出第 m 个模式（TE 或 TM）满足

$$(m-1)\pi < ht < m\pi \tag{3.2-20}$$

同时有 $m-1$ 个零点存在于传导层中（$-t < x < 0$）。TM 模的一般特点跟 TE 模的相类似，除了对应的 p 值稍微小些之外，它表明不同程度的束缚能力。与 TE 模相比较，绝大部分的 TM 模的功率在远离中心的媒介中传播。这个问题在习题 3.2 中继续讨论。

几何光学方法处理

用一种近似于推导式（3.1-29）方式，几何光学也可以用来获得模式条件。按照 3.1 节所给出的步骤，可以得到

$$-2ht + \phi_{21} + \phi_{23} = -2m\pi \tag{3.2-21}$$

式中，m 是一个整数，ϕ_{21} 是从界面 $x=0$ 的全内反射对应的相移，ϕ_{23} 是从界面 $x=-t$ 的全内反

射对应的相移。这些相移可如[1,2]用 p,q和h 的形式方便地表示为

$$\phi_{21}=\begin{cases}2\arctan\left(\dfrac{q}{h}\right), & \text{TE}\\[2ex] 2\arctan\left(\dfrac{n_2^2q}{n_1^2h}\right), & \text{TM}\end{cases} \tag{3.2-22}$$

$$\phi_{23}=\begin{cases}2\arctan\left(\dfrac{p}{h}\right), & \text{TE}\\[2ex] 2\arctan\left(\dfrac{n_2^2p}{n_3^2h}\right), & \text{TM}\end{cases} \tag{3.2-23}$$

这些公式中的相移也被限制在 0 到π之间。因此基模对应的条件为$m=0$。将式（3.2-22）和式（3.2-23）代入式（3.2-21）可以得到式（3.2-5）和（3.2-11）的模式条件。

模式限制因子

如图 3.3 和图 3.9 所示，束缚模的电场和磁场在限制层中是有限的。虽然与模式相关的功率沿 z 方向传播，但部分电磁场能量实际上会传播到传导层之外去。令 Γ_i 为流入平板波导媒介 i （$i=1,2,3$ ）的那部分功率。由上面定义有

$$\Gamma_i=\frac{\mathrm{Re}\displaystyle\int_i(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)\cdot z\,\mathrm{d}x}{\mathrm{Re}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)\cdot z\,\mathrm{d}x},\quad i=1,2,3 \tag{3.2-24}$$

式中，分子部分的积分在第i层进行的。

Γ_2 是在传导层 n_2 中的模式功率流的比例，通常被称为模式限制因子。前面得到的模函数也能用来获得限制因子的解。这个作为一个习题（习题 3.2）留给读者自己去完成。

3.3　阶跃型圆柱状电介质波导（光纤中的线性偏振模）

束缚模传播同样也能出现在圆形介质光波导中（例如，二氧化硅玻璃光纤）。由于有传播容量大的优点，二氧化硅玻璃光纤已成为最重要的长距离和高速率通信的媒介。毫不夸张地说，光纤已经被认定为技术上和通信应用上的一个革命。这些成功源于对光纤中的束缚模的低损耗传播的预言[3]和认识[4]，而杂质的吸收已经减小到毫无意义。光纤通信技术，简单地说，就是以最大的速度在光纤的一端传输而在另一端进行接收。光纤的长度各不相同，短的只有几米，用在计算机之间互连，长的有成千上万米的越洋海底光缆。通信系统的主要目标是在输出端获得一个低能量损耗，较小的脉冲展宽和较小噪声干扰的光脉冲。光纤的性质给任何想达到这个目标的想法设置了很多障碍，主要包括衍射、导致脉冲展宽的群速度色散、各种各样的非线性散射。很多书都专注于对这类现象的了解和利用这些知识来为光传输制定规范。对光纤中光波的传播的正确认识是非常重要的。这一节中将专注于圆形横截面光纤中的束缚模的传播，也将研究群速度色散和传播衰减。检波和噪声的专题将在第 10 和 11 章进行讨论。

依据图 3.10，认为圆形介质波导有一个阶跃型折射率

$$n(r)=\begin{cases}n_1, & 0<r<a\\ n_2, & a<r<b\end{cases} \tag{3.3-1a}$$

其中 a 是芯层的半径，而 b 是包层的半径。

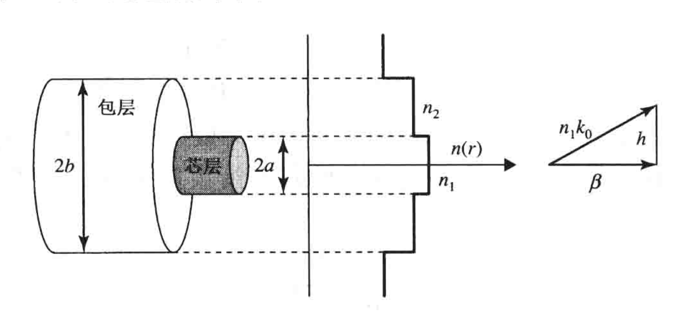


图 3.10　包层半径为 b，芯层半径 a ($a\ll b$)的圆形介质波导的示意图。$n(r)$ 是光纤的折射率。$k_0=\omega/c$

图中包括折射率为 n_1、半径为 a 的纤芯，折射率为 n_2、半径为 b 的包层。包层的半径 b 通常选择足够大，从而使得 $r=b$ 处束缚模为零。一个能传输单模 $\lambda=1.55\mu\text{m}$ 的典型光纤芯层半径大约为 5μm 而包层超过 100μm 。在下面的计算中，取 $b=\infty$；在大多数波导中，若只考虑束缚模，这是一个很合理的假设。

和电介质平板波导中的模式传播不同，圆波导中的传播模式一般由 TE 波和 TM 波混合组成。这些混合模（TE 模和 TM 模）的精确解需在柱坐标系下解波动方程而得出，并且过程很复杂。附录 A 和 B 给出了求解过程。接下来讨论圆波导的近似解法。对于大部分波导的纤芯折射率略高于包层折射率，可以得到场分量和模场条件的很好的近似表达式。事实上，在大多数单模光纤中，折射率差（ n_1-n_2 ）约为 10^{-3} 。假定

$$n_1-n_2\ll 1 \tag{3.3-1b}$$

在芯层（n_1）和包层（n_2）之间的介质截面（ $r=a$ ）上，$\boldsymbol{H}$ 的切向分量的连续条件与 $\boldsymbol{E}$ 切向分量的连续条件一致。这导致在芯层与包层界面上场分量的匹配变得非常简单。可以利用场矢的笛卡儿分量来解波动方程而不用引入其他更复杂的量。对圆光纤应用假设式（3.3-1b），从而得到线偏振模的简化解，这是由 Gloge 提出的[5]。在限制条件式（3.3-1b）中，束缚模（ $n_2k_0<\beta<n_1k_0$ ）的所有横向波数（h，q）都远小于传播常数 β，即有

$$q, h\ll\beta \tag{3.3-2a}$$

式中，q 和 h 由

$$h=\sqrt{n_1^2k_0^2-\beta^2}\quad \text{and}\quad q=\sqrt{\beta^2-n_2^2k_0^2} \tag{3.3-2b}$$

给出，k_0 是光在真空中的波数目（ $k_0=\omega/c$ ）。

现在开始解波动方程，从而求得横向场的笛卡儿分量 E_x、E_y、H_x、H_y。这些场分量也都满足波动方程式（ A－1 ）。对于阶跃折射率介质波导，其解为附录 A 中给出的贝塞尔函数。切向分量（ E_z,E_ϕ,H_z 和 H_ϕ ）在芯-包分界面处必须是连续的。现在寻求电场的 x 或 y 分量为零的解。换句话，寻找 x 偏振模或 y 偏振模传播。因为 E_ϕ 可以用 E_x 和 E_y 来表示为

$$E_\phi = -E_x \sin\phi + E_y \cos\phi \tag{3.3-3}$$

E_ϕ 简单地正比于 E_x 或 E_y。因此，在这些新解中，E_ϕ 的连续条件等价于 E_x 或 E_y 的连续条件。取 $\boldsymbol{E}$ 的 y 向偏振分量的解的形式为

$$E_x = 0 \tag{3.3-4}$$

$$E_y = \begin{cases} AJ_l(hr)\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\phi}\exp[i(\omega t-\beta z)], & r<a \\ BK_l(qr)\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\phi}\exp[i(\omega t-\beta z)], & r>a \end{cases} \tag{3.3-5}$$

式中，A、B 为常数。J_l 和 K_l 是贝塞尔函数。对于束缚模（$n_2k_0<\beta<n_1k_0$），电场函数在芯层振荡而在包层消逝。贝塞尔函数 $K_l(qr)$ 沿径向呈指数型衰减。假设 $E_z \ll E_y$。根据附录 A，磁场分量为

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{-i}{\omega\mu}\frac{\partial}{\partial z}E_y = \frac{-\beta}{\omega\mu}E_y \\ H_y &\approx 0 \\ H_z &= \frac{i}{\omega\mu}\frac{\partial}{\partial x}E_y \end{aligned} \tag{3.3-6}$$

根据麦克斯韦方程 $\nabla\times\boldsymbol{H}=\varepsilon\partial\boldsymbol{E}/\partial t$，电场 $\boldsymbol{E}$ 的纵向分量与 H_x 有关

$$E_z = \frac{i}{\omega\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y}H_x = \frac{-i\beta}{\omega^2\mu\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y}E_y \tag{3.3-7}$$

式中，利用了式（3.3-6）得到最后一个等式。需要指出的是，在这里，E_x、H_y 为零。另外四个场分量可以用 E_y 来表示。根据式（3.3-6）和式（3.3-7），为了计算 H_z 和 E_z，需要分别对 x 和 y 进行微分。因为 E_y 取式（3.3-5）的形式，需要如下关系式

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{3.3-8}$$

和

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{3.3-9}$$

利用 r 和 ϕ 的定义式

$$r = (x^2+y^2)^{1/2} \tag{3.3-10}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \tag{3.3-11}$$

得到

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\phi \tag{3.3-12}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\phi \tag{3.3-13}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{1}{r}\sin\phi \tag{3.3-14}$$

和

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{1}{r}\cos\phi \tag{3.3-15}$$

把式（3.3-5）中的 E_y 代入式（3.3-6）和式（3.3-7）中，并利用式（3.3-8）～式（3.3-15）进行微分。经过复杂的数学运算，并利用如下贝塞尔函数关系式

$$\begin{aligned} J_l'(x) &= \frac{1}{2}[J_{l-1}(x) - J_{l+1}(x)] \\ K_l'(x) &= -\frac{1}{2}[K_{l-1}(x) + K_{l+1}(x)] \end{aligned} \tag{3.3-16}$$

$$\begin{aligned} \frac{l}{x}J_l(x) &= \frac{1}{2}[J_{l-1}(x) + J_{l+1}(x)] \\ \frac{l}{x}K_l(x) &= -\frac{1}{2}[K_{l-1}(x) - K_{l+1}(x)] \end{aligned} \tag{3.3-17}$$

得到如下场分量表达式

芯区（$r<a$）：

$$\begin{aligned} E_x &= 0 \\ E_y &= AJ_l(hr)\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\phi}\exp[i(\omega t - \beta z)] \\ E_z &= \frac{h}{\beta}\frac{A}{2}[J_{l+1}(hr)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l+1)\phi} + J_{l-1}(hr)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l-1)\phi}]\exp[i(\omega t - \beta z)] \\ H_x &= -\frac{\beta}{\omega\mu}AJ_l(hr)\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\phi}\exp[i(\omega t - \beta z)] \\ H_y &\cong 0 \\ H_z &= -\frac{ih}{\omega\mu}\frac{A}{2}[J_{l+1}(hr)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l+1)\phi} - J_{l-1}(hr)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l-1)\phi}]\exp[i(\omega t - \beta z)] \end{aligned} \tag{3.3-18}$$

包层（$r>a$）：

$$\begin{aligned} E_x &= 0 \\ E_y &= BK_l(qr)\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\phi}\exp[i(\omega t - \beta z)] \\ E_z &= \frac{q}{\beta}\frac{B}{2}[K_{l+1}(qr)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l+1)\phi} - K_{l-1}(qr)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l-1)\phi}]\exp[i(\omega t - \beta z)] \\ H_x &= -\frac{\beta}{\omega\mu}BK_l(qr)\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\phi}\exp[i(\omega t - \beta z)] \\ H_y &\cong 0 \\ H_z &= -\frac{iq}{\omega\mu}\frac{B}{2}[K_{l+1}(qr)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l+1)\phi} + K_{l-1}(qr)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l-1)\phi}]\exp[i(\omega t - \beta z)] \end{aligned} \tag{3.3-19}$$

为了得到式（3.3-18）和式（3.3-19），应用了 $\beta = n_1k_0 \sim n_2k_0$，因为 $n_2k_0 < \beta < n_1k_0$，且 $n_1 - n_2 \ll 1$。可见，在式（3.3-1b）的限制下 $h, q \ll \beta$，E_y、H_x 是主要的场分量。换句话说，场本质上是横向的。为了确保 E_y（$E_\phi \propto E_y$）在纤芯边界 $r=a$ 处的连续性，常数 B 为

$$B = \frac{AJ_l(ha)}{K_l(qa)} \tag{3.3-20}$$

于是，常数 A 可以根据归一化条件决定。

场解式（3.3-18）和式（3.3-19）为 y 向偏振波（$E_x=0$）。为了完整表示模场，也需要正交偏振模（如 x 偏振波）。这一正交模的场分量 E_x 和 E_y 取如下形式

$$E_x=\begin{cases}AJ_l(hr)e^{il\phi}\exp[i(\omega t-\beta z)], & r<a\\ BK_l(qr)e^{il\phi}\exp[i(\omega t-\beta z)], & r>a\end{cases} \tag{3.3-21}$$

$$E_y=0 \tag{3.3-22}$$

根据麦克斯韦方程，其他场分量为

$$\begin{aligned} &E_z=\frac{-i}{\omega\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x}H_y=\frac{-i\beta}{\omega^2\mu\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x}E_x\\ &H_x\approx 0\\ &H_y=\frac{i}{\omega\mu}\frac{\partial}{\partial z}E_x=\frac{\beta}{\omega\mu}E_x\\ &H_x=\frac{-i}{\omega\mu}\frac{\partial}{\partial y}E_x \end{aligned} \tag{3.3-23}$$

式中，假设 $E_z<<E_x$。在这组解中，$E_y=0$，$H_x\sim 0$。把式（3.3-21）中的 E_x 代入式（3.3-23），并利用式（3.3-8）～式（3.3-15）进行微分，再次通过复杂的数学运算，并利用关系式（3.3-16）和式（3.3-17），得到如下表达式

芯区（$r<a$）：

$$\begin{aligned} &E_x=AJ_l(hr)e^{il\phi}\exp[i(\omega t-\beta z)]\\ &E_y=0\\ &E_z=i\frac{h}{\beta}\frac{A}{2}[J_{l+1}(hr)e^{i(l+1)\phi}-J_{l-1}(hr)e^{i(l-1)\phi}]\exp[i(\omega t-\beta z)]\\ &H_x\cong 0\\ &H_y=\frac{\beta}{\omega\mu}AJ_l(hr)e^{il\phi}\exp[i(\omega t-\beta z)]\\ &H_z=\frac{h}{\omega\mu}\frac{A}{2}[J_{l+1}(hr)e^{i(l+1)\phi}+J_{l-1}(hr)e^{i(l-1)\phi}]\exp[i(\omega t-\beta z)] \end{aligned} \tag{3.3-24}$$

包层（$r>a$）：

$$\begin{aligned} &E_x=BK_l(qr)e^{il\phi}\exp[i(\omega t-\beta z)]\\ &E_y=0\\ &E_z=i\frac{q}{\beta}\frac{B}{2}[K_{l+1}(qr)e^{i(l+1)\phi}+K_{l-1}(qr)e^{i(l-1)\phi}]\exp[i(\omega t-\beta z)]\\ &H_x\cong 0\\ &H_y=\frac{\beta}{\omega\mu}BK_l(qr)e^{il\phi}\exp[i(\omega t-\beta z)] \end{aligned}$$

$$H_z = \frac{q}{\omega\mu}\frac{B}{2}[K_{l+1}(qr)e^{i(l+1)\phi} - K_{l-1}(qr)e^{i(l-1)\phi}]\exp[i(\omega t - \beta z)] \tag{3.3-25}$$

为了得到式（3.3-24）和式（3.3-25），由式（3.3-1b）再次假设 $\beta \cong n_1 k_0 \cong n_2 k_0$。可见，在这组解中，$E_x$、$H_y$ 是主要的场分量。因此，模场又近似是横向的，并且是 x 方向的线偏振模。为了确保 E_x（$E_\phi \propto E_x$）在纤芯边界 $r=a$ 处的连续性，常数 B 由式（3.3-20）给出。

已经得到横向场彼此正交偏振的两类导模的场表达式。基于对称性的圆形光纤，可以肯定这两组模式传播常数、强度和功率分布相同。假设场的切向分量在介质界面 $r=a$ 处连续，这些表达式是麦克斯韦方程的近似解。由 E_ϕ 在 $r=a$ 的连续条件可以得到式（3.3-20）。按照场的表达式（3.3-18）、式（3.3-19）、式（3.3-24）和式（3.3-25），磁场分量 H_ϕ 正比于电场分量 E_ϕ。因此，E_ϕ 的连续条件等价于 H_ϕ 的连续条件。现在考虑 E_z 在 $r=a$ 处的连续性。因为连续条件必须对所有方位角 ϕ 成立，必须令 $\exp[i(l+1)\phi]$ 与 $\exp[i(l-1)\phi]$ 的系数相等。利用场表达式（3.3-18）、式（3.3-19）以及（3.3-20），得到如下模的特征方程

$$ha\frac{J_{l+1}(ha)}{J_l(ha)} = qa\frac{K_{l+1}(qa)}{K_l(qa)} \tag{3.3-26}$$

和

$$ha\frac{J_{l-1}(ha)}{J_l(ha)} = -qa\frac{K_{l-1}(qa)}{K_l(qa)} \tag{3.3-27}$$

根据 H_z 的连续性，存在同样的特征方程。另外，如果利用 x 偏振模的场表达式（3.3-24）和式（3.3-25），将会得到同样的模的特征方程式（3.3-26）和式（3.3-27）。这意味着这两组径向正交模式对应传播常数 β 而简并。如果重复使用贝塞尔函数，模式条件式（3.3-27）和式（3.3-26）在数学上是相等的。

用这种近似式可获得模式条件式（3.3-26），比附录 B 中 HE 和 EH 模的精确表达式简单。在这样的近似中得到的模的特征方程式（3.3-26）比精确解式（B-11）简单得多。因为式（B-11）中存在 $J_l'(ha)/J_l(ha)$ 的平方。这意味式（3.3-26）的每个场的解实际上存在二重简并度。事实上，$HE_{l+1,m}$ 和 $EH_{l-1,m}$ 模的传播常数接近简并[6]。在极限 $n_2 \to n_1$ 时，它们完全一致。这一点也可以从式（3.3-18）、式（3.3-19）、式（3.3-24）以及式（3.3-25）z 中的场分量 E_z 和 H_z 可以看出。比较线偏振模表达式与精确模表达式 $(B-6)$ ～式 $(B-9)$，可以看出线偏振模实际上是 $HE_{l+1,m}$ 和 $EH_{l-1,m}$ 模的叠加[6]。两个独立的线性叠加分量对应 x 偏振和 y 偏振模。两种理论的总模数是相同的。由式（3.3-26）得到的本征值表示为 β_{lm}，$l=1,2,3,\cdots$，$m=1,2,3,\cdots$，下标 m 表示超越方程式（3.3-26）的第 m 个根。这些模记为 LP_{lm}。最低阶的模 HE_{11} 的传播常数为 β_{01}，对应的模记为 LP_{01}。注意到 LP_{x01} 和 LP_{y01} 是简并的并且有相同的传播常数 β_{01}。这与波导的圆对称一致。在实际光纤中，由于生产的不完善芯层不是精确的圆。这一不对称将会破坏简并并导致 $\beta_{x01} \neq \beta_{y01}$。换句话说，$LP_x$ 偏振模和 LP_y 偏振模是以稍微不同的传播常数和群速度传播的。这会导致偏振模色散现象，将在第 7 章讨论。

这些线偏振模的特征方程（3.3-26）或（3.3-27）可以进行图解。这里考虑 $l=0$ 时的情况。为了进行讨论定义一个参数

$$V = k_0 a(n_1^2 - n_2^2)^{1/2} = \frac{2\pi a}{\lambda}(n_1^2 - n_2^2)^{1/2} = \sqrt{(ha)^2 + (qa)^2} \tag{3.3-28}$$

式中，a 是芯区半径。将会看到这个参数决定了阶跃圆光纤能够传输束缚模式的多少。如果将 $\sqrt{V^2-(ha)^2}$ 代入式（3.3-26）中的 qa，就能画出对于给定 V 的式（3.3-26）和 ha 函数的两组曲线。相交的部分就是解。

图 3.11 给出了在 $l=0$ 时，V =2，5 和 8 的图解法得到的模的解。对于左边部分，分母在 $J_0(ha)$ 底部消失。在 ±∞ 处间断点出现在 ha =2.405，5.520，8.654，…分子在 $J_1(ha)$ 底部消失，相应地 ha =0，3.832，7.016，因此，在 ha =0 附近，左半部分是个从零逐渐增加的 ha 函数而且在 ha =2.405 处达到 +∞。对于右半部分，注意到 $K_0(qa)$ 和 $K_1(qa)$ 是正态函数。在 ha =0 附近，右边从一个为 $VK_1(V)/K_0(V)$ 的正值开始，而作为 ha 的函数开始递减，在 $ha=V$ 处为零。结果，即使 V 非常小，总有至少一个交点。当 V 增大时，交点数量也增加。

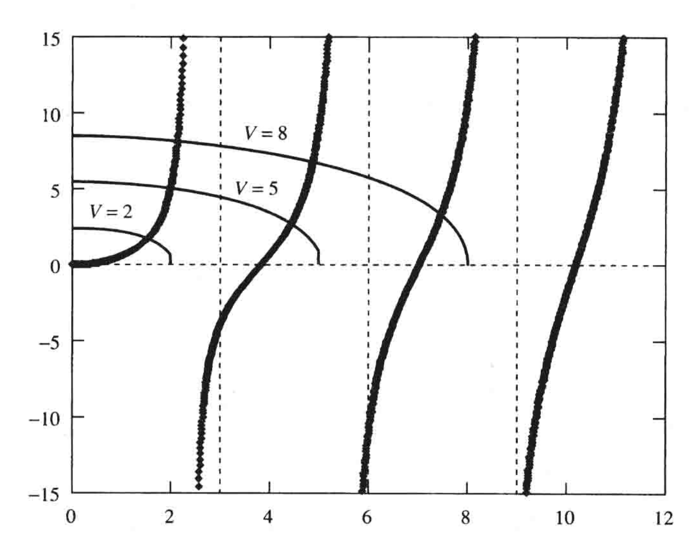


图 3.11　$l=0$ 时图解法确定 LP 模的 ha。式（3.3-26）的左边部分被画成了虚线。右边部分为 V =2,5 和 8。对于 V =2，只有一个解存在（LP_{01} 模）。对于 V=8，有 3 个解 LP_{01}，LP_{02} 和 LP_{03} 模

图 3.12 给出归一化传播常数（有效折射率）与归一化频率 V 的函数关系。可以看出 $V<2.405$ 时，只有一个模式（LP_{01}）。对于 V =6，则有 6 个模式：$LP_{01}, LP_{02}, LP_{11}, LP_{12}, LP_{21}$ 和 LP_{31}。

注意到 LP_{01} 模不管光纤参数 V 为何值总是存在。当 V 增加到 V =2.405 时，LP_{11} 开始出现。因而把 V =2.405 叫做 LP_{11} 模的截止频率。当 V 增加到 V =3.832 时，LP_{21} 和 LP_{02} 开始出现。因而把 V =3.832 叫做 LP_{21} 和 LP_{02} 模的截止频率。一般来说，模的截止条件对应 q=0，按照式（3.3-27），有

$$J_{l-1}(V)=0 \tag{3.3-29}$$

其中 $V=k_0a(n_1^2-n_2^2)^{1/2}=2\pi a(n_1^2-n_2^2)^{1/2}/\lambda$ 是由式（3.3-28）所定义的光纤参数。

最低阶的模对应 l =0，截止频率为如下方程的最小值

$$J_{-1}(V)=-J_1(V)=0 \tag{3.3-30}$$

因此，V=0。换句话说，最低阶的模 HE_{11}，即 LP_{01} 不存在截止频率。与 l =0 对应的下

一 个模的截止频率为 $J_1(V)$ 的下一个零点，V～3.832，这个模标记为 LP_{02} 模。其他几个低阶的 LP_{lm} 模的截止频率 V 在表 3.1 中给出。

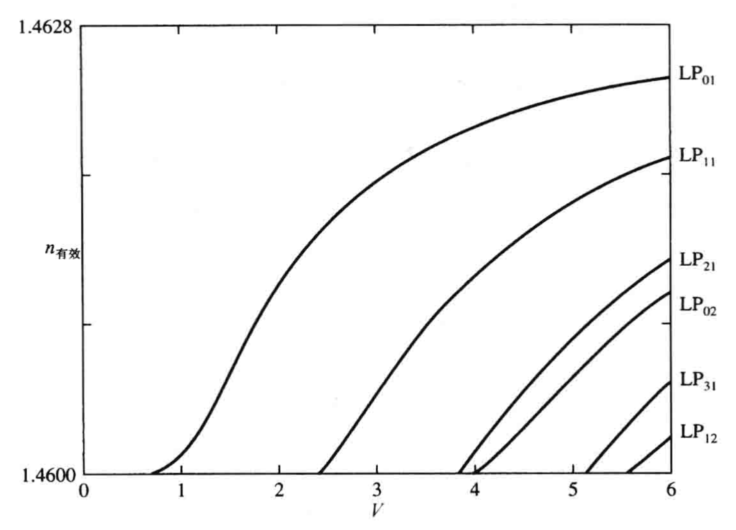


图 3.12　归一化传播常数 b 随光纤中的导模的归一化频率 V 的变化曲线，$n_{有效}=\beta/k_0$。光纤的参数 $n_1=1.4628$，$n_2=1.4600$ 和 $a=4.7\mu m$

表 3.1　几个低阶的 LP 模的截止频率 $V_{截止}$

V_{cutoff}	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$
$l=0$	0	3.832	7.016	10.173
$l=1$	2.405	5.520	8.654	11.792
$l=2$	3.832	7.016	10.173	13.323
$l=3$	5.136	8.417	11.620	14.796
$l=4$	6.379	9.760	13.017	16.224

所有这些值都是贝塞尔函数的零点。按照式（3.3-29）和式（A-13），高阶模的截止频率 V 可由下面的表达式近似求得

$$V(LP_{lm}) \cong m\pi + \left(l - \frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2} \tag{3.3-31}$$

图 3.13 给出了给定 l 时 LP 模的 V 值变化范围，同时也给出了与此对应的精确模 HE，EH，TE 和 TM 模的 V 值变化范围。图 3.14 给出了 LP_{11} 模的模场分布[6]。注意到在芯层里强度分布由两叶组成。这与基模（LP_{01}）有点不同，LP_{01} 在纤芯中具有径向对称分布 $J_0(hr)$。

线偏振模最主要的优点之一是模场基本是横向偏振的，并且由一个横向电场分量（E_x 或 E_y）和一个横向磁场分量（H_y 或 H_x）决定。电场 $\boldsymbol{E}$ 的方向沿任意径向方向，而磁场 $\boldsymbol{H}$ 也沿任意径向但与 $\boldsymbol{E}$ 垂直。一旦选定一个模场，则存在对应的另一个与第一个模场的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 垂直的独立模。

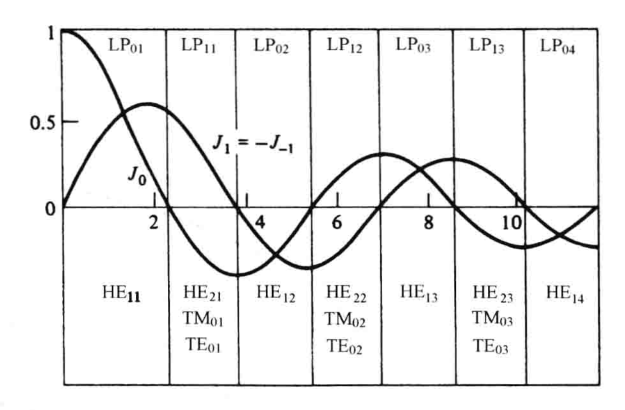


图 3.13　$l=0,1$ 时 LP 模的 V 值变化范围

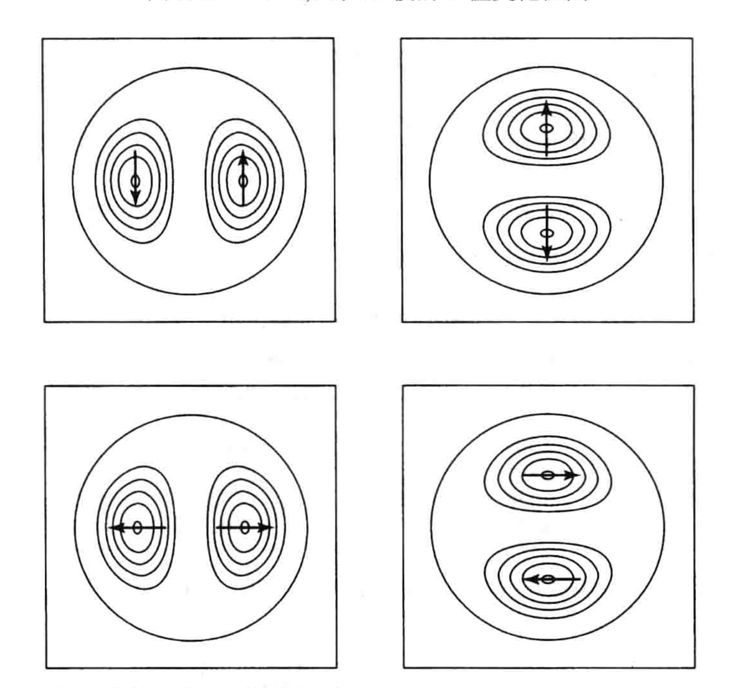


图 3.14　光纤的芯区中 LP_{11} 模的四种可能的场分布。箭头表示电场矢量的偏振

功率流和功率密度

下面导出纤芯和包层中的玻印廷矢量和功率流表达式。根据式（1.3-17），得到沿波导方向的玻印亭矢量的时间平均值为

$$S_z = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[E_x H_y^* - E_y H_x^*] \tag{3.3-32}$$

把场分量表达式（3.3-18）和式（3.3-19）或式（3.3-24）和式（3.3-25）代入式（3.3-32），得到

$$S_z = \begin{cases} \dfrac{\beta}{2\omega\mu}|A|^2 J_l^2(hr), & r < a \\ \dfrac{\beta}{2\omega\mu}|B|^2 K_l^2(qr), & r > a \end{cases} \tag{3.3-33}$$

需要指出，强度分布是圆柱对称（即独立于ϕ）的。注意到简并模的耦合将会导致强度分布由方位角（ϕ）所决定。例如，用$e^{i\phi}$和$e^{-i\phi}$线性耦合LP_{11x}模将导致$\cos^2\phi$或$\sin^2\phi$的强度分布（参照图 3.14）。

芯区和包层的功率分别为

$$P_{纤芯}=\int_0^{2\pi}\int_0^a S_z r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi \tag{3.3-34}$$

$$P_{包层}=\int_0^{2\pi}\int_0^\infty S_z r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi \tag{3.3-35}$$

利用下面贝塞尔函数的积分关系式[7]（参照习题 3.15）

$$\int_0^a rJ_l^2(hr)\,\mathrm{d}r=\frac{a^2}{2}[J_l^2(ha)-J_{l-1}(ha)J_{l+1}(ha)] \tag{3.3-36a}$$

$$\int_a^\infty rK_l^2(hr)\,\mathrm{d}r=\frac{a^2}{2}[-K_l^2(qa)+K_{l-1}(qa)K_{l+1}(qa)] \tag{3.3-36b}$$

功率$P_{纤芯}$和$P_{包层}$可以分别表示为

$$P_{纤芯}=\frac{\beta}{2\omega\mu}\pi a^2|A|^2[J_l^2(ha)-J_{l-1}(ha)J_{l+1}(ha)] \tag{3.3-37}$$

$$P_{包层}=\frac{\beta}{2\omega\mu}\pi a^2|B|^2[-K_l^2(qa)+K_{l-1}(qa)K_{l+1}(qa)] \tag{3.3-38}$$

利用式（3.3-20）和模的特征方程式（3.3-26）、式（3.3-27），功率$P_{包层}$可以表示为

$$P_{包层}=\frac{\beta}{2\omega\mu}\pi a^2|A|^2\left[-J_l^2(ha)-\left(\frac{h}{q}\right)^2 J_{l-1}(ha)J_{l+1}(ha)\right] \tag{3.3-39}$$

对于符合模的特征方程式（3.3-26）或式（3.3-27）的 ha 值，$J_{l-1}(ha)J_{l+1}(ha)$ 总是负的，因此$P_{包层}$通常为正。由于$K_l(qa)$通常为正，因此从式（3.3-26）和式（3.3-27）可以看出$J_{l-1}(ha)J_{l+1}(ha)$为负。根据式（3.3-37）和式（3.3-39），总功率流为

$$P=\frac{\beta}{2\omega\mu}\pi a^2|A|^2\left(1+\frac{h^2}{q^2}\right)[-J_{l-1}(ha)J_{l+1}(ha)] \tag{3.3-40}$$

包层功率与总功率的比率为$\Gamma_2=(P_{包层}/P)$，它表示功率流中包层中所占的比例，根据式（3.3-39）和式（3.3-40），Γ_2由下式给出

$$\Gamma_2=\frac{P_{包层}}{P}=\frac{1}{V^2}\left[(ha)^2+\frac{(qa)^2J_l^2(ha)}{J_{l-1}(ha)J_{l+1}(ha)}\right] \tag{3.3-41}$$

式中，应用了$(ha)^2+(qa)^2=k_0^2a^2(n_1^2-n_2^2)=V^2$。限制因子$\Gamma_1$表示为

$$\Gamma_1=\frac{P_{纤芯}}{P}=1-\Gamma_2=\frac{1}{V^2}\left((qa)^2-\frac{(qa)^2J_l^2(ha)}{J_{l-1}(ha)J_{l+1}(ha)}\right) \tag{3.3-42}$$

图 3.15 给出了几个模式的限制因子$\Gamma_1=P_{纤芯}/P$与归一化频率V的函数关系图。注意到基模LP_{01}被很好地束缚在芯区内。一般来说，对于一个给定模式限制因子$\Gamma_1=P_{纤芯}/P$随V增大而增大。

一般来说，束缚模的限制因子在截止处（$qa=0$）为零。这与前面讨论过的电介质平板波导的情形相似。在$l=0,1$时，这一点也是正确的。对于高阶的LP模，$l>1$，其截止处的限制因子对应于$qa\to 0$。得到截止处限制因子值为

$$\Gamma_1(qa \to 0) = 1 - \frac{1}{l} \quad (\text{for } l > 1 \text{ at cutoff}) \tag{3.3-43}$$

例如，截止处的 LP_{31} 模的限制因子为 $\frac{2}{3}$。习题 3.11 中对高阶的LP模的限制因子做进一步的讨论。

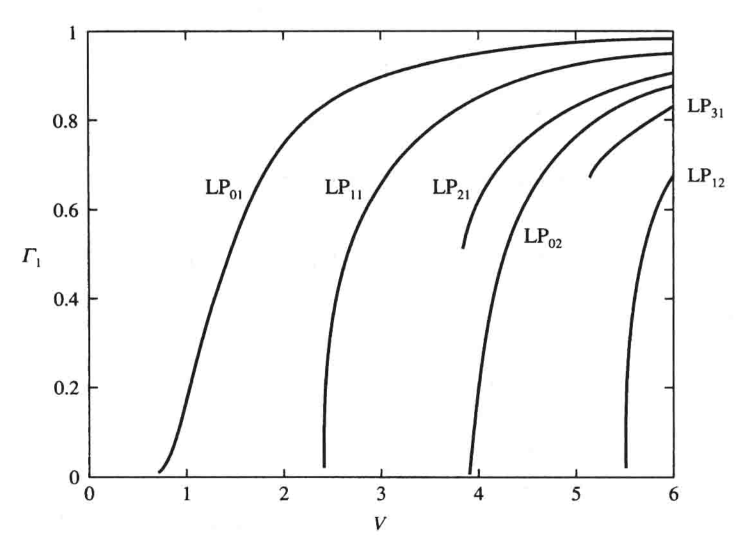


图 3.15　限制因子 Γ_1 与 V 的关系。注意在截止处，$l = 0,1$ 时，LP模的限制因子为零；而 $l = 2$ 时，限制因子为 $\frac{1}{2}$；$l = 3$ 时为 $\frac{2}{3}$；$l = 4$ 时为 $\frac{3}{4}$；以此类推

3.4　等效折射率理论

虽然如电介质平板的层状结构也能够用来做波导，但是对能量的束缚只限于一维。实际上可利用更复杂的波导结构。例如，用在集成光学或导波光学（也叫做平面光集成 PLCs）通常都是二维波导（即沟型波导、脊型波导）。图 3.16 给出了这两种类型的二维波导。除了一些特殊情况，一般不能精确分析处理这些波导结构。虽然通过不同的方法可以获得数值解，但是也有许多的近似分析方法。这里，将介绍其中最简单的一种方法，等效折射率法。

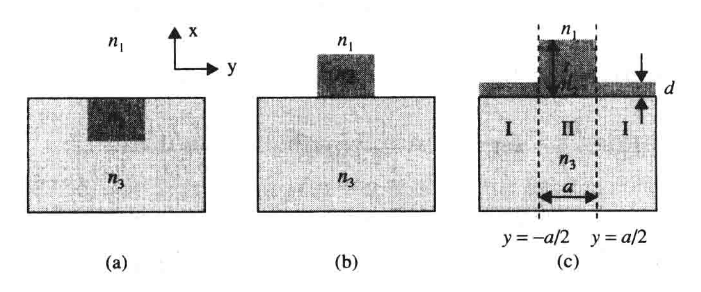


图 3.16　几种不同的二维波导示意图：（a）一个电介质的矩形结构嵌入到另一个低折射率的电介质中；（b）脊型波导结构；（c）另一种脊型结构

由图 3.16（c）讨论脊型波导中的电磁波的传导。图 3.16（b）中的矩形波导可以看做

$d=0$ 时这种波导的一个特例，其中 d 是脊两边传导层的厚度。脊的传导层的厚度为 t，为了研究脊中电磁波的束缚，选择 t 比 d 大。脊的宽度为 a。为了实现束缚传播，折射率 n_2 要比 n_1 或 n_3 大得多。

为了引入等效折射率法，将波导结构分成三个区域，分别为 $y<-\frac{1}{2}a$，$-\frac{1}{2}a<y<\frac{1}{2}a$ 和 $\frac{1}{2}a<y$。在任意区域中，受限传播沿垂直于 x 方向，这与非对称平板波导中的情况是一样的。简单来说，假定所有三个电介质结构区域只能够通过一个 TE 模。尽管如此，由于各层厚度不一样，脊里面的束缚模的传播常数和两边的传播常数不一样。式（3.1-20）中为这三部分的等效折射率的定义

$$n_{有效}=\begin{cases} n_{\mathrm{I}}, & y<-a/2 \\ n_{\mathrm{II}}, & -a/2<y<a/2 \\ n_{\mathrm{I}}, & a/2>y \end{cases} \tag{3.4-1}$$

式中，n_{I} 和 n_{II} 为非对称平板波导的各自的等效折射率。

根据等效折射理论，由式（3.4-1）波导的横截面被当成一个沿 y 方向的“平板”波导结构。因而电磁波的束缚条件需要使 $n_{\mathrm{II}}>n_{\mathrm{I}}$。依据图 3.7，当厚度 t 比 d 大时，任何束缚模的等效折射率是随厚度而增加的函数，这一点是毫无质疑的。为了进一步说明横向传导，考虑下面的例子。

砷化镓脊型波导

设定一个脊型波导由砷化镓层和砷化镓铝基底构成。设折射率为 $n_1=1, n_2=2.5$ 和 $n_3=3.2$。厚度为 $t=0.40\lambda$ 和 $d=0.25\lambda$。由式（3.2-5）的数值解，其有效折射率为

$$n_1=3.301 \text{ 和 } n_2=3.388$$

注意到在脊部每增加折射率 0.087 需要步高为 0.15λ。这样的折射率差异已经足够提供横向波导。事实上，如果取 $a=0.5\lambda$ 作为脊部的宽度，解出的受缚的 TE 模如同一个对称波导，可以得出一个归一化传播常数为 3.348 的单独的 TE 模。这个模式的波函数与图 3.3 给出的基模差不多。这个波函数说明了横向的束缚情况。

注意到有效折射率方法是一个很好的近似方法是很重要的，它提供的芯层和包层的折射率差别是很小的因而标量波近似是有效的。在标量近似中，忽视电介质波载体的性质。

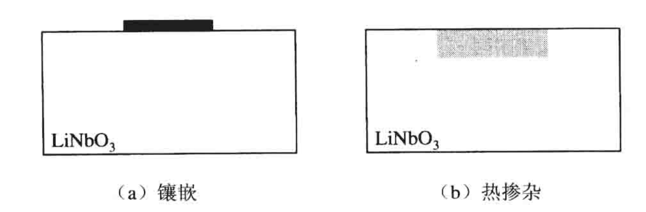
脊型波导或二维波导

图 3.16 描述的脊型波导结构能够通过许多不同的方法获得，包括蚀刻和散射。接下来，将叙述一些在光纤通信中很重要的沟型光波导。

热掺杂

硝酸钾晶体中的沟型光波导能够通过常规的热散射处理来获得。在进行热处理之前，用真空蒸发技术把一层厚度约为 100nm 的钛层沉积在硝酸钾晶片的表面。采用传统的光刻技术，一个平面光电路图便可以刻画出来。晶片在1000℃左右进行热处理一段时间（如 20 小时），加热散射将会使得钛原子迁移到晶体里面。硝酸钾晶体中钛原子的存在将同时增大寻常光和非寻常光的折射率。这将使得钛原子集中的区域产生一个沟型波导。图 3.17 表示了制

备一个钛掺杂的硝酸钾沟型波导的各阶段。



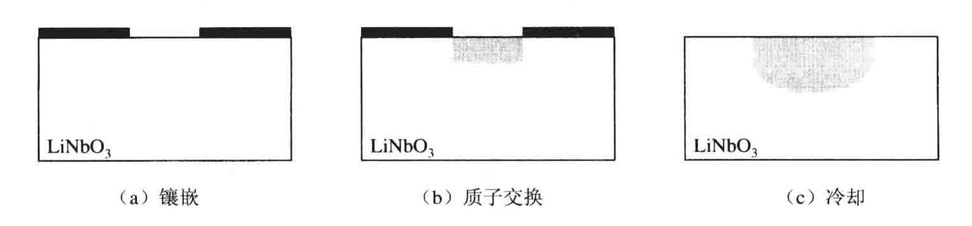
（a）镶嵌　（b）热掺杂

图 3.17　制作钛掺杂的硝酸钾沟型波导的步骤。（a）首先，一层很薄的钛金属沉积在抛光的硝酸钾晶片表面上。这种一个窄带或更复杂的平面光路图可以通过光刻的方法获得。（b）晶片在一个很高的温度先进行热处理。热散射的结果使得钛原子进入晶体内部。这将使芯层的波导环路有一个更高的折射率

硅晶体的沟型波导也能类似地通过使用铅或其他金属的热散射处理来获得。硅中铅原子的存在将增大折射率从而产生一个沟型波导。

铌酸锂晶体中的质子交换

铌酸锂晶体的沟型波导可以通过质子交换处理来获得（参照图 3.18）。首先，一个刻好图案的材料被放置在抛光的铌酸锂晶片表面。沟型波导光路可以用光刻来获得。晶片被浸入能够提供和锂离子交换质子的酸性液体里，同时在表面产生一层薄的质子层。铌酸锂晶体表面的质子在高温锻造的过程中会通过扩散作用渗透到晶体的内部去。一旦冷却，沟型波导将非常稳固。于是，在质子交换区域非寻常光的折射率会增大而寻常光的折射率则会减小。这将产生一个沟型波导，能够支持场 E 沿晶体 c 轴偏振的束缚传播。还有其他可以用来增大折射率和制造光波导的技术。这包括离子注入和溶胶凝胶法。



（a）镶嵌　（b）质子交换　（c）冷却

图 3.18　铌酸锂沟型波导的质子交换制作过程

3.5　光纤中的波导色散

本章到现在，已经讨论了各种各样的光波导，包括介质平板波导和阶跃型光纤。这些波导就折射率方面而言被描述成空间函数。波导中的束缚传播由波动方程决定，一旦波导的折射率分布给出，波动方程就确定波函数和传播常数。波动方程通常写成

$$\left\{\nabla_\perp^2 + \frac{\omega^2}{c^2} n^2(x, y)\right\} E_m(x, y) = \beta_m^2 E_m(x, y) \tag{3.5-1}$$

式中，$\nabla_\perp^2$ 是横向的拉普拉斯算子，$E_m(x, y)$ 是波函数的第 m 个模式，而 β_m 是对应的传播常数。式（3.5-1）可以看做求特征值 β_m^2 的一个特征值方程。考虑一般的传播模式

$$E(x, y, z, t) = E_m(x, y)\exp[i(\omega t - \beta_m z)] \tag{3.5-2}$$

在多模波导中，一般的传播模式可以被写成所有模式的线性组合。

为了方便讨论，定义一个模式的等效折射率为

$$n_{有效} = \frac{\beta_m}{\omega / c} \tag{3.5-3}$$

注意到波函数和传播常数 β_m 是由波导的 $n^2(x, y)$ 和角频率 ω 所决定的，这一点非常重要。对于束缚模来说，等效折射率介于芯层折射率和包层折射率之间。换句话说

$$n_{包层} < n_{有效} < n_{芯区} \tag{3.5-4}$$

对于多模波导，每一个束缚模式都有各自特有的等效折射率。基模有最大的等效折射率。一般来说，每个模式都有各自的相速度和群速度。于是，在多模波导中模间色散产生了。这在 2.9 节中已经讨论过。

在一个多模波导中，如果一个光波（也就是一个脉冲序列）代表了许多模式的叠加，则脉冲在传播过程中将会展宽。展宽由（a）模间色散、（b）波导色散和（c）材料色散所决定。在单模波导中，脉冲展宽由（a）波导色散和（b）材料色散所决定。在这一节中，将讨论单模光纤中的波导色散和脉冲展宽。

阶跃光纤（或平板波导）的等效折射率由光频率 ω 所决定，即使光纤的折射率与光频率 ω 无关。这是由于波导内部的不同波函数和光程是由于不同的频率所造成的。在 3.1-3.3 节（即图 3.12）的色散图钟表示出 $n_{有效}$ 对频率 ω 的依赖性。因此，可以得出

$$n_{有效} = n_{有效}[n_1(\omega), n_2(\omega), \omega] \tag{3.5-5}$$

其中等效折射率通过 $n_1(\omega)$ 和 $n_2(\omega)$ 取决于频率，直接原因是波导色散间接原因是材料色散。

现在来证实这两种色散所做出的贡献。利用微扰理论方法，对波方程式（3.5-1）引入一个很小的频率变量 $\delta\omega$。令 $\delta\beta_m^2$，δn_1^2 和 δn_2^2 分别为第 m 个模相应的传播常数和折射率的变量。从波方程式（3.5-1）得出

$$\delta\beta_m^2 = \Gamma_1 \frac{\omega^2}{c^2}\delta n_1^2 + \Gamma_2 \frac{\omega^2}{c^2}\delta n_2^2 + \Gamma_1 \frac{2\omega\,\delta\omega}{c^2} n_1^2 + \Gamma_2 \frac{2\omega\,\delta\omega}{c^2} n_2^2 \tag{3.5-6}$$

式中，公式右边的前两项由折射率的改变量 δn_1^2 和 δn_2^2 所决定，而后面两项是由频率的变量 $\delta\omega$ 所引入的；限制因子 Γ_1 和 Γ_2 表示为

$$\Gamma_\alpha = \frac{\iint_{n_\alpha} \boldsymbol{E}_m^* \cdot \boldsymbol{E}_m \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_{\infty} \boldsymbol{E}_m^* \cdot \boldsymbol{E}_m \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} \quad (\alpha = 1, 2) \tag{3.5-7}$$

式中，分子中的积分是在折射率为 n_α 的区域之上。

式（3.5-6）也可以写成

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\omega} = \Gamma_1 \frac{\omega}{c}\frac{n_1}{n_{有效}}\frac{\partial n_1}{\partial\omega} + \Gamma_2 \frac{\omega}{c}\frac{n_2}{n_{有效}}\frac{\partial n_2}{\partial\omega} + \frac{1}{c n_{有效}}(\Gamma_1 n_1^2 + \Gamma_2 n_2^2) \tag{3.5-8}$$

式中，为了简单把注脚 m 去掉。公式（3.5-8）能够用在所有模式中。对 β 使用式（3.5-3），式（3.5-8）可以进一步写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}n_{有效}=\Gamma_1\frac{n_1}{n_{有效}}\frac{\partial n_1}{\partial\omega}+\Gamma_2\frac{n_2}{n_{有效}}\frac{\partial n_2}{\partial\omega}+\frac{1}{\omega n_{有效}}\left(\Gamma_1 n_1^2+\Gamma_2 n_2^2-n_{有效}^2\right) \tag{3.5-9}$$

式中，右边前面两项是基于材料色散，而最后一项则是波导色散，它表示在保持芯层和包层折射率不变的前提下，传导模的等效折射率相对于频率的变化。换句话说，导波的色散包含了本身的材料色散和波导色散的总和。因而有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}n_{有效}=\left(\frac{\partial n_{有效}}{\partial\omega}\right)_{材料}+\left(\frac{\partial n_{有效}}{\partial\omega_{波导}}\right) \tag{3.5-10}$$

材料色散由

$$\left(\frac{\partial n_{有效}}{\partial\omega}\right)_{材料}=\Gamma_1\frac{n_1}{n_{有效}}\frac{\partial n_1}{\partial\omega}+\Gamma_2\frac{n_2}{n_{有效}}\frac{\partial n_2}{\partial\omega} \tag{3.5-11}$$

给出；

而波导色散由

$$\left(\frac{\partial n_{有效}}{\partial\omega}\right)_{波导}=\frac{1}{\omega n_{有效}}\left(\Gamma_1 n_1^2+\Gamma_2 n_2^2-n_{有效}^2\right) \tag{3.5-12}$$

给出。

对于用在现代光通信中的单模硅光纤，包层和芯层都由硅做成$n_1\approx n_2$，因而式（3.5-10）～式（3.5-12）可以近似下成

$$\left(\frac{\partial n_{有效}}{\partial\omega}\right)_{材料}=\frac{\partial n}{\partial\omega} \tag{3.5-13}$$

$$\left(\frac{\partial n_{有效}}{\partial\omega}\right)_{波导}=\frac{1}{\omega n_{有效}}\left(n_2^2+\Gamma_1[n_1^2-n_2^2]-n_{有效}^2\right) \tag{3.5-14}$$

式中，n是光纤材料（硅）的折射率，同时使条件$n_2\approx n_{有效}\approx n_1$和$\Gamma_2=1-\Gamma_1$。注意到式（3.5-13）的右边全部是材料色散，而式（3.5-14）则是波导色散。

引用 3.3 节的限制因子，波导色散可以写成（参照习题 3.12）

$$\left(\frac{\partial n_{有效}}{\partial\omega}\right)_{波导}=\frac{1}{\omega n_{有效}}\left(n_{有效}^2-n_2^2\right)\left(\frac{-J_m^2(ha)}{J_{m-1}(ha)J_{m+1}(ha)}\right) \tag{3.5-15}$$

由于$J_{m-1}(ha)J_{m+1}(ha)$对于满足模式条件式（3.3-26）和式（3.3-27）的束缚模来说总是负的，注意到方程式（3.5-15）的右边恒为正。换句话说，等效折射率是频率的递增函数。这与图 3.12 的色散曲线是一致的。

在光网络中，传播模的色散通常写成

$$\frac{\mathrm{d}n_{有效}}{\mathrm{d}\lambda}=\left(\frac{\partial n}{\partial\lambda}\right)_{材料}+\left(\frac{\partial n_{有效}}{\partial\lambda}\right)_{波导} \tag{3.5-16}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}^2 n_{有效}}{\mathrm{d}\lambda^2}=\left(\frac{\partial^2 n}{\partial\lambda^2}\right)_{材料}+\left(\frac{\partial^2 n_{有效}}{\partial\lambda^2}\right)_{波导} \tag{3.5-17}$$

考虑一个光脉冲在长度为L的单模波导中传播。设$n_{有效}$为传播模的等效折射率，输出端

光束的传播相移为$\phi = n_{有效}(\omega / c)L$。可以得出群时延（衰减时间）为

$$\tau = \frac{d\phi}{d\omega} = L\left(\frac{n_{有效}}{c} + \frac{\omega}{c}\frac{dn}{d\omega}\right) = L\left(\frac{n_{有效}}{c} - \frac{\lambda}{c}\frac{dn_{有效}}{d\lambda}\right) \tag{3.5-18}$$

光纤的群速度色散（ps/nm-km）被定义为

$$D = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\tau}{L}\right) \quad (\text{ps/nm-km}) \tag{3.5-19}$$

利用式（3.5-18）和式（3.5-19），可以得出

$$D = -\frac{1}{c\lambda}\lambda^2 \frac{d^2 n_{有效}}{d\lambda^2} \tag{3.5-20}$$

如果波导材料是色散的，根据式（3.5-17），群速度色散D可表示为

$$D = -\frac{1}{c\lambda}\left(\lambda^2 \frac{\partial^2 n_{有效}}{\partial \lambda^2}\right)_{材料} - \frac{1}{c\lambda}\left(\lambda^2 \frac{\partial^2 n_{有效}}{\partial \lambda^2}\right)_{波导} \tag{3.5-21}$$

注意括号里面的的关系式是无单位的。参数D的单位是$\text{s/m} - \text{m}$。为了实际应用，D通常被表示为ps/nm-km。

例：脉冲展宽。

考虑在$\lambda = 1500\text{nm}$处用长为 100km，群速度色散为$D = 17\text{ps/nm-km}$的单模光纤传输10Gb/s的信号。传输距离L后的脉冲展宽将会是

$$\Delta\tau = DL\,\Delta\lambda \tag{3.5-22}$$

式中，$\Delta\lambda$是信号的光谱带宽。对于10Gb/s信号，其脉冲宽度$\tau_0 = 100\text{ps}$。光谱带宽近似为$\Delta\nu = 1/\tau_0 = 10\text{GHz}$。用纳米单位换算，带宽为

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{c}\Delta\nu = 0.075\text{nm}$$

利用式（3.5-22），脉冲展宽为$\Delta\tau = 128\text{ps}$。

图 3.19 给出了芯层直径为9.4μm 掺入二氧化锗的单模硅光纤的硅材料色散、波导色散和总的色散。注意到在$\lambda = 1.3\mu\text{m}$ [8,9]处总色散为零，波导色散既取决于芯层直径a又取决于芯层和包层的折射率n_1和n_2。通过平衡正的材料色散和负的波导色散[10]就能制作出零色散波长。因而，通过选择一个介于 4 到 5 μm 的合适的芯层直径a和一个折射率差关系为$(n_1 - n_2)/n_1 > 0.004$，零色散波长能被平移到波长1.5~1.6μm区域，在这个区域里传播损耗是最小的[11~16]。

到目前为止已经讨论了阶跃型圆光纤。模式的近似解是可以得到的，它们是具有不同折射率的光纤。这些光纤通过设计应用在感兴趣的光波段来提供低损耗或低色散的传播媒介。有些光纤能够在感兴趣的波段上提供一个很宽的零色散区域。图 3.20 给出一些光纤结构示意图。有些结构需要增加折射率不同的包层[17~21]。这一类结构为光纤在特定领域的应用提供了更大的自由度。

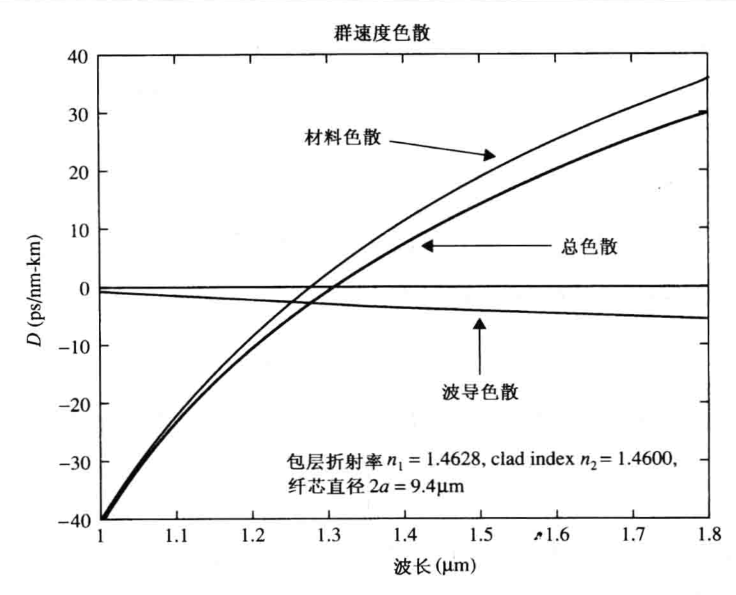


图 3.19　掺入二氧化锗的单模硅光纤在光谱 1～1.8 μm 区域内的硅材料色散、波导色散和总色散

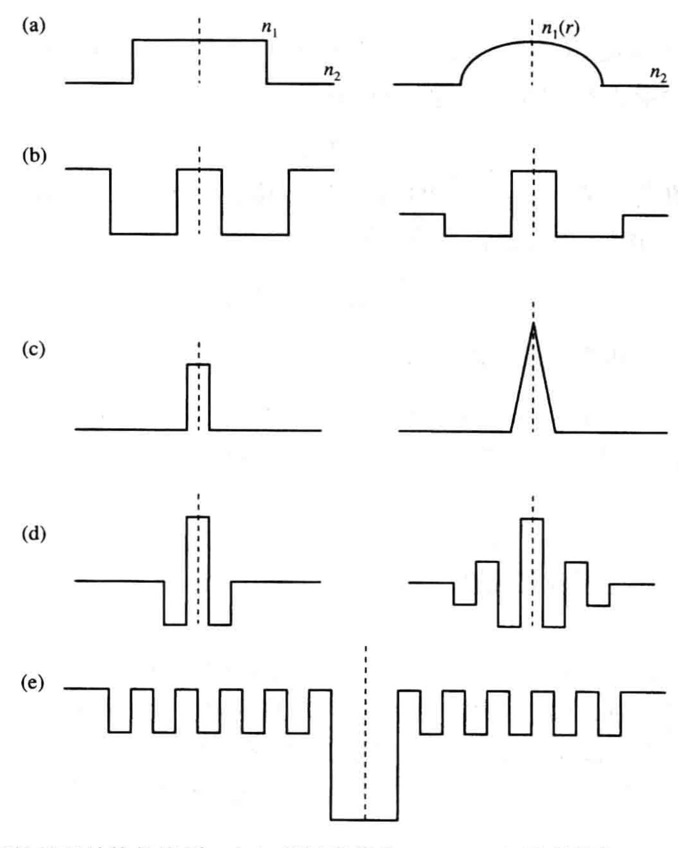


图 3.20　各种不同的外形结构的光纤。(a) 芯层直径为 50 μm，包层直径为 120 μm 的多模光纤。(b) 芯层直径约 10 μm 的单模光纤。(c) 芯层直径为 5 μm 左右的色散位移光纤。(d) 有双包层或三包层而芯层直径为 6 μm 左右的色散平坦光纤。(e) 芯层填充低折射率或为空芯的布拉格光纤

由图 3.19 知道，在 $\lambda = 1550\text{nm}$ 处色散基本上只是材料色散。如果一个光纤能够做成中空的，材料色散实践上会被消除掉。为了支持一个束缚模在低折射率区域传播需要在传播方向有呈周期变化的折射率分布的多包层结构。通过在传播方向的布拉格散射的高反射作用能够提供束缚效果（见图 3.20（e））。这种类型的光纤不在本书的讨论范围，感兴趣的读者可以看参考文献[22]。

3.6 硅光纤中的损耗

传播损耗实际上存在于所有的波导中。由于损耗，信号功率 $P(z)$ 会按下面的方程呈指数衰减

$$P(L) = P(0)\exp(-\alpha L) \tag{3.6-1}$$

式中，$P(0)$ 是输入端的功率，L 是传播的距离，α 是线性损耗系数。在光纤通信领域，损耗的单位是 dB，而损耗系数的单位则是 dB/km。因而每单位长度的信号损耗（dB）被定义为

$$\alpha = \frac{10}{L}\log_{10}\left(\frac{P(L)}{P(0)}\right) \tag{3.6-2}$$

光纤中导致传播损耗的原因有许多。在硅光纤发展的早期，传播损耗主要由于吸收光能量杂质的存在。追溯金属杂质来源，如铁、镍和铬，发现都是在光纤制作过程中被带入的。这些金属中的电子能量的强度由于硅中自由的原子环境而被扩展开。有些电子迁移到传播光束的光谱里面。光束中的光子就被这些迁移电子所吸收。当硅玻璃中出现少量水时，这种吸收作用也会发生。硅玻璃中的水会形成一个硅–氢氧基（Si – OH），它会引起在 $\lambda = 1.4\mu\text{m}$ 左右的吸收作用。

虽然由于 SiO_2 振动而产生的内部吸收在光通信光谱中相对来说影响可以忽视，但是传播损耗却依然存在纯硅光纤中。损耗主要是由于光纤结构制作工艺的不完善和瑞利散射的基本过程而造成的。硅玻璃光纤作为信息传输媒介的另一个最重要的因素是这类光纤中具有最低的光传播损耗。图 3.21 给出了测量得到的高质量、掺锗单模光纤的损耗随波长变化的曲线。由于玻璃中存在残留的 OH，因此损耗峰值在 1.4 μm 附近。在 $\lambda = 1.55\mu\text{m}$ 附近的损耗低达 0.2dB/km。在 1986 年，一个传播损耗只有 0.154dB/km 的光纤问世了[23]。近年来，制造出一种纯硅芯的光纤，折射率分布为图 3.20（d）所示，其在 $\lambda = 1570\text{nm}$ 有一传播损耗为 0.1484dB/km[20,21]。因此，这个波谱对于长距离光纤通信是非常有优势的。最近试验证明，在零群速度色散波长 $\lambda \sim 1.55\mu\text{m}$ 附近可以实现很窄的脉冲展宽和低损耗，从而可以实现高数据速率（超过 400Mb/s）、长距离（超过 100km）传输[24,25]。更长距离和更高速率的传播需要利用光放大器来减少传播过程中的能量损耗，同时使用色散补偿来消除脉冲失真。光纤中光波传播的更详细讨论，学生可以参考文献[26]。

另一种单模光纤中的损耗来源是弯曲损耗。这在光纤网络中通常不是问题，主要是由于网络中的弯曲度一般非常小。而在光灵敏器件如光纤回转仪，几千米的光纤会被绕在只有几分米大的箱子上。这种情况曲率半径就在分米的范围了。在密集波分复用光（DWDM）网络中，有许多有源或无源的元器件会被光纤连接进一个小箱子中去。这种情况下光纤弯曲是不可避免的。为了减少由于弯曲带来的损耗，箱子的曲率半径尽可能地保持大点。在这一节

中，会简单阐述光纤的弯曲损耗。

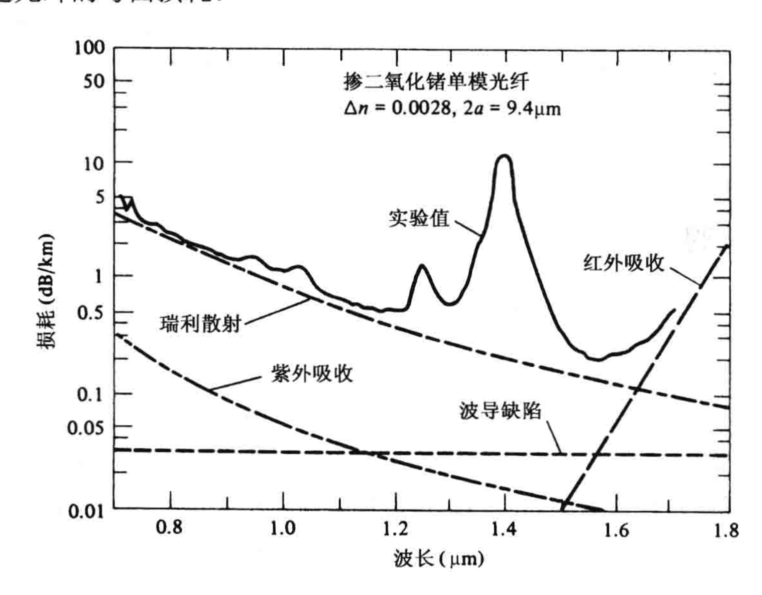


图 3.21　掺锗单模光纤的损耗谱。包括了材料固有的各种效应和波导不完善引起的损耗（引自参考文献[24]）

依据图 3.22，讨论单模光纤中的一个 LP_{01} 模的传播。在直光纤中，场分布在其沿光纤传播时是不变的。当光纤以曲率半径 R 弯曲时，假定光纤的模式仍然是一样的，如果规定曲率半径比芯层半径 a 大得多（也就是 $a << R$）。众所周知弯波导在本质上是泄漏的。泄漏的原因可以如下解释。为了保持弯波导中模式的一致性，模式的波阵面必须以曲率中心 O 为支点，这将会导致一个相速度失调的问题。为了与模式保持一致，靠外面的波阵面速度必须比靠近芯层的快。事实上，在离纤芯为 r' 的地方的波阵面的速度必须为（$1+r'/R$）的 $c/n_{有效}$ 倍。而在一些临界的位置上，这个速度要超过 c/n_2。由于这是不可能的，在这些位置上的场跟辐射模相对应。因而部分能量会逸出波导。这就导致了传播损耗。

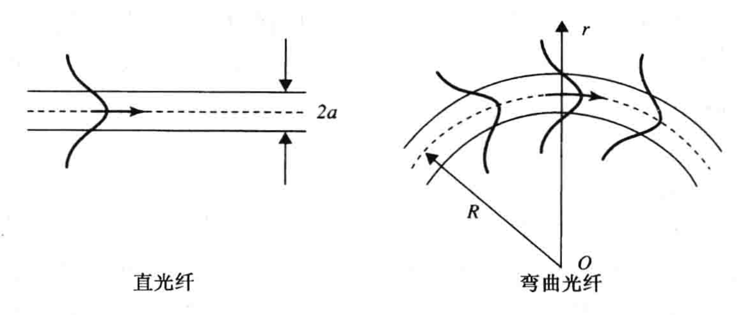


图 3.22　直光纤和弯曲光纤的示意图。为了保持弯曲光纤中的模式，模式靠外的波阵面必须比里面的波阵面的速度快。R 是曲率半径而 r 是以 O 为起点的测量到的径向距离

基于上面的理论和图 3.23 给出示意图，弯波导中的波传播可以用等价的波导来描述。给定传播常数 β，由于靠外的模要走更远的路程和更大的相移，等价波导的折射率可以写成

$$n_{eq}(r') = n(r')\left(1 + \frac{r'}{R}\cos\phi'\right) \qquad (3.6\text{-}3)$$

式中，r' 是距纤芯的径向距离，ϕ' 是在光纤截面测量的方位角。注意径向坐标 r 是从曲率中心 O 开始测量的。图 3.23 是一个等价折射率分布的示意图。水平线表示光纤模式的等价折射率 $n_{有效}$。基于这一章前面的讨论结果，一个束缚模的等价折射率比包层的折射率大。超出临界半径（$r_{临界}$），包层的等价折射率要比等价折射率 $n_{有效}$ 大。这就是传导模变成辐射模的地方。光纤中的传导模穿过了位于芯层边缘和临界半径之间的三角区域。

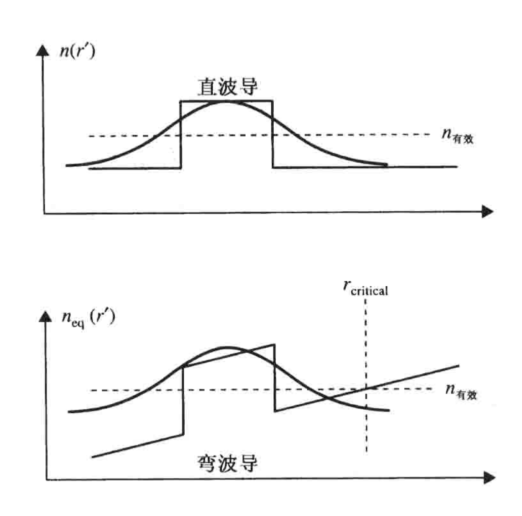


图 3.23　直波导的折射率分布与模式波函数和等价的弯波导的折射率分布。水平线表示光纤模式的等价折射率 $n_{有效}$

图 3.23 给出的等价折射率分布图表明在弯波导中的所有传播模式都是泄漏的。用式（3.6-3）来解等价折射率的波方程需要大量的数值方法。弯波导的损耗系数通常都是通过使用不同的近似方法[27~41]来得到的。这里给出一个由标量衍射理论[27]计算出的结果。在这个近似方法中，假定光在圆光纤的芯层里面传播。圆的半径 R 比芯层半径要大得多（$a \ll R$）。一个光纤的传导模在圆芯里传播。圆光纤表面的传导模场可看做场源，在空间中任意点的相应值都可以通过标量衍射理论得出。在这种情形下这种近似方法是非常有用的，因为感兴趣的是进入远场的辐射功率。此外，标量衍射积分被简化成夫琅和费衍射。基于标量衍射理论，场量 $\psi(\boldsymbol{r})$ 在远场的的任意一点 $\boldsymbol{r}$ 可以写成

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\int_S \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}[i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}\psi(\boldsymbol{r}') - \boldsymbol{n}\cdot\nabla'\psi(\boldsymbol{r}')]\,\mathrm{d}a' \tag{3.6-4}$$

式中，$\boldsymbol{k}$ 是观察方向的波矢，设 $\boldsymbol{r}'$ 是圆光纤表面上任意点的坐标，在点 $\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}$ 所观察到的是垂直于表面 S 的外表面，而 $\psi(\boldsymbol{r}')$ 是在表面 S 上 $\boldsymbol{r}'$ 点的传播模场[42]。对于 $n_{芯区} - n_{包层} \ll 1$ 的光纤，$\psi(\boldsymbol{r}')$ 只是 3.3 节所提到的 LP 模。在 xy 平面的平面，式（3.6-4）可以简化成夫琅和费近似式（2.12-32）。

辐射能量的功率流可以写为场式（3.6-4）的形式

$$\Delta S_r = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\psi^* \frac{i}{\omega\mu}\frac{\partial}{\partial r}\psi\right) = \frac{n_2 k_0}{2\omega\mu}|\psi(\boldsymbol{r})|^2 \tag{3.6-5}$$

式中，假设光纤的包层是无穷的（即如图 3.10，$b=\infty$），$n_2=n_{包层}$是包层折射率，而位置$\boldsymbol{r}$则是远离圆光纤（也就是$R<<r$）。则损耗系数可表示为

$$\alpha=\frac{1}{2\pi RP}\int_{r\to\infty}\Delta S_r r^2\,\mathrm{d}\Omega \tag{3.6-6}$$

式中，$\mathrm{d}\Omega$是立体角的一部分，r是中心到观察点的距离，R是圆环的半径，而P是式（3.3-40）给出的光纤中的模功率。它表示远场的玻印亭功率流ΔS_r会以$1/r$的规律减小。因此积分在$r\to\infty$处收敛。用下降法（鞍点法）并假定$1<<qa<<qR$，损耗系数的近似表达式为[27]

$$\alpha=\frac{e^{2qa}}{\sqrt{\pi qa}}\left(\frac{ha}{n_2V}\right)^2\frac{1}{\sqrt{Ra}}\exp\left(-\frac{2(qa)^3}{3(\beta a)^2}\frac{R}{a}\right) \tag{3.6-7}$$

式中，R是曲率半径，a是光纤的芯半径，而q,h,V和β是在 3.3 节定义的光纤和模式的参数。注意qa，ha，V和βa都是没有单位的参数。由式（3.6-7），弯曲引起的损耗系数跟曲率半径的函数一样呈指数衰减。举个例子，图 3.24 就是方程式（3.6-7）以单模光纤的曲率半径函数画出来的。可以看出只有曲率半径为几分米时弯曲损耗才会出现。

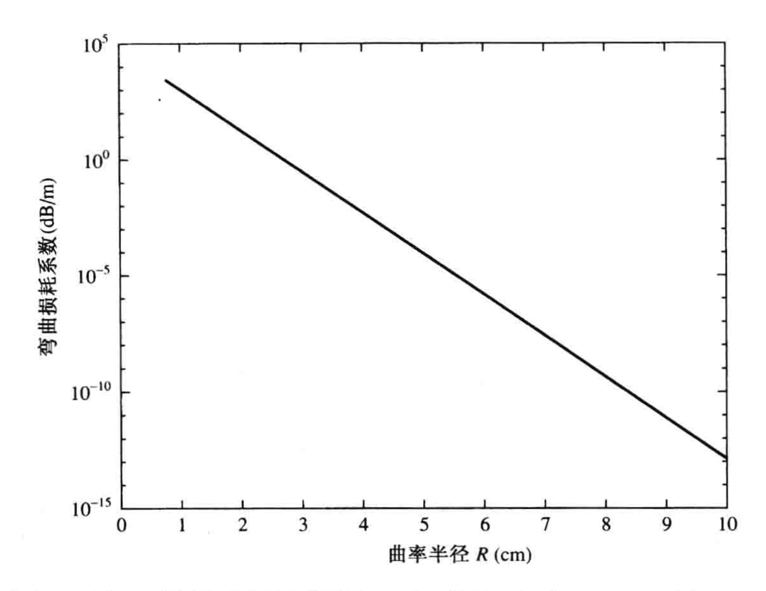


图 3.24　曲率半径的函数跟弯曲损耗系数的关系，利用方程式（3.6-7）的解。用到的光纤参数是：芯折射率$n_1=1.4628$，包层折射率$n_2=1.4600$，芯半径$a=5.49\mu\mathrm{m}$，$\lambda=1.30\mu\mathrm{m}$。这些参数可以得出$V=2.400$，$n_{有效}=1.4614$，$ha=1.6978, qa=1.6969$和$\beta a$=38.777

由式（3.6-7），较大qa的光纤模将会对应较小的弯曲损耗，能通过设计光纤有一个较大的折射率差（n_1-n_2）来实现。在光纤陀螺仪或平面光路（PLCs）中，这些仪器的曲率半径都在分米的范围内，因而需要一个较大的折射率差来减少弯曲损耗。

习题

3.1

（a）证明在满足 $\beta^2 > n^2(\omega/c)^2$ 的层中，波函数 $E(x)$ 至少有一个零点。[提示：利用 $E(x)$ 函数的连续性和 $(1/E)(\partial^2 E/\partial x^2) > 0$]；

（b）证明 $|E(x)|$ 的最大值只存在于满足条件 $\beta^2 > n^2(\omega/c)^2$ 的层中。

3.2　用 Γ_i 表示平板波导中介质 $i(i=1,2,3)$ 的功率流的百分比。特别地，Γ_2 是导波层 n_2 中模式功率流的百分比，通常称为模式限制因子。如果模式的归一化功率流为 1 W，则 Γ 的值可以被定义为

$$\Gamma_i = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_i (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)\bullet\hat{z}\mathrm{d}x, \quad i=1,2,3$$

式中，积分区域与折射率为 n_i 的介质 i 相对应。

（a）证明对 TE 模，有

$$\Gamma_1 = \frac{1/q}{t+1/q+1/p}\frac{h^2}{h^2+q^2}$$

$$\Gamma_2 = \frac{t}{t+1/q+1/p} + \frac{1/p}{t+1/q+1/p}\frac{p^2}{h^2+p^2} + \frac{1/q}{t+1/q+1/p}\frac{q^2}{h^2+q^2}$$

$$\Gamma_3 = \frac{1/p}{t+1/q+1/p}\frac{h^2}{h^2+p^2}$$

注意，$\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3=1$，这可以证明式（3.2-7）。

（b）证明对 TM 模，有

$$\Gamma_1 = \frac{1/q'}{t'+1/q'+1/p'}\frac{h^2}{h^2+q^2}$$

$$\Gamma_2 = \frac{t'}{t'+1/q'+1/p'} + \frac{1/p'}{t'+1/q'+1/p'}\frac{p^2}{h^2+p^2} + \frac{1/q'}{t'+1/q'+1/p'}\frac{q^2}{h^2+q^2}$$

$$\Gamma_3 = \frac{1/p'}{t'+1/q'+1/p'}\frac{h^2}{h^2+p^2}$$

其中 $t'=\dfrac{t}{n_2^2}$，$\dfrac{1}{q'}=\dfrac{q^2+h^2}{\overline{q}^2+h^2}\dfrac{1}{n_1^2 q}$，$\dfrac{1}{p'}=\dfrac{p^2+h^2}{\overline{p}^2+h^2}\dfrac{1}{n_3^2 p}$。

（c）证明 Γ_2 随 β 增加而增加，并有

$$\Gamma_2 \to 1，当 \beta \to \frac{n_2\omega}{c}$$

因而，低阶模比高阶模被更深地束缚，因为低阶模具有更大的传播常数。[提示：利用 $h^2+p^2=(n_2^2-n_3^2)(\omega/c)^2$ 和 $h^2+q^2=(n_2^2-n_1^2)(\omega/c)^2$。]

（d）比较 TE_m 和 TM_m 模式的限制因子 Γ_2。

（e）证明在理想的束缚条件下（也就是 $h\to 0$）

$$\frac{\Gamma_3^{\mathrm{TM}}}{\Gamma_3^{\mathrm{TE}}} = \frac{1+p/q+pt}{1+(n_1^2/n_3^2)(p/q)+(n_1^2/n_3^2)pt}$$

式中， $p=(\omega/c)(n_2^2-n_3^2)^{1/2}$ 和 $q=(\omega/c)(n_2^2-n_1^2)^{1/2}$ 。

3.3　金属与电介质之间的界面可以支持表面波的传播，这被称为表面等离子体。金属的介电常数是负的。

（a）如果认为金属是半无限自由电子云，介电常数为

$$\varepsilon=\varepsilon_0(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2})$$

式中， ω_p 是等离子体频率。表面等离子体模式仅当 $\omega^2<\frac{1}{2}\omega_p^2$ 时存在。在这里，假设电介质折射率满足 $n_1^2=1$ 。当电子云的密度为 N 时，等离子体频率为 $\omega_p^2=Ne^2/m\varepsilon_0$ ， m 是电子的质量。

（b）证明传播常数 β 由

$$\beta=\left(\frac{n_1^2n_3^2}{n_1^2+n_3^2}\right)^{1/2}\frac{\omega}{c}$$

给出。[提示：利用式（3.2-11）证明 β 恒大于 n_1k_0 （也就是 $\beta>n_1k_0$ ）， $n_1^2>0$ 和 $n_1^2+n_3^2<0$ ， $k_0=\omega/c$ 。]

（c）证明 $\beta^2=pq$ 并且两种介质中的电矢量的极化态是相互正交的。

（d）解出坡印亭矢量的 z 分量表达式。证明坡印亭功率流在正负电介质中的方向相反。在 $+z$ 方向沿硅表面传播的等离子体将会是一个负的坡印亭功率流，而在空气中坡印亭功率流则是正的。

（e）在 $\lambda=10\mu\text{m}$ 处，金的复折射率为 $n-ik=7.4-i53.4$ 。求出传播常数 $\beta^{(0)}$ 和等离子体波的损耗系数 α 。

3.4　圆介质波导所能支持的导波模的数目与折射率分布和波长有关。

（a）利用 LP_{lm} 模的截止频率，证明阶跃折射率光纤的模下标（ l ， m ）必须满足以下条件

$$m\pi+(l-\frac{3}{2})\frac{\pi}{2}\leqslant V$$

式中， $V=k_0a(n_1^2-n_2^2)^{1/2}$ 。证明每个 LP_{lm} 模为四重简并的。

（b）以下标（ l ， m ）来计算模的数目，证明阶跃折射率光纤所支持的总的导模数为

$$N\approx\frac{4}{\pi^2}V^2\approx\frac{1}{2}V^2$$

（c）利用式（2.9-15），证明：对于平截平方律折射率光纤，有

$$N\approx\frac{1}{4}V^2\qquad(n(r)=n_2,\quad r>a)$$

注意，平方律折射率光纤的总导模数为阶跃折射率光纤的一半。

（d）估算多模阶跃折射率光纤的导模数。设 $a=50\,\mu\text{m}$ ， $n_1=1.52$， $n_2=1.50$，波长 $\lambda=1\,\mu\text{m}$ 。

（e）设平截梯度折射率光纤的纤芯半径为 a，包层折射率为 n_2 ，等效 V 可以方便地定义为

$$V_{等效}^2 = 2k_0^2\int_0^a [n^2(r) - n_2^2]r\mathrm{d}r$$

且其导模数近似为

$$N \approx \frac{1}{2}V_{等效}^2$$

证明，这一近似表达式与（b）阶跃折射率光纤和（c）平方律折射率光纤的结果一致。

（f）证明：根据（e）的结果，幂指数（指数为 p）折射率分布光纤的导模数由下式给出

$$N = \frac{1}{2(1+2/p)}V^2 = \frac{k_0^2 a^2}{2(1+2/p)}(n_1^2 - n_2^2)\text{。}$$

证明：这一表达式再次与（b）阶跃折射率光纤（$p=\infty$）和（c）平方律折射率光纤（$p=2$）的结果一致。

3.5　数值孔径是光纤接收光的能力的度量。它定义为由全内反射所能接收的入射光线的最大入射角（与轴向夹角）的正弦值。

（a）证明

$$NA = n_1\sin\theta_1 = (n_1^2 - n_2^2)^{1/2}$$

（b）证明空气中的立体接收角为

$$\Omega = n\pi(n_1^2 - n_2^2)^{1/2} = \pi(NA)^2$$

（c）证明单一电磁辐射模出射或入射进纤芯孔径的立体角（空气中）为

$$\Omega_{模} = \frac{\lambda^2}{\pi a^2}$$

（d）设光纤所能支持、耦合或辐射进空气中的模数目为

$$N = 2\frac{\Omega}{\Omega_{模}}$$

—式中，2 表示空气中的两个独立偏振模。证明这一结论近似与习题 3.1 一致。

（e）计算多模光纤的数值孔径。设 $n_1=1.52$，$n_2=1.50$。

3.6　单模阶跃折射率光纤的 V 必须小于 2.405，即

$$V = k_0 a(n_1^2 - n_2^2)^{1/2} < 2.405$$

（a）证明习题 3.4（b）中得到的表达式（$N \cong 4V^2/\pi^2$）依然成立。设单模光纤支持两个独立的偏振模 HE_{11} 模（或 LP_{01} 模）。

（b）设 $a=5\mu m$，$n_2=1.50$，以及 $\lambda=1\mu m$，求单模光纤的最大纤芯折射率。（答案：$n_1=1.50195$。）

（c）设 $n_1=1.501$，$n_2=1.500$，以及 $\lambda=1\mu m$，求单模光纤的最大纤芯折半径。（答案：$a=7\mu m$）

（d）证明：对于单模光纤，纤芯功率与总功率的比率因子为

$$\Gamma_1 = \frac{P_{纤芯}}{P} = \frac{(qa)^2}{V^2}\left(1+\frac{J_0^2(ha)}{J_1(ha)}\right)$$

式中，ha 满足模的特征方程式（3.3-26）

$$ha\frac{J_1(ha)}{J_0(ha)} = qa\frac{K_1(qa)}{K_0(qa)}$$

（e）证明：利用贝塞尔函数表，$ha=1.647$ 是 $V=2.405$ 时的模特征方程的近似解。计算单模光纤LP_{01}模的Γ_1（答案：$\Gamma_1=83\%$）。证明对于单模光纤，这是Γ_1的最大值。比较这个值和图 3.12 中的曲线。

3.7　模的特征方程

（a）推导阶跃光纤的模的特征方程式（B-11）。

（b）根据式（B-12）中的 A，推导常数 B、C、D 的表达式。

（c）推导 TE 与 TM 模的特征方程式（B-17a）和式（B-17b）。

（d）证明：对于 TE 模，$E_z=E_r=0$；对于 TM 模，$H_z=H_r=0$。

（e）证明：当$n_1-n_2<<n_1$，TE 模与 TM 模一致。

3.8

（a）推导式（3.3-6）和式（3.3-7）。

（b）推导式（3.3-18）和式（3.3-19）。

（c）推导式（3.3-23）。

（d）推导式（3.3-24）和式（3.3-25）

3.9　几种对称平板波导的基模的等效折射率有一些近似求法。利用$u=hd/2$和$v=qd/2$，基模的模式条件可以写成$\tan u=v/u$。

（a）证明模式条件还可以写成：$u=V\cos u$，或$v=V\sin u$，或$\tan u=\dfrac{\sin u}{u}V$，其中$V=\sqrt{n_2^2-n_1^2}(\pi d/\lambda)$。

（b）若$u\ll1$，则$u=\arctan V$是一个近似解。证明下式也是一个近似解

$$u=\tan^{-1}\left(\frac{V}{\tan^{-1}V}\frac{V}{\sqrt{1+V^2}}\right)$$

（c）下式也是一个很有用的近似解[43]

$$u^2=\ln\sqrt{1+2V^2}$$

用精确的模式条件绘制$u-v$图来比较（b）和（c）的近似解。证明当$V<2\pi$时，（c）中的近似解是个更准确的的答案。

3.10　基模LP_{01}的传播常数β满足下面的模式条件

$$ha\frac{J_1(ha)}{J_0(ha)}=qa\frac{K_1(qa)}{K_0(qa)}$$

当$V<<1$和$V>>1$推导出β的渐近解。

（a）利用贝塞尔函数的近似形式，证明，对于$v\ll1$，模场条件简化为

$$qa=\frac{2}{\Gamma}e^{-2/V^2}$$

或等价于

$$n_{有效}^2=\left(\frac{\beta}{k_0}\right)^2=n_2^2+\frac{4(n_1^2-n_2^2)}{V^2}e^{-2(2/V^2+\gamma)}$$

式中，γ是尤拉常数，$\gamma=0.5772$，而$\Gamma=\exp(\gamma)=1.782$。注意到当$V$接近零的时候$n_{有效}$渐近于包层折射率$n_2$（参照图 3.12）。

（b）利用贝塞尔函数的近似形式，证明，对于 $V \gg 1$，模式条件可以简化为

$$ha = x_1(1-1/V)$$

$$n_{有效}^2 = \left(\frac{\beta}{k_0}\right)^2 = n_1^2 - \frac{x_1^2}{V^2}(n_1^2 - n_2^2)\left(1-\frac{1}{V}\right)^2$$

式中，$x_1 = 2.405$ 是 $J_0(x)=0$ 的一个根。（提示：参见图 3.11，对于大 V 值的 LP_{01} 模式 ha 近似于 x_1。）

3.11　限制因子 Γ_1 被定义为 $\Gamma_1 = 1-\Gamma_2$，而

$$\Gamma_2 = \frac{P_{包层}}{P} = \frac{1}{V^2}\left((ha)^2 + \frac{(qa)^2 J_l^2(ha)}{J_{l-1}(ha)J_{l+1}(ha)}\right)$$

（a）利用贝塞尔函数的渐近形式，证明，在截止处（$qa \to 0$），限制因子是

$$\Gamma_1 = \frac{l-1}{l} = 1-\frac{1}{l} \qquad 对于 1 \leqslant l$$

$$\Gamma_1 = 0 \qquad 对于 l = 0,1$$

（b）在截止处（$qa=0$），包层波动方程的解不属于贝塞尔函数。由式（A－7），截止处（$qa=0$ 和 $\beta = n_2 k_0$）包层的场波动方程变成

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \left(-\frac{l^2}{r^2}\right)\psi = 0$$

证明 LP 模的 y 偏正振模的解可以写成下面的形式：

$$E_y = \begin{cases} AJ_l(hr)\mathrm{e}^{il\phi}\exp[i(\omega t-\beta z)], & r<a \\ Br^{-l}\mathrm{e}^{il\phi}\exp[i(\omega t-\beta z)], & r<a \end{cases}$$

式中，$B = a^l AJ_l(ha) = a^l AJ_l(V)$ 由芯层边界上的连续性决定。

（c）在包层区域用 $S_z = (\beta/2\omega\mu)|B|^2 r^{-2l}$，求下面积分的值

$$P_{包层} = \int_0^{2\pi}\int_a^{\infty} S_z r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi$$

证明当 $l=0$ 和 1 时，积分会出现偏离。这与限制因子在零处截止是一致的。对于 $l>1$，积分收敛于一个特定值，产生一个在截止处的特定限制因子。

3.12　LP 模的模式条件由式（3.3-26）给出

$$ha\frac{J_{l+1}(ha)}{J_l(ha)} = qa\frac{K_{l+1}(qa)}{K_l(qa)}$$

（a）证明两边的模式条件

$$ha\left(\frac{J_{l+1}(ha)J_{l-1}(ha)}{J_l^2(ha)} - 1\right)\frac{\mathrm{d}(ha)}{\mathrm{d}V} + qa\left(\frac{K_{l+1}(qa)K_{l-1}(qa)}{K_l^2(qa)} - 1\right)\frac{\mathrm{d}(qa)}{\mathrm{d}V} = 0$$

[提示：V 与 ω 成正比。]

（b）利用 $(qa)^2 + (ha)^2 = V^2$ 和（a）中的结果，证明

$$qa\frac{\mathrm{d}(qa)}{\mathrm{d}V} = \Gamma_1 V \text{ 和 } ha\frac{\mathrm{d}(ha)}{\mathrm{d}V} = \Gamma_2 V$$

其中 Γ_1 是限制因子，而 $\Gamma_2 = 1-\Gamma_1$

$$\Gamma_1 = \frac{(qa)^2}{V^2}\left(1 - \frac{J_l^2(ha)}{J_{l-1}(ha)J_{l+1}(ha)}\right)$$

$$\Gamma_2 = \frac{1}{V^2}\left((ha)^2 + \frac{(qa)^2 J_l^2(ha)}{J_{l-1}(ha)J_{l+1}(ha)}\right)$$

（c）利用（a）和（b）的结果和等效折射率的定义 $n_{有效} = \beta/(\omega/c)$，证明

$$\left(\frac{\partial n_{有效}}{\partial \omega}\right)_{波导} = \frac{1}{\omega n_{有效}}\left(\Gamma_1 n_1^2 + \Gamma_2 n_2^2 - n_{有效}^2\right)$$

同时注意等式右边恒为正。

（d）证明

$$\left(\frac{\partial n_{有效}}{\partial \omega}\right)_{波导} = \frac{1}{\omega n_{有效}}\left(n_{有效}^2 - n_2^2\right)\left(\frac{-J_m^2(ha)}{J_{m-1}(ha)J_{m+1}(ha)}\right)$$

证明对于传播模式来说，等式右边恒为正。

3.13

（a）假设 $n=1$（真空）中，求沿 z 轴方向的传播模式。偏微分方程是独立的。你可以假设解为下面的形式：

$$E_z(r,t) = AJ_l(hr)\exp[i(\omega t + l\phi - \beta z)]$$
$$H_z(r,t) = BJ_l(hr)\exp[i(\omega t + l\phi - \beta z)]$$

同时利用

$$E_r = \frac{-i\beta}{\omega^2\mu\varepsilon - \beta^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}E_z + \frac{\omega\mu}{\beta}\frac{\partial}{r\partial\phi}H_z\right)$$

$$E_\phi = \frac{-i\beta}{\omega^2\mu\varepsilon - \beta^2}\left(\frac{\partial}{r\partial\phi}E_z - \frac{\omega\mu}{\beta}\frac{\partial}{\partial r}H_z\right)$$

$$H_r = \frac{-i\beta}{\omega^2\mu\varepsilon - \beta^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}H_z - \frac{\omega\varepsilon}{\beta}\frac{\partial}{r\partial\phi}E_z\right)$$

$$H_\phi = \frac{-i\beta}{\omega^2\mu\varepsilon - \beta^2}\left(\frac{\partial}{r\partial\phi}H_z + \frac{\omega\varepsilon}{\beta}\frac{\partial}{\partial r}E_z\right)$$

（b）解出 TE 模，TM 模和混合模的功率密度和玻印亭矢量的表达式。

（c）画出 $l=0,\pm1,\pm2$ 功率密度和玻印亭矢量分量（S_ϕ, S_z）关于 r 的函数。证明对于 $l \neq 0$，玻印亭功率流沿 z 轴成螺旋形，取决于 l。

（d）利用角动量的定义 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{P}$，其中 $\boldsymbol{P}$ 是习题 1.5 中定义的线性动量，计算沿传播方向（$+z$）的角动量的平均时延。假定电磁波能量归一化为 $\hbar\omega$，证明角动量沿传播方向的分量是 $l\hbar$。

（e）什么是模式的正交关系式？

3.14　利用式（3.1-14）和式（3.1-15），模式条件可以写成

$$[h\tan(\frac{1}{2}hd) - q][h\cot(\frac{1}{2}hd) + q] = 0$$

证明上式可以简化成 $\tan(hd) = 2hq/(h^2 - q^2)$。[提示：$\tan 2\theta = 2\tan\theta/(1-\tan^2\theta)$。]

3.15

（a）利用式（3.3-16）和式（3.3-17），证明：

$$\int rJ_l^2(\alpha r)\mathrm{d}r = \frac{r^2}{2}[J_l^2(\alpha r) - J_{l-1}(\alpha r)J_{l+1}(\alpha r)]$$

（b）同样，证明：

$$\int rK_l^2(\alpha r)\mathrm{d}r = \frac{r^2}{2}[K_l^2(\alpha r) - K_{l-1}(\alpha r)K_{l+1}(\alpha r)]$$

式中，α 是是任一常数。[注意：两边的积分是关于 r 的。]

参考文献

1. Yariv, A., and P. Yeh, *Optical Waves in Crystals*. Wiley, New York, 1984.
2. Yeh, P., *Optical Waves in Layered Media*. Wiley, New York, 1988.
3. Kao, C. K., and T. W. Davies, Spectroscopic studies of ultra low loss optical glasses. *J. Sci. Instrum.* **1**(2):1063 (1968).
4. Kapron, F. P., D. B. Keck, and R. D. Maurer, Radiation losses in glass optical waveguides. *Appl. Phys. Lett.* **17**:423 (1970).
5. Gloge, D., Weakly guiding fibers. *Appl. Opt.* **10**:2252 (1971).
6. See, for example, D. Marcuse, *Theory of Dielectric Optical Waveguides*. Academic Press, New York, 1974.
7. See, for example, I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, New York, 1965, p. 634, Equation (5.54-2).
8. Payne, D. N., and W. A. Gambling, Zero material dispersion in optical fibers. *Electron. Lett.* **11**:176 (1975).
9. Cohen, L. G., and C. Lin, Pulse delay measurements in the zero material dispersion wave length region for optical fibers. *Appl. Opt.* **12**:3136 (1977).
10. Li, T., Structures, parameters, and transmission properties of optical fibers. *Proc. IEEE* **68**:1175 (1980).
11. Cohen, L. G., C. L. Mammel, and H. M. Presby, Correlation between numerical predications and measurements of single-mode fiber dispersion characteristics. *Appl. Opt.* **19**:2007 (1980).
12. Tsuchiya, H., and N. Imoto, Dispersion-free single mode fibers in 1.5 μm wavelength region. *Electron. Lett.* **15**:476 (1979).
13. Cohen, L. G., C. Lin, and W. G. French, Tailoring zero chromatic dispersion into the 1.5–1.6 μm low-loss spectral region of single-mode fibers. *Electron. Lett.* **15**:334 (1979).
14. White, K. I., and B. P. Nelson, Zero total dispersion in step-index monomode fibers at 1.30 and 1.55 μm. *Electron. Lett.* **15**:396 (1979).
15. Gambling, W. A., H. Matsumara, and C. M. Ragdale, Zero total dispersion in graded-index single-mode fibers. *Electron. Lett.* **15**:474 (1979).
16. Bloom, D. M., L. F. Mollenauer, Chinlon Lin, and A. M. Del Gaudio, Demonstration of pulse propagation in km-length fibers. *Opt. Lett.* **4**:297 (1979).
17. Monroe, M., Propagation in doubly clad single mode optical fibres. *IEEE J. Quantum Electron.* **18**(4):535 (1992).
18. Li, Y., C. D. Hussey, and T. A. Birks, Triple-clad single-mode fibers for dispersion shifting. *IEEE J. Lightwave Technol.* **11**:1812 (1993).
19. Li, Y. and C. D. Hussey, Triple-clad single-mode fibers for dispersion flattening. *Opt. Eng.* **33**:3999 (1994).
20. Nagayama, K., T. Saitoh, M. Kakui, K. Kawasaki, M. Matsui, H. Takamizawa, H. Miyaki, Y. Ooga, I. Tsuchiya, and Y. Chigusa, Ultra low loss pure silica core fiber and its impact on submarine transmission systems. *Tech. Digest of OFC2002*, PD FA10 (2002).

21. Nagayama, K., M. Kakui, M. Matsui, T. Saitoh, and Y. Chigusa, Ultra low loss pure silica core fiber and extension of transmission distance. *Electron. Lett.* **38**:1168 (2002).
22. Yeh, P., A. Yariv, and E. Marom, Theory of Bragg fibers. *J. Opt. Soc. Am.* **68**(9):1196 (1978).
23. Kanamori, H., H. Yokota, G. Tanaka, M. Watanabe, Y. Ishiguro, I. Yoshida, T. Kakii, S. Itou, Y. Asano, and S. Tanaka, Transmission characteristics and reliability of pure silica core single-mode fibers. *J. Lightwave Technol.* **4**(8):1144 (1986).
24. Miya, T., Y. Terunuma, T. Hosaka, and T. Miyashita, Ultimate low-loss single-mode fiber at 1.55 μm. *Electron. Lett.* **15**:106 (1979).
25. Suematsu, Y., Long wavelength optical fiber communication. *Proc. IEEE* **71**:692 (1983).
26. Miller, S., and I. P. Kaminow (eds.), *Optical Fiber Telecommunication II*. Academic Press, San Diego, 1988, Chapters 2 and 3.
27. Marcuse, D., Bend loss of slab and fiber modes computed with diffraction theory. *IEEE J. Quantum Electron.* **29**:2957 (1993).
28. Arnaud, J. A., Transverse coupling in fiber optics, Part III: Bending loss. *Bell Syst. Tech. J.* **53**:1379 (1974).
29. Marcatili, E. A. J., Bends in optical dielectric guides. *Bell Syst. Tech. J.* **48**:2103 (1969).
30. Marcuse, D., Curvature loss formula for optical fibers. *J. Opt. Soc. Am.* **66**:216 (1976).
31. Tsao, C., *Optical Fiber Waveguide Analysis*. Oxford University Press, Oxford, UK, 1992, Chapter 11.
32. Lewin, L., Radiation from curved dielectric slabs and fibers. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **22**:718 (1974).
33. Gambling, W. A., D. N. Payne, and H. Matsumura, Radiation from curved single-mode fibers. *Electron. Lett.* **12**:567 (1976).
34. Sakai, J., and T. Kimura, Bending loss of propagation modes in arbitrary-index profile optical fibers. *Appl. Opt.* **17**:1499 (1978).
35. Snyder, A. W., and J. D. Love, *Optical Waveguide Theory*. Chapman & Hall, New York, 1983.
36. Kawakami, S., M. Miyagi, and S. Nishida, Bending losses of of dielectric slab optical waveguide with double or multiple cladding: theory. *Appl. Opt.* **14**:2588 (1975).
37. Vassallo, C., Scalar-field theory and 2-D ray theory for bent single-mode weakly guiding optical fibers. *J. Lightwave Technol.* **3**:416 (1985).
38. Murakami, Y., and H. Tsuchiya, Bending losses of coated single-mode optical fibers. *IEEE J. Quantum Electron.* **14**:495 (1978).
39. Morgan, R., J. S. Barton, P. G. Harper, and J. D. C. Jones, Wavelength dependence of bending loss in monomode fibers: effect of the buffer coating. *Opt. Lett.* **15**:947 (1990).
40. Valiente, I., and C. Vassallo, New formalism for bending losses in coated single-mode optical fibers. *Electron. Lett.* **25**:1544 (1989).
41. Renner, H., Bending losses of coated single-mode fibers: a simple approach. *J. Lightwave Technol.* **10**:544 (1992).
42. See, for example, J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed. Wiley, New York, 1999, p. 491, Equation (10-108).
43. Chen, K.-L., and S. Wang, An approximate expression for the effective index in symmetric DH lasers. *IEEE J. Quantum Electron.* **19**:1354 (1983).

第4章　光学共振腔

4.0　引言

光学共振腔就像微波共振腔，用于产生高强度的单频光束（如激光）。共振腔即光学谐振腔，由两个或多个反射镜构成，用于提供多次反射，准直和会聚光束。在适当的条件下，光束能量可被“俘获”在共振腔中。这种情形下，光束成为共振腔的某一种本征模式。品质因数 Q 是对共振腔的一种普遍通用的度量，它由下列关系所定义：

$$Q=\omega\times\frac{\text{共振腔内所储存的场能}}{\text{共振腔所耗散的功率}} \tag{4.0-1}$$

式中，ω是波的频率。例如，假设一个由相距为 L 的两个理想反射平面组成的简单共振腔中，一个平面波在来回反射，则其间的电场强度是

$$E(z,t)=E_0\sin\omega t\sin kz \tag{4.0-2}$$

式中 E_0 是常数，z 坐标垂直于反射面，ω是角频率，k 是波数。根据第 1 章中的讨论，储存在共振腔中的平均电能是

$$U_{\text{电}}=\frac{A\varepsilon}{2T}\int_0^L\int_0^T E^2(z,t)\mathrm{d}z\mathrm{d}t \tag{4.0-3}$$

式中 A 为横截面积，ε是介电常数，$T=2\pi/\omega$是周期，结合式（4.0-2），得

$$U_{\text{电}}=\frac{1}{8}\varepsilon {E_0}^2V \tag{4.0-4}$$

式中 $V=AL$ 是共振腔的体积，因为储存在腔内的平均磁能与电能相等[1]，总的储存能量为

$$U=\frac{1}{4}\varepsilon E_0^2V \tag{4.0-5}$$

所以在稳态下，输出功率等于耗散功率，若以 P 代表共振腔的输入功率，由式（4.0-1）得到

$$Q=\frac{\omega\varepsilon {E_0}^2V}{4P}$$

电场的峰值为

$$E_0=\sqrt{\frac{4QP}{\omega\varepsilon V}} \tag{4.0-6}$$

注意到电场的振幅正比于品质因数 Q 的平方根。给定输入功率，高品质因数 Q 的共振腔能得到高的电场振幅，或者说高的场强。

光学共振腔中的模密度

为了获得高的频率分辨率，共振腔（谐振腔）的典型尺度与电磁波波长同量级。这一条很重要，确保共振腔在给定的频谱范围内具有极少量（理想情形下仅为 1）的高品质因数 Q

的模式。对微波共振腔，波长在厘米的量级。这个尺度的共振腔是很容易获得的。在光波段，共振腔的尺度在微米量级。微米量级的光学共振腔面临生产工艺的挑战。

例：一维共振腔。

假设一个一维的共振腔，由两个端面镜组成（又称为法布里－珀罗共振腔）。法布里－珀罗共振腔广泛用于多光束干涉。由查理斯·法布里和奥弗雷德·珀罗于 19 世纪早期首次制成。法布里－珀罗干涉仪具有极高的分辨率——大约是光栅分光计（比棱镜分光计的分辨率至少高一个量级）的十倍。当端面反射镜彼此平行放置，被反射的光波在两个反射镜之间连续反射，使由式（4.0-2）所表示的位于反射镜表面的驻波模式得到增强，就像绳上的驻波。驻波能发生的条件是反射镜面间距（也称为谐振腔间距或共振腔的腔长 L）正好是半波长的整数倍。如果共振腔由部分反射的介质反射镜组成，共振腔的腔长是半波长的整数倍，沿轴向传播的入射光在共振腔内多次反射，好像被“俘获”在共振腔内。这种“俘获”作用导致共振腔内建立起很强的场。这种现象通常称为共振。共振频率取决于场在 $z=0$ 和 $z=L$（即端面镜）处为 0。这就有

$$kL = m\pi, \quad m = 1, 2, 3, \cdots$$

令

$$k = \frac{2\pi\nu}{c}n = \frac{2\pi}{\lambda}n$$

式中，n 是折射率，λ是腔内的光波波长，共振条件可写为

$$L = m\frac{\lambda}{2n}$$

式中，m 是整数（m=1,2,3,…）。用光的频率，共振条件又可写为

$$\nu = m\frac{c}{2nL}$$

共振条件确保在腔内连续多次反射。一维共振腔内相邻模式间的频率间隔是$c/2nL$。因此 0 到ν之间的总模式数是$4nL\nu/c$（其中因子 2 计入 2 个正交偏振态）。对于单模（两个偏振模式）工作的共振腔，可得到$L=\lambda/2n$，即线度与波长相当（在介质中）。

光波的模式控制似乎要求共振腔的体积约为λ^3（当$\lambda = 1\mu\text{m}, \lambda^3$约为$10^{-12}\text{cm}^3$）。这一条件不易实现。另一途径是建立大尺度（$L \gg \lambda$）的共振腔，但通过几何形状的控制，仅使很少部分的低损耗（高Q值）的模式存在。在两个镜面组成共振腔例子中，那些不能正常地在镜面间传输的模式将在几次往返后“消失”，并具有低Q值。后面的讨论将表明当共振腔包含放大（反转粒子数）介质，具有高Q值的模式趋于发生振荡，故由控制Q进行模式分辨的策略是切合实际的。我们将发现进一步的模式识别基于原子介质仅在有限的频率范围内能够进行放大性辐射过程，而一旦模式频率超出该范围，即使具有高Q值，也不能形成振荡。

经常被提到的问题是：给定大尺寸（$L \gg \lambda$）光学共振腔，在给定的频率间隔内，如υ到$\upsilon + \Delta\upsilon$范围内，有多少共振模式？要回答这个问题，假设一个大的具有完全反射性的盒状共振腔，沿x, y, z方向的边长为a, b, c。不同形状的共振腔在细节上有所不同，但对于大尺寸的共振腔（$L \gg \lambda$），结果是相同的。不涉及模式的细节，设振幅调制场的解具有如下形式

$$E(x, y, z) = E_0 \sin k_x x \sin k_y y \sin k_z z \tag{4.0-7}$$

其中波矢各分量必满足下列条件

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{\omega}{c} n\right)^2 \tag{4.0-8a}$$

式中，n 是光腔中工作介质的折射率。在边界处，光场趋于 0，故须满足

$$k_x = \frac{r\pi}{a}, k_y = \frac{s\pi}{b}, k_z = \frac{t\pi}{c}, \qquad r,s,t \text{ 为任意整数} \tag{4.0-8b}$$

对于这样的每一个模式，可用一个波矢 $\boldsymbol{k} = \hat{\boldsymbol{x}}k_x + \hat{\boldsymbol{y}}k_y + \hat{\boldsymbol{z}}k_z$ 相对应。下标 r,s,t 定义了一个模式。由于任意整数用它的负值代替，按照式（4.0-7）不会产生一个独立的模式，不失普遍性，规定 r,s,t 为正整数。在 k 空间中可以方便地描述模式分布，如图 4.1 所示。既然每一个格点（r,s,t）对应一个独立模式，在 $\boldsymbol{k}$ 空间可用一个体积元相对应

$$V_{模} = \frac{\pi^3}{abc} = \frac{\pi^3}{V} \tag{4.0-9}$$

式中，V 是共振腔实际体积。波矢 $\boldsymbol{k}$ 的模平方满足式（4.0-8a），将 $\boldsymbol{k}$ 改写为

$$k(r, s, t) = \frac{2\pi\nu(r, s, t)}{c} n \tag{4.0-10}$$

为了计算在 $\boldsymbol{k}$ 空间 $0 \to k$ 波数之间总的模式数，将 $\boldsymbol{k}$ 空间相对应的体积除以每个模式的体积

$$N(k) = \frac{\left(\frac{1}{8}\right)\frac{4\pi}{3}k^3}{\frac{\pi^3}{V}} = \frac{k^3 V}{6\pi^2}$$

式中，因子 1/8 缘于 $r,s,t>0$。

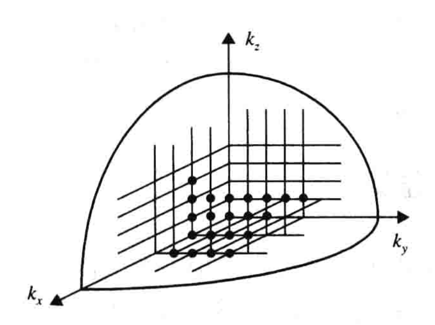


图 4.1　$\boldsymbol{k}$ 空间的模式表示。每一组正整数 r,s,t 定义唯一模式。在 $\boldsymbol{k}$ 空间每个模式与体积元 π^3/abc 相对应

接下来利用式（4.0-10）得到共振频率在 $0 \to \nu$ 之间模式数为

$$N(k) = \frac{4\pi\nu^3 n^3 V}{3c^3}$$

模密度，即共振腔体积 $V(\gg \lambda^3)$ 中，在 ν 附近单位频率内模式数，即

$$p(\nu) = \frac{\mathrm{d}N(\nu)}{\mathrm{d}\nu} = \frac{8\pi\nu^2 n^3 V}{c^3} \tag{4.0-11}$$

最后的结果乘上 2，因为与每一组 r,s,t 相对应的模式有两个独立的正交偏振状态。

中心位于 ν 在 $\mathrm{d}\nu$ 间隔内的模式数为

$$N \cong \frac{8\pi \nu^2 n^3 V}{c^3} \mathrm{d}\nu \quad (4.0\text{-}12)$$

式中 V 是共振腔实际体积。例如 $V=1\mathrm{cm}^3$，$\nu=3\times10^{14}\mathrm{Hz}$，$\mathrm{d}\nu=3\times10^{10}\mathrm{Hz}$，由式（4.0-12）算出 N 约为 2×10^9 个模式。如果共振腔是封闭的，所有的模都会具有相似的 Q 值。在激光器中要避免这种情形，不然的话就会使原子发射功率（可产生振荡）给许多模式，它们的频率各不相同，并且空间特性各不相同。

上述的缺点在很大程度上可由开放式共振腔来克服，它主要由一对面对面的平面或曲面反射镜构成。在这种共振腔内，绝大多数模式并不沿与镜面垂直的方向传输，因此基本上传输一次之后就会消失，导致这些模的 Q 值很小。如果镜面为曲面，横向限制作用是高斯模式：因此由端面镜引起的衍射损耗相对其他损耗机制，如端面镜透射损耗要小。在推导式式（4.0-12）时忽略了折射率 n 与光波频率间的关系。由前面章节所知，折射率与频率 ν 之间存在依赖关系。当由此对应的色散不能忽略，光波模式密度则变为

$$p(\nu) = \frac{\mathrm{d}N(\nu)}{\mathrm{d}\nu} = \frac{8\pi \nu^2 n^2 n_g V}{c^3} \quad (4.0\text{-}13)$$

式中，n_g 是群折射率

$$n_g = n + \nu \frac{\partial n}{\partial \nu} \quad (4.0\text{-}14)$$

本章将讨论光电子学领域中光学共振腔的重要性质。首先由简单平面波分析法布里－珀罗共振腔中的光学特性，讨论光在法布里－珀罗标准具上的反射和透射。接着讨论非对称的法布里－珀罗标准具，包括 GT 标准具和环形标准具，也讨论耦合环形标准具和多腔标准具的光学性质。计入衍射损耗，分析由球面镜组成的光学共振腔内高斯光束；接着推导模式稳定性条件。在设计应用于激光的稳定光学共振腔时，上述模式稳定性条件是必要条件。在本章的最后，我们讨论共振腔中重要概念——模式耦合。

4.1　法布里－珀罗标准具

法布里－珀罗标准具，或称为干涉仪，是用发明人的名字来命名的[3]，它可以看做是光学共振腔的原型，由一厚度为 l 折射率为 n 的平行板插入折射率为 n' 的介质中构成，常用的标准具是由两片距离为 l 的反射镜组成的，因此 $n=n'=1$。另一种常用的标准具是将一透明的固体两面平行地磨平，或磨成曲面，再在面上蒸镀一层或数层金属或介质膜。标准具通常由端面平行的透明的固体材料构成，每个端面都是反射面，而干涉仪（谐振腔）由两个相互平行的反射镜构成，反射镜间是空气。

图 4.2 所示，一束平面波与法线成 θ' 角入射到标准具上。我们对平面波经过标准具透射（或反射）问题的处理，乃是考虑在这两个平面上发生的无穷多次的反射分波。由图 4.3 所示可知，经过一次往返后，两个分波之间的相位延迟为

$$\delta = \frac{4\pi n l \cos\theta}{\lambda} = 2k_x l \quad (4.1\text{-}1)$$

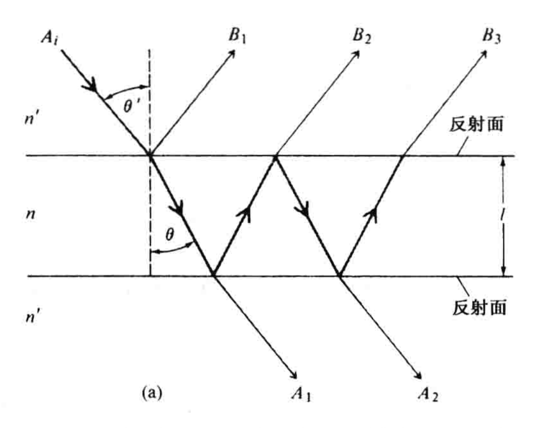


图 4.2　分析法布里－珀罗标准具的多次反射模型

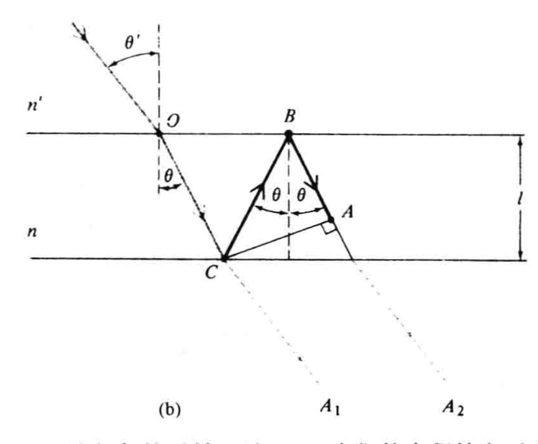


图 4.3　两次相邻的反射 A_1 和 A_2，它们的光程差由下式给出

$$\Delta L = AB + BC = l\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta} + \frac{l}{\cos\theta} = 2l\cos\theta \quad \rightarrow \delta = \frac{-2\pi(\Delta L)n}{\lambda} = \frac{-4\pi nl\cos\theta}{\lambda}$$

式中，λ 为入射波在真空中的波长，θ 为内入射角，k_x 是波矢的 x 分量（x 轴垂直于反射镜）在通常入射情形下，上述相位延迟可简化为 $\delta = 2kl$，其中 k 是在介质中的波数。如果入射波的复振幅是 A_i，那么部分反射波 B_1, B_2 等由下列各式给出

$$B_1 = rA_i \qquad B_2 = tt'r'A_i\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta} \qquad B_3 = tt'r'^3A_i\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\delta}\cdots$$

式中，r 为反射系数的振幅（反射与入射振幅比），t 为透射系数，对应于波从 n' 的介质射入到 n 的平行板；r' 和 t' 对应于波从折射率为 n 的平行板到折射率为 n' 的介质时相应的系数。总反射波的复振幅是 $A_r = B_1 + B_2 + B_3 + \cdots$，或为

$$A_r = [r + tt'r'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}(1 + r'^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta} + r'^4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\delta} + \cdots)]A_i \tag{4.1-2}$$

对于透射波，有

$$A_1 = tt'A_i\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta/2}, \quad A_2 = tt'r'^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}A_i\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta/2}, \quad A_3 = tt'r'^4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\delta}A_i\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta/2},\cdots$$

式中，相位因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta/2}$ 是光线每穿过板内一次时产生的，它对所有项来说都相同，所以在上面各项中都被省略了。若将所有的 A 项相加可得总透射波的复振幅

$$A_t = A_itt'(1 + r'^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta} + r'^4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\delta} + \cdots)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta/2} \tag{4.1-3}$$

注意到，在式（4.1-2）和式（4.1-3）括号中的项形成一无穷几何级数，把它们加起来得

$$A_r = \frac{(1 - e^{-i\delta})\sqrt{R}}{1 - Re^{-i\delta}} A_i \tag{4.1-4}$$

和

$$A_t = \frac{Te^{-i\delta/2}}{1 - Re^{-i\delta}} A_i \tag{4.1-5}$$

上式中用到了在介质界面 $r' = -r$ 这个事实，在无损耗镜上能量守恒，有

$$r^2 + tt' = 1$$

并且定义

$$R \equiv r^2 = r'^2, T \equiv tt'$$

R 和 T 分别为在每个界面处反射和透射强度的比例系数，在下面的讨论中被称之为镜面的反射率和透射率。特别要注意的是 $r' = -r$ 和 $r^2 + tt' = 1$ 只有在两介质的界面处成立。对于镀有介质膜的反射镜，存在类似的关系式，将在 4.9 节中讨论。

如果将入射强度（ W/m^2 ）写成 $A_i A_i^*$，从式（4.1-4）可以得，由标准具反射的反射波与入射波强度之比为

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{A_r A_r^*}{A_i A_i^*} = \frac{4R \sin^2(\delta/2)}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2(\delta/2)} \tag{4.1-6}$$

从式（4.1-5）还可得到透射波与入射波强度之比为

$$\frac{I_t}{I_i} = \frac{A_t A_t^*}{A_i A_i^*} = \frac{(1 - R)^2}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2(\delta/2)} \tag{4.1-7}$$

在我们考虑的基本模型中不计损耗，所以能量守恒要求 $I_r + I_t$ 等于 I_i，显然是成立的。

现在让我们来考虑法布里－珀罗标准具的透射特性。由式（4.1-7）可知，只要

$$\delta = \frac{4\pi nl \cos\theta}{\lambda} = 2m\pi \qquad m = \text{任意整数} \tag{4.1-8}$$

则透射率就等于 1。透射率的极大值条件（4.1-8）还可表示成

$$\nu_m = m\frac{c}{2nl \cos\theta} \qquad m = \text{任意整数} \tag{4.1-9}$$

其中 $c = \nu\lambda$ 为真空中的光速，ν 为光的频率。对于确定的 l 和 θ，式（4.1-9）就确定了透射率为 1 的标准具的（共振）频率。它们之间的频率差被称为自由光谱范围

$$\Delta\nu \equiv \nu_{m+1} - \nu_m = \frac{c}{2nl \cos\theta} \tag{4.1-10}$$

式（4.1-10）推导中假设了折射率 n 是常数。当光谱色散不能忽略，自由光谱范围则为

$$\Delta\nu \equiv \nu_{m+1} - \nu_m = \frac{c}{2n_g l \cos\theta} = \frac{v_g}{2l \cos\theta} \tag{4.1-11}$$

式中，v_g 是介质中光的群速度，n_g 是由式（4.0-14）定义的群折射率。

图 4.4 表示了法布里－珀罗标准具的理论透射曲线。如前所述，透射率的极大值等于 1，透射率的极小值随着 R 趋于 1 而趋于零。

如果考虑标准具介质中的损耗，那么透射率的峰值就会小于 1。令单程强度增益（损耗）为 G，定义为 $G = I_{输出} / I_{输入}$。我们会发现透射率变为

$$\frac{I_t}{I_i} = \frac{A_t A_t^*}{A_i A_i^*} = \frac{(1-R)^2 G}{(1-GR)^2 + 4GR\sin^2(\delta/2)} \tag{4.1-12}$$

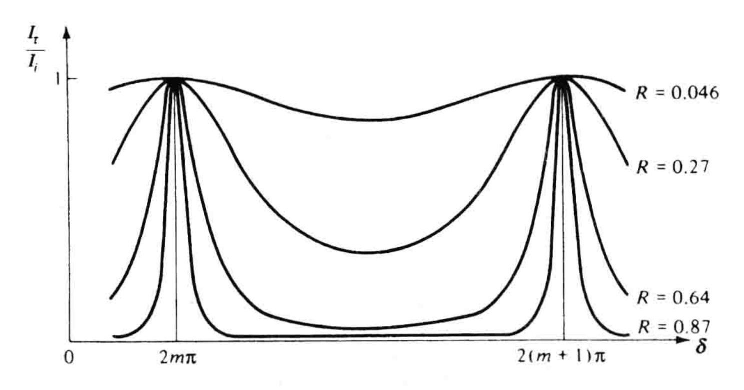


图 4.4　法布里－珀罗标准具的理论透射曲线(引自参考文献[4])

式（4.1-12）的证明见习题 4.2。当存在增益，最大透射率可以大于 1。事实上，当 GR 乘积接近 1 时，最大透射率远大于 1。按照公式（4.1-12），最大透射率可写为

$$\left(\frac{I_t}{I_i}\right)_{最大} = \frac{(1-R)^2 G}{(1-GR)^2} \tag{4.1-13}$$

对于损耗情形，G 小于 1，最大透射率小于 1。

假如损耗基于媒质的线性吸收，吸收系数为α，增益则可表示为

$$G = \exp(-\alpha l) \tag{4.1-14}$$

图 4.5 表示实验测得的法布里－珀罗标准具的透射曲线。

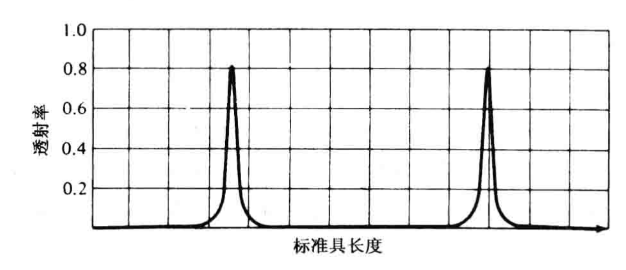


图 4.5　在 632.8nm 处法布里－珀罗标准具的实验透射率与标准具光学长度的函数关系曲线 $R=0.9$，$G=0.98$。图中所示的两个波峰代表光学长度的变化 $\Delta(nl)=\lambda/2$ （引自参考文献[5]）

腔内光场

前面早就提到过腔内光场强度由共振吸收建立。现在验证腔内的光场。设定 I_i 为入射光光强，I_0 为透射光光强。在法布里－珀罗标准具内，电场强度可表示为强度为 I_1（沿+x 方向传播）右行波和为强度为 I_2（沿$-x$ 方向传播）左行波的总和。如果光腔内的工作媒质无损耗，腔内的坡印廷矢量可写为上述两束行波坡印廷矢量的代数和。设定 I_1 和 I_2 与对应行波的坡印廷矢量同量级。进一步假定反射镜无损耗，上述光强间的关系表示为

$$I_0 = \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R\sin^2(\delta/2)} I_i \tag{4.1-15}$$

$$I_0 = TI_1 = (1 - R)I_1 \tag{4.1-16}$$

$$I_2 = RI_1 \tag{4.1-17}$$

式中，R 是镜面反射率，而 T=1−R 是镜面透射率。按照这些公式，共振状态下（$\delta = 2\pi, 4\pi, \cdots$）腔内光强可表示为

$$I_1 = \frac{1}{(1 - R)} I_i, \quad I_2 = \frac{R}{(1 - R)} I_i \tag{4.1-18}$$

右行波和左行波在腔内形成干涉（驻波）模式（见图 4.6）。腔内存在的光波模式的光强可表示为

$$I(x) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(2kx + \alpha_0) \tag{4.1-19}$$

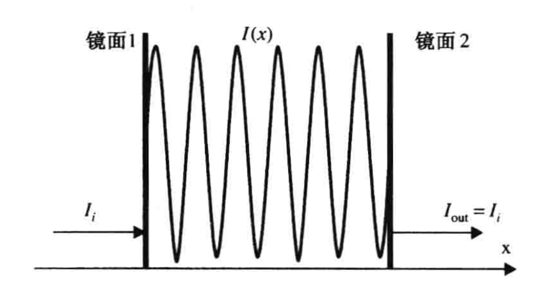


图 4.6　共振状态下腔内光强分布图

式中，k 是腔内的波数，α_0 是由于从光腔端面镜反射而引起的各种可能的相移而对应的常数相位。按照式（4.1-18）和式（4.1-19），很容易地将腔内平均光强表示为

$$I_{平均} = \frac{1+R}{1-R} I_i \tag{4.1-20}$$

若端面镜反射率 R=0.99，在共振状态下出现最大透射，法布里－珀罗标准具的腔内光强是入射光强的 199 倍。

如图 4.4 所示，透射光谱受到调制。透射的极大值出现在腔长是半波长的整数倍时的共振态上。除了透射光谱受到调制，透射波的相移分布谱也受调制。在共振状态下，相位偏移特别显著。这与腔内自建场的场强有关。定义 ϕ 为腔内单程相移（即 $\phi = \delta / 2$）。

根据式（4.1-5），标准具的透射系数可表示为

$$t_e = \frac{T\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}}{1 - R\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\phi}} = |t_e|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi} \tag{4.1-21}$$

式中，ψ 是透射波的相移，可表示为

$$\psi = \phi + \arctan\left(\frac{R\sin 2\phi}{1 - R\cos 2\phi}\right) \tag{4.1-22}$$

下面验算 ψ 关于角频率 ω 的微分

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\omega} = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\omega} \tag{4.1-23}$$

在物理上，相移的角频率微分就是行程时间（或称为群时延）。如果记

$$\tau_e = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\omega} \quad 和 \quad \tau = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\omega} \tag{4.1-24}$$

式中，τ 是在腔内媒质中的单程传输时间，τ_e 是穿过标准具的行程时间，则可得到

$$\tau_e = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\phi}\tau \tag{4.1-25}$$

因此 $\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}\phi$ 可看作穿过标准具的行程时间的增强因子。作微分运算，可得到

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\phi} = \left(\frac{1+R}{1-R}\right) \qquad 当\ \phi = \pi, 2\pi, 3\pi, \cdots \tag{4.1-26}$$

将上述的两个公式联立，可得

$$\tau_e = \left(\frac{1+R}{1-R}\right)\tau \qquad 当\ \phi = \pi, 2\pi, 3\pi, \cdots \tag{4.1-27}$$

注意到行程时间（群时延）在共振状态下被因子 $(1+R)/(1-R)$ 增强。若端面镜反射率 R=0.99，在共振状态下群时延被增强 199 倍。这与共振状态下腔内的能量密度的增加是一致的。在一个无损耗系统中，坡印廷矢量是恒定的。如果将坡印廷矢量表示为能量密度和光速的乘积，当能量密度高的区域光的有效速度一定变低。

非对称法布里－珀罗标准具

大多数用于光谱分析的法布里－珀罗标准具由两个面对面放置的理想介质反射镜构成。反射镜通常在具有光学平面的介质固体上涂敷多层介质层而制成。对称的标准具具有很高的等强干涉有效数，对特殊波长透射率的极大值可达 100%。一般地，标准具可由两个具有不同反射率的反射镜构成。图 4.7 是非对称法布里－珀罗标准具的示意图，端面反射率分别为 R_1 和 R_2。非对称法布里－珀罗标准具一种极端的情形是 GT 标准具，其中 $R_2=1$。

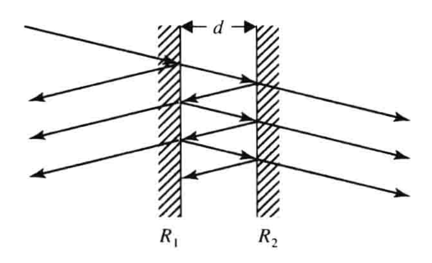


图 4.7　非对称法布里－珀罗标准具示意图，端面反射率分别为 R_1 和 R_2，腔长为 d

由式（4.1-2）和式（4.1-3）应用类似的分析方法，可得到

$$A_r = \{r_1 + t_1 t_1' r_2' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}[1 + r_1' r_2' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta} + (r_1' r_2' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta})^2 + \cdots]\}A_i \tag{4.1-28}$$

$$A_t = t_1 t_2' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta/2}[1 + r_1' r_2' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta} + (r_1' r_2' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta})^2 + \cdots]A_i \tag{4.1-29}$$

其中

$$\delta = \frac{4\pi n d \cos\theta}{\lambda} = 2k_x d \tag{4.1-30}$$

这里 n 是腔内媒质的折射率，k_x 是波矢的 x 分量，d 是腔长，$r_1, r_1', r_2, r_2', t_1, t_1', t_2, t_2'$ 是镜面的反射系数和透射系数。各反射系数和透射系数对应于入射光在标准具中的往返过程。每个镜面对应的四个系数一般均为复数。它们与物理学的基本原理有关，包括互易性和时间反

转系统（见习题 4.16）。在物理上，δ是标准具内往返一次对应的相移。

对无穷几何级数累加，可得到标准具反射系数和透射系数分别为

$$r \equiv \frac{A_r}{A_i} = r_1 + \frac{t_1 t_1' r_2' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}}{1 - r_1' r_2' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}} = \frac{r_1 + (t_1 t_1' - r_1 r_1') r_2' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}}{1 - r_1' r_2' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}} \tag{4.1-31}$$

$$t \equiv \frac{A_t}{A_i} = \frac{t_1 t_2' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta/2}}{1 - r_1' r_2' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}} \tag{4.1-32}$$

对于由无损耗材料制成的介质反射镜，反射系数和透射系数与斯托克斯关系式[6]有关（见习题 4.16 和 4.18）。应用斯托克斯关系式和式（4.1-31）及式（4.1-32），标准具的强度透射系数和反射系数可写为

$$T_{\text{标准具}} = \frac{|A_t|^2}{|A_i|^2} = \frac{(1 - R_1)(1 - R_2)}{(1 - \sqrt{R_1}\sqrt{R_2})^2 + 4\sqrt{R_1}\sqrt{R_2}\,\sin^2(\phi)} \tag{4.1-33}$$

$$R_{\text{标准具}} = \frac{|A_r|^2}{|A_i|^2} = \frac{(\sqrt{R_1} - \sqrt{R_2})^2 + 4\sqrt{R_1}\sqrt{R_2}\,\sin^2(\phi)}{(1 - \sqrt{R_1}\sqrt{R_2})^2 + 4\sqrt{R_1}\sqrt{R_2}\,\sin^2(\phi)} \tag{4.1-34}$$

式中，R_1 和 R_2 是端面反射率，相位 ϕ 可表示为

$$2\phi = \delta + \rho_1' + \rho_2' \tag{4.1-35}$$

式中，ρ_1' 和 ρ_2' 分别是从反射镜 1 和 2 反射而对应的相移（即 $r_1' = \left|r_1'\right|\exp\left(-i\rho_1'\right)$ 和 $r_2' = \left|r_2'\right|\exp\left(-i\rho_2'\right)$。注意到标准具的反射率和透射率都是 ϕ 的周期函数，而 ϕ 是角频率 ω 的线性函数。对于无损耗的反射镜，$R_1 + T_1 = 1$ 和 $R_2 + T_2 = 1$，可简示为

$$T_{\text{标准具}} + R_{\text{标准具}} = 1 \tag{4.1-36}$$

上式与能量守恒一致。注意到按照公式（4.1-34）仅当 $R_1 = R_2$ 时可存在零反射的标准具，也就是说零反射（透射率极值为 1）仅存在于对称法布里－珀罗标准具的共振态中。

法布里－珀罗标准具中的吸收

透射率极值为 1 仅存在于反射镜和腔内媒质无损耗的情形。实际中，光通过标准具的透射率由于腔内的材料吸收、腔内或端面镜的散射损耗和端面镜中材料吸收而减少。用 α 表示腔内媒质的强度衰减系数（或增益 $\alpha < 0$）。标准具的强度透射系数和反射系数可写为

$$T_{\text{标准具}} = \frac{|A_t|^2}{|A_i|^2} = \frac{(1 - R_1)(1 - R_2)\mathrm{e}^{-\alpha L}}{(1 - \sqrt{R_1}\sqrt{R_2}\,\mathrm{e}^{-\alpha L})^2 + 4\sqrt{R_1}\sqrt{R_2}\,\mathrm{e}^{-\alpha L}\,\sin^2(\phi)} \tag{4.1-37}$$

$$R_{\text{标准具}} = \frac{|A_r|^2}{|A_i|^2} = \frac{(\sqrt{R_1} - \sqrt{R_2}\,\mathrm{e}^{-\alpha L})^2 + 4\sqrt{R_1}\sqrt{R_2}\,\mathrm{e}^{-\alpha L}\,\sin^2(\phi)}{(1 - \sqrt{R_1}\sqrt{R_2}\,\mathrm{e}^{-\alpha L})^2 + 4\sqrt{R_1}\sqrt{R_2}\,\mathrm{e}^{-\alpha L}\,\sin^2(\phi)} \tag{4.1-38}$$

式中，L 是存在强度衰减的媒质的长度。式（4.1-37）和式（4.1-38）是非对称法布里－珀罗标准具透射率和反射率的常用表示形式，可用于分析我们感兴趣的一些特殊情形。

如果定义 $1-A$ 为腔内单程损耗，则 $A = \exp(-\alpha L)$。根据式（4.1-37），共振态下的透射率可表示为

$$\left(T_{\text{标准具}}\right)_{\text{共振}} = \frac{|A_t|^2}{|A_i|^2} = \frac{(1 - R_1)(1 - R_2)A}{(1 - \sqrt{R_1}\sqrt{R_2}\,A)^2} \tag{4.1-39}$$

与式（4.1-13）一致。

GT 标准具

非对称法布里－珀罗标准具的很特殊的一类称为 GT 标准具（GTEs）。这类标准具的后端面镜的反射率为 100%（$R_2 = 1$），则各波长的光都被反射，假设结构无损耗（$\alpha = 0$）后端面镜没有任何光透出。图 4.8 表示了 GT 标准具示意图。

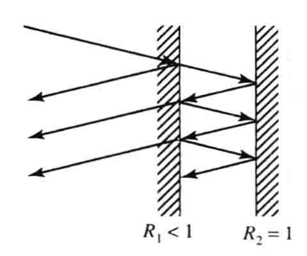


图 4.8　GT 标准具（GTEs）示意图

在无损耗的结构中，GT 标准具是全通反射器，后端面镜没有任何光透出。不失普遍性，令 $r_1' = -r_1 = \sqrt{R}$，　$r_2' = 1$，并且式（4.1-31）给出了 $t_1 t_1' - r_1 r_1' = 1$，可得到

$$r_{标准具} = \exp(-i\phi) = \frac{-\sqrt{R} + e^{-2i\phi}}{1 - \sqrt{R}e^{-2i\phi}} \tag{4.1-40}$$

式中，相位 ϕ 由式（4.1-35）给出。当反射镜的相移可忽略，相位（对应标准入射情形）可表示为

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} nd = \frac{\omega}{c} nd \tag{4.1-41}$$

式中 d 是镜面间距，n 是媒质的折射率。按照式（4.1-40）GT 标准具的相移可表示为

$$\Phi = 2\arctan\left(\frac{1+\sqrt{R}}{1-\sqrt{R}}\tan\phi\right) \equiv 2\arctan(\sigma\tan\phi) \tag{4.1-42}$$

其中

$$\sigma = \frac{1+\sqrt{R}}{1-\sqrt{R}} \tag{4.1-43}$$

图 4.9 表示了标准具的相移与 ϕ 间的函数关系，而 ϕ 正比与频率。注意到 $\phi = \pi, 2\pi, 3\pi, \cdots$ 时共振态出现强烈的相位偏移。

作关于 ω 的微分，得到

$$\frac{d\Phi}{d\omega} = \frac{d\Phi}{d\phi}\frac{d\phi}{d\omega} = \frac{2\sigma}{1+(\sigma^2-1)\sin^2\phi}\frac{d\phi}{d\omega} = \frac{\sigma}{1+(\sigma^2-1)\sin^2\phi}\tau_0 \tag{4.1-44}$$

式中，$\tau_0 = 2d\phi/d\omega$ 是当前端面镜的反射率为 0 时标准具往返一次的群时延。如果忽略后端面镜引起的相移，则 $\tau_0 = 2d/v_g = 2n_g d/c$，其中 v_g 是端面镜间的媒质中的广的群速度，n_g 是对应的群折射率。式（4.1-44）表示了当前端面镜的反射率有限时从标准具端面反射而形成的时延（群时延）。式（4.1-44）中的无量纲系数 $\sigma/[1+(\sigma^2-1)\sin^2\phi]$ 正好是图 4.9 所示的标准具相移曲线斜率的一半。注意到共振态中当 $\phi = \pi, 2\pi, 3\pi, \cdots$ 时相移曲线斜率达到极大值

2σ，当$\phi = m\pi + \pi/2$（m 是整数）时相移曲线斜率达到极小值$2/\sigma$。按照式（4.1-43），σ是前端面镜反射率的单调递增函数。在共振状态下，标准具的群时延为$\sigma\tau_0$，在腔内场能建立起来。图 4.10 表示了标准具的群时延与ϕ 的函数关系，其中ϕ 正比于频率。当前端面镜的反射率$R = 0.8$，群时延为$18\tau_0$。

当$\phi = m\pi + \pi/2$（m 是整数），标准具的群时延为τ_0/σ。这就是反谐振态，腔内出现相消干涉。

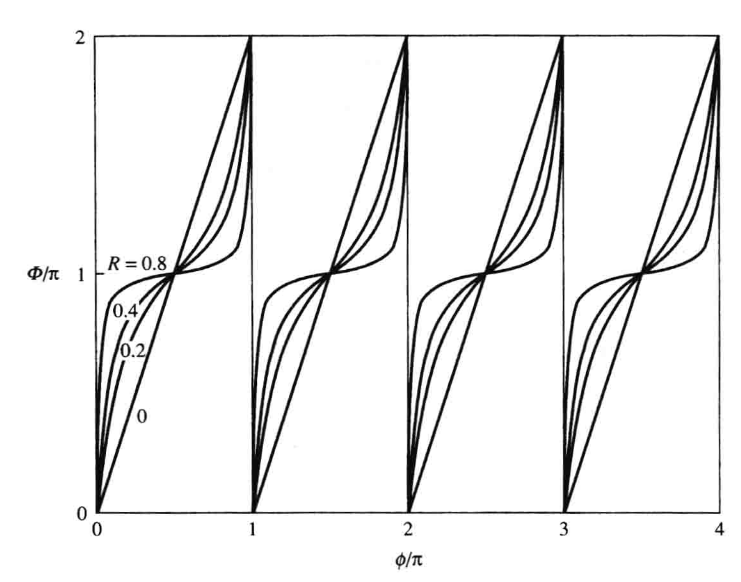


图 4.9　标准具的相移与ϕ 的函数关系，其中ϕ 正比于频率。前端面镜的反射率 $R = 0,0.2,0.4,0.8$

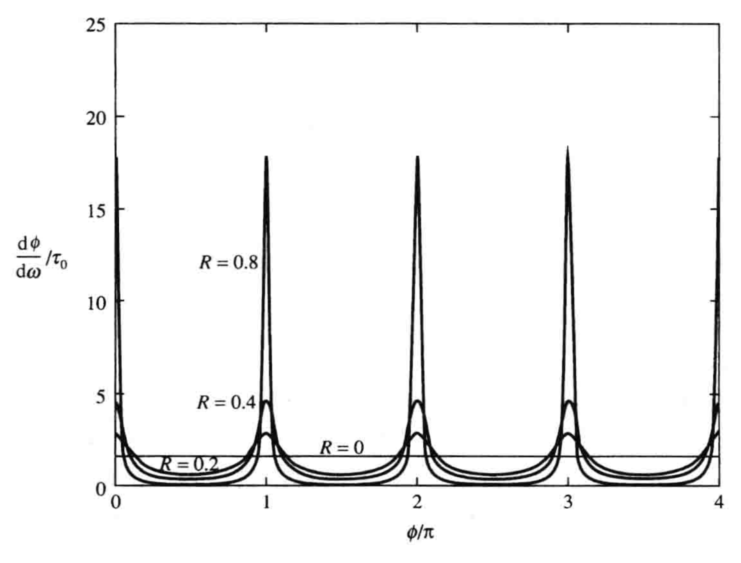


图 4.10　以τ_0归一化的标准具的群时延与ϕ 的函数关系，其中ϕ 正比于频率。前端面镜的反射率 $R = 0,0.2,0.4,0.8$

4.2　用作光谱分析仪的法布里－珀罗标准具

由式（4.1-8）可知，法布里－珀罗标准具的透射率极大值的条件是

$$\frac{2nl\cos\theta}{\lambda}=m \tag{4.2-1}$$

为简单起见考虑垂直入射（$\theta=0°$）的情形，当长度变化为 $\mathrm{d}l$ 时，我们可获得在某一透射峰值处共振频率变化 $\mathrm{d}\nu$ 的表达式为

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\Delta\nu}=-\frac{\mathrm{d}l}{(\lambda/2n)} \tag{4.2-2}$$

其中 $\Delta\nu$ 为相邻峰值的频率差，由式（4.1-10）给出。由式（4.2-2）可知，如果我们将标准具的长度改变半个波长，就会使它的峰值频率变化 $\Delta\nu$，这个特性使标准具可作为扫描干涉仪来使用。改变标准具的长度并进行扫描，就可对穿过它的光信号进行分析。如果透射波峰的宽度比入射光束信号的光谱细节窄，那么标准具的输出就足以代表信号的光谱分布。在上述应用中有一点是很重要的，即光束信号的光谱宽度必须小于标准具的相邻模式间的间隔（$c/2nl$），这样可以避免同时有多个透射波穿过而引起的混乱。同理，扫描总长度应限于 $\mathrm{d}l<\lambda/2n$。图 4.11 为一扫描法布里－珀罗标准具的工作原理示意图，图 4.12 给出了光强与频率间的数据关系，它是通过分析多模 He-Ne 激光器在近 632.8nm 处振荡时的输出光波而得到的，图中峰值相应于激光器的纵模，这一点将在 4.5 节讨论。

从上面的讨论可以清楚地看到，将标准具当做频谱分析仪使用时，它的分辨率——即区别光谱细节的本领——受其透射波峰有限宽度的限制。如果（有些随意性）[①]将标准具的有限分辨率规定为透射值下降到峰值一半时两边的频率之差 $\Delta\nu_{1/2}$，那么由式（4.1-7）可得

$$\sin^2\left(\frac{\delta_{1/2}-2m\pi}{2}\right)=\frac{(1-R)^2}{4R} \tag{4.2-3}$$

式中，$\delta_{1/2}$ 相当于两个半功率点的 δ 值，也就是式（4.1-7）中的分母等于 $2(1-R)^2$ 时的 δ 值。如果假设 $(\delta_{1/2}-2m\pi)\ll\pi$，使图 4.4 中表示的高透射区的宽度小于峰值间距，则有

$$\Delta\nu_{1/2}=\frac{c}{2\pi nl\cos\theta}(\delta_{1/2}-2m\pi)\simeq\frac{c}{2\pi nl\cos\theta}\frac{1-R}{\sqrt{R}} \tag{4.2-4}$$

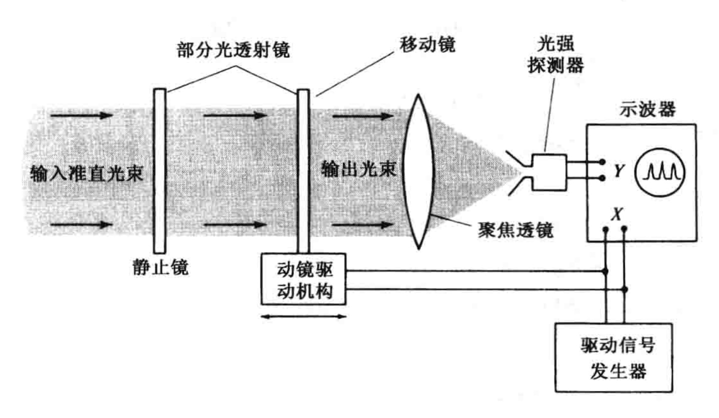


图 4.11　典型的扫描法布里－珀罗干涉仪的实验装置

① 有关分辨率定义的更完整的讨论，见参考文献[4]。

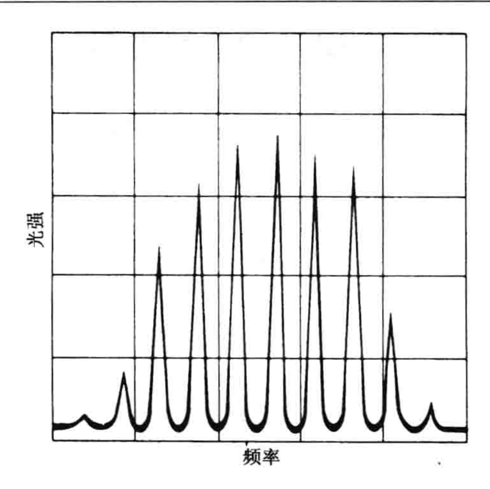


图 4.12　用扫描法布里－珀罗标准具获得的 He-Ne 632.8nm 激光器输出的光强与频率的关系。水平坐标尺度为 250MHz/div

结合式（4.1-10）将标准具的细度定义为

$$F \equiv \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R} \tag{4.2-5}$$

可以得到有限分辨率的表达式

$$\Delta\nu_{1/2} = \frac{\Delta\nu}{F} = \frac{c}{2nl\cos\theta F} \tag{4.2-6}$$

由式（4.2-6）可知，细度 F（用以度量法布里－珀罗标准具的分辨率）是透射峰值间距与透射带宽的比值。该比值可以直接从图 4-4 所表示的透射特性曲线获得，得到 $F \simeq 26$。

例：法布里－珀罗标准具的设计。

现在设计一个法布里－珀罗标准具，用来研究 He-Ne 激光器的模式结构。假设 $l_{激光器}$=100cm，振荡频率范围$=\Delta\nu_{增益}=1.5\times10^9\,\text{Hz}$。

因为标准具的自由光谱范围（模间距）必须大于振动频率范围，所以由式（4.1-10）得到

$$\frac{c}{2nl_{标准具}} \geqslant 1.5\times10^9\,\text{Hz} \quad 或 \quad 2nl_{标准具} \leqslant 20\text{cm} \tag{4.2-7}$$

激光器共振腔的纵模间距是 $c/2nl_{激光器}$=1.5×10^8 Hz（假设 n=1），选取标准具的分辨率为该值的十分之一，所以它能分辨出 1.5×10^7 Hz 的光谱细节，由式（4.2-6）可知，满足上述分辨率的要求则应

$$\Delta\nu_{1/2} = \frac{c}{2nl_{标准具}F} \leqslant 1.5\times10^7\,\text{Hz} \quad 或 \quad 2nl_{标准具}F \geqslant 2\times10^3\,\text{cm} \tag{4.2-8}$$

为了满足式（4.2-7）的条件，选取 $2nl_{标准具}=20\text{cm}$，于是

$$F \geqslant 100 \tag{4.2-9}$$

式（4.2-8）就能得到满足。由式（4.2-5）可知，细度为 100 时，相应的镜面反射率约为 97%。

在实际应用中需要指出，由式（4.2-6）的第一个等式所定义的细度不仅依赖于 R，而且

与镜面的平坦度以及光束的角发散有关，这些问题留待习题 4.3 和 4.4 中讨论。

另外一种使用法布里－珀罗标准具来完成的重要的光谱分析的方式是基于下列事实，一非单色入射光束入射标准具后，将会同时沿许多不同的θ方向射出来[②]，角度θ对应于式（4.1-8）所述的不同的阶次m。如果用透镜对输出光进行聚焦，每一个θ方向的光束就会在透镜的焦面上形成一个圆环，于是光束中包含的频率成分就形成一族圆环。这种频谱分析的方式在瞬态条件下特别有用，因为瞬态下不适于用扫描标准具。在习题 4.6 中对此有更深入的讨论。

4.3　球面镜光学共振腔

本节将讨论由两个相对的球面镜组成的光学共振腔的特性，参阅参考文献[7]和[8]，我们将证明共振腔内电场的解为传播着的高斯光束，这在第 2 章中曾讨论过，因此先总结一下这种光束的特点。

式（2.8-1）给出了各种（l,m）横模的电场分布公式

$$E_{l,m}(\boldsymbol{r}) = E_0 \frac{\omega_0}{\omega(z)} H_l\left(\sqrt{2}\,\frac{x}{\omega(z)}\right) H_m\left(\sqrt{2}\,\frac{y}{\omega(z)}\right) \times \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{\omega^2(z)} - ik\frac{x^2+y^2}{2R(z)} - ikz + i(l+m+1)\eta\right) \tag{4.3-1}$$

其中光斑大小$\omega(z)$是

$$\omega(z) = \omega_0\left[1+\left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]^{1/2}, \quad z_0 = \frac{\pi\omega_0^2 n}{\lambda} \tag{4.3-2}$$

ω_0是光斑大小的极小值，它是光束的一个特性参量。波前的曲率半径是

$$R(z) = z\left[1+\left(\frac{\pi\omega_0^2 n}{\lambda z}\right)^2\right] = \frac{1}{z}[z^2+z_0^2] \tag{4.3-3}$$

相位因子η表达式如下

$$\eta = \arctan\left(\frac{\lambda z}{\pi\omega_0^2 n}\right) \tag{4.3-4}$$

$R(z)$的符号规则是，当曲面中心位于波前的左方则取正号，相反则取负号，根据式（4.3-1）和式（4.3-2），光束强度（W/m^2）为某一给定值时，轴上的各点形成的轨迹是一个双曲面

$$x^2+y^2 = 常数\times\omega^2(z) \tag{4.3-5}$$

图 4.13 表示了上述双曲面与z轴所在平面的交截线形成的双曲线。这些双曲线垂直于波前，因此它们对应于能流方向。由式（4.3-1）可知，在轴上电场强度振幅的指数因子减小到$1/e$时，相应各点的轨迹为双曲面$x^2+y^2=\omega^2(z)$。所以ω（z）这一物理量被定义为在平面z处的光斑大小。

由式（4.3-1）所描述的光束，可以在z_1和z_2处配置两个反射面，并使它们的曲率半径与该处传播光束的球形波前的曲率半径相等，从而形成一个光学共振腔。因为反射面与能量传

② 每一个方向上的θ在三维空间中相当于一个半顶角为θ的锥面。

播方向互相垂直，如图 4.13 所示，所以反射光束沿原路返回。于是当两个镜面间的相移为 2π的整数倍时，就会形成自再现的稳定场分布。

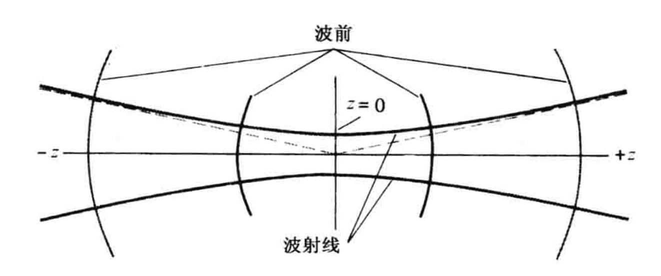


图 4.13　双曲面代表传播方向，近球形相位面代表反射面的可能位置。任意两个反射面形成的共振腔具有由式（4.3-1）给出的横向电场分布

换一种说法，给定两个曲率半径为 R_1 和 R_2 距离为 l 的球面镜，在稍后将推导的特定条件下，可以调节 $z=0$ 的位置以及 ω_0 的参量，使镜面和传播光束的两个球形波前互相重合，而这个传播光束是由 z=0 的束腰位置以及 ω_0 决定的。如果进一步使镜面的尺寸增大到足以使基横模（$l=m=0$）包含的大部分入射光束能量（例如 99%），我们就能使该模比其他高阶的横模具有更大的 Q 值，这从图 2.7 可以看到，因为这些高阶横模的电场偏离轴更远，最终“溢”出镜面边缘从而损失大部分能量（衍射损耗）。

光共振腔的代数运算

如上所述，可以用两个反射镜组成一个光共振腔，其中一个反射镜位于 z_1 处，另一个位于 z_2 处，并使它们的曲率半径与两点处的光束波前的曲率半径相等。这样，由式（4.3-1）决定的传播光束模式就会在两个反射镜之间来回反射而在横向分布上不发生变化，所需曲率半径可由式（4.3-3）给出

$$R_1 = z_1 + \frac{z_0^2}{z_1}$$

$$R_2 = z_2 + \frac{z_0^2}{z_2}$$

从而得到

$$z_1 = \frac{R_1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{R_1^2 - 4z_0^2}$$
$$z_2 = \frac{R_2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{R_2^2 - 4z_0^2} \qquad (4.3\text{-}6)$$

对于给定的光斑大小的极小值 $\omega_0 = (\lambda z_0 / \pi n)^{1/2}$，可由式（4.3-6）求得镜面的位置及其相应的曲率半径 R_1 和 R_2。实际上，我们常遇到的是给定了镜面曲率半径 R_1 和 R_2 及其间距 l，问题就变成了寻求光斑大小的极小值 ω_0，它相对于反射镜的位置、以及镜面处光斑的大小 ω_1 和 ω_2。令镜面间距 $l = z_2 - z_1$，可由式（4.3-6）解出

$$z_0^2 = \frac{l(-R_1 - l)(R_2 - l)(R_2 - R_1 - l)}{(R_2 - R_1 - 2l)^2} \qquad (4.3\text{-}7)$$

其中 z_2 位于 z_1 的右方（所以 $l = z_2 - z_1 > 0$），而且当曲率中心处于镜面左方时将曲率半径取作正值。

光斑大小的极小值是 $\omega_0 = (\lambda z_0 / \pi n)^{1/2}$，它的位置由式（4.3-6）决定，至于镜面处光斑大小可由式（4.3-2）计算出。

对称反射镜共振腔

值得一提的是，在 z=0 两边对称地放置两个镜面所形成的共振腔这种特殊情形。根据对称性，平面波前位于 z=0，即光斑大小的极小值处。令式（4.3-7）中 $R_2 = -R_1 = R$，得

$$z_0^2 = \frac{(2R - l)l}{4} \tag{4.3-8}$$

且

$$\omega_0 = \left(\frac{\lambda z_0}{\pi n}\right)^{1/2} = \left(\frac{\lambda}{\pi n}\right)^{1/2} \left(\frac{l}{2}\right)^{1/4} \left(R - \frac{l}{2}\right)^{1/4} \tag{4.3-9}$$

将 $z = l/2$ 代入式（4.3-2），即可得到镜面光斑大小的表达式

$$\omega_{1,2} = \left(\frac{\lambda l}{2\pi n}\right)^{1/2} \left(\frac{2R^2}{l(R - l/2)}\right)^{1/4} \tag{4.3-10}$$

与式（4.3-9）相比可知，当 $R \gg l$，$\omega_{1,2} \approx \omega_0$ 时，共振腔内光束的发散很小。

对于给定的 l，可以由式（4.3-10）得到 $R = l$ 时，镜面的光斑大小为极小值。这个条件得以满足的情形被称为对称共焦共振腔，因为距离镜面为 R/2 的两个焦点互相重合。由式（4.3-9）得

$$(\omega_0)_{共焦} = \left(\frac{\lambda l}{2\pi n}\right)^{1/2} \tag{4.3-11}$$

而由式（4.3-10）得

$$(\omega_{1,2})_{共焦} = (\omega_0)_{共焦}\sqrt{2} \tag{4.3-12}$$

所以光斑大小从中心到镜面处增加了 $\sqrt{2}$ 倍。

例：对称共振腔的设计。

现在我们来设计一个 $\lambda = 10^{-4}$cm，镜面间距 l=2m 的对称光共振腔。如果将共焦的几何条件选为 $R = l = 2$m，那么共振腔中心的光斑大小的极小值可由式（4.3-11）及 n=1，求出

$$(\omega_0)_{共焦} = \left(\frac{\lambda l}{2\pi n}\right)^{1/2} = 0.0564\text{cm}$$

再结合式（4.3-12）可知，镜面处光斑大小是

$$(\omega_{1,2})_{共焦} = (\omega_0)\sqrt{2} \cong 0.0798\text{cm}$$

其次假定要求镜面光斑大小 $\omega_{1,2} = 0.3$cm，把此值代入式（4.3-10）并假定 $R \gg l$，得到

$$\frac{\omega_{1,2}}{(\lambda l / 2\pi n)^{1/2}} = \frac{0.3}{0.056} = \left(\frac{2R}{l}\right)^{1/4}$$

所以

$$R \approx 400l \approx 800\text{m}$$

可见 $R \gg l$ 的假设是成立的。光斑大小的极小值 ω_0 可由式（4.3-2）及式（4.3-8）求得

$$\omega_0 = 0.994\omega_{1,2} \approx 0.3\text{cm}$$

所以，要想使镜面处光斑大小由极小值（共焦腔）0.0798cm 增大到 0.3cm，必须采用近似平面的反射镜（$R=800\text{m}$）。同时它还表明，即使镜面曲率小（即大的 R）的反射镜也会产生窄的光束。

上述数值例同样适用于平面镜位于 $z=0$ 处的情形。光束的情形与该例中对称共振腔相应的半边光束相同，所以平面反射镜上的光斑大小是 ω_0。

4.4 模的稳定性判据

光共振腔对低（衍射）[③]损耗模式的影响与镜面间距和它们的曲率半径 R_1 和 R_2 有关。为了阐明这一点，首选考虑对称共振腔 $R_2=-R_1=R$ 的情形。

对于给定的 l/R 值，镜面光斑大小与相应共焦极小值（$l/R=1$）下光斑大小的比值，可以由式（4.3-10）与式（4.3-12）之比得到

$$\frac{\omega_{1,2}}{(\omega_{1,2})_{共焦}}=\left[\frac{1}{(l/R)[2-(l/R)]}\right]^{1/4} \tag{4.4-1}$$

该比值的曲线如图 4.14 所示。对于 $l/R=0$（两平行平面镜），或 $l/R=2$（两共心反射镜），光斑大小趋于无穷大。显而易见，在这两种情形下衍射损耗极高，因为大部分光束能量会从镜面边缘溢出。由表 2-1 可知，因为高斯光束在曲率半径为 R 的镜面上的反射等价于穿过焦距 $f=R/2$ 的透镜的传播，所以共振腔中存在稳定且受限的光学模式的问题形式上与高斯光束在双周期透镜序列中传播存在稳定解的问题相同，这种情形见图 4.15。在 2.1 节曾对上述情形进行过讨论，并导出了稳定性条件式（2.1-16）。

如果分别用 $R_1/2$ 和 $R_2/2$ 取代式（2.1-16）中的 f_1 和 f_2，我们就会得到光共振腔的稳定性条件[④]

$$0\leqslant\left(1-\frac{l}{R_1}\right)\left(1-\frac{l}{R_2}\right)\leqslant 1 \tag{4.4-2}$$

用图 4.16 表示出稳定性条件式（4.4-2）[8]。举例来说，由该图可知，对称共心腔（$R_1=R_2=l/2$）、共焦腔（$R_1=R_2=l$）以及平行平面腔（$R_1=R_2=\infty$）都靠近非稳定区，因此只要不稳定方向上的参量有些微小偏离就会引起极大的损耗。

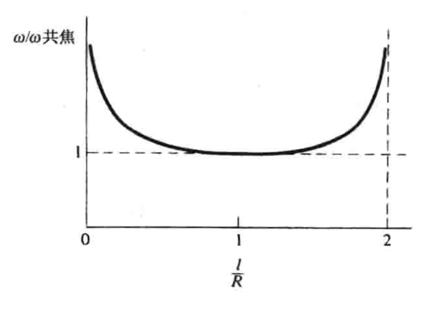


图 4.14　在对称共振腔镜面处光束的光斑大小与共焦腔（$l/R=1$）镜面光斑大小之比值

③ 衍射损耗是指由于光束的发散[见式（2.5-18）]，一部分高斯光束的能量因溢出镜面边缘未被反射，从而损失掉了。

④ 这样就造成 R_1 和 R_2 的符号规则与上节中所用的不同，R 的符号与等效透镜的焦距的符号相同，于是当镜面 1（或 2）的曲率中心在镜面 2（或 1）的方向上时，R_1（或 R_2）为正，反之为负。

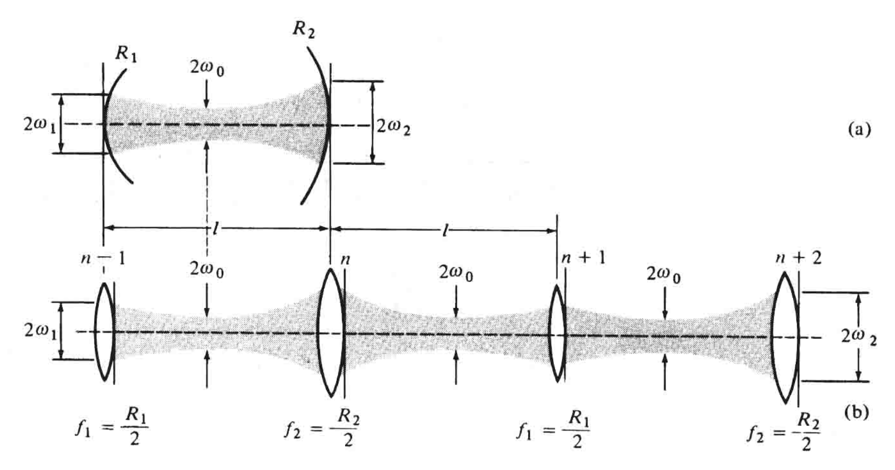


图 4.15　（a）镜面曲率半径为 R_1 和 R_2 的非对称共振腔（$R_1 \neq R_2$），(b)双周期透镜序列（透镜波导）等价于如（a）中所示的共振腔

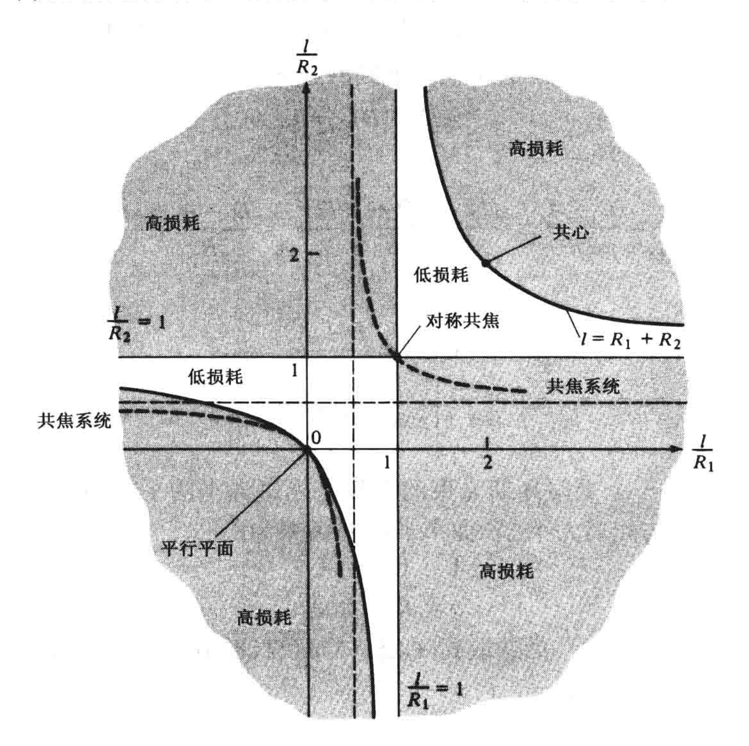


图 4.16　光学共振腔的稳定性图。阴影（高损耗）区属于不满足稳定条件 $0 \leqslant (1-l/R_1)(1-l/R_2) \leqslant 1$，而明亮（低损耗）区满足稳定条件。$R_1$ 和 R_2 的符号规则在脚注 4 中给以讨论（引自参考文献[8]）

4.5　广义共振腔中的模式——自洽法

到现在为止，讨论了由两个相对放置的球面镜组成的共振腔。有时我们可能希望考虑更为复杂的共振腔的特性，这些复杂的共振腔是任意数目的（如表 2-1 所列的）类透镜元件组成。这种共振腔的一个简单情形可以是将一个透镜放在两个球面镜之间，也可以由不在轴上

的三个反射镜构成。还有另一种行波共振腔，其光束只朝一个方向传播。

在上述任意情形中，我们都须探究在此复杂的共振腔内有无低损耗（“稳定”）模式存在，如果存在，则要求出各处的光斑大小 $\omega(z)$ 和曲率半径 $R(z)$ 。

采用自洽性条件，并要求共振腔的稳定本征模在经过一次往返后必须实现自再现。在共振腔内选择一个任意参考平面，并把此平面上的定态复光束参量写成 q_s ，然后利用式（2.6-9）的 ABCD 定律

$$q_s = \frac{Aq_s + B}{Cq_s + D} \tag{4.5-1}$$

式中 A, B, C, D 为一次完整往返——起点和终点都在上述选定的参考平面上——对应的“光线”矩阵元。

求解式（4.5-1）的 $1/q_s$ 可得

$$\frac{1}{q_s} = \frac{(D-A) \pm \sqrt{(D-A)^2 + 4BC}}{2B} \tag{4.5-2}$$

因为共振腔内的每一个独立元素都由单位模矩阵描述，也就是说 $A_iD_i - B_iC_i = 1$ （见表 2-1）。由此可以推知，由各个独立的矩阵的乘积而得到的 A, B, C, D 矩阵也须满足

$$AD - BC = 1$$

于是式（4.5-2）可写成

$$\frac{1}{q_s} = \frac{D-A}{2B} \pm i\frac{\sqrt{1-[(D+A)/2]^2}}{B} = \frac{D-A}{2B} + \frac{i\sin\theta}{B} \tag{4.5-3}$$

式中

$$\cos\theta = \frac{D+A}{2}$$

$$\theta = \pm\left|\arccos\theta\left(\frac{D+A}{2}\right)\right| \tag{4.5-4}$$

根据式（2.5-14），一个受限高斯光束的条件是光斑大小的平方 ω^2 为一有限的正数。回顾以前的讨论，知道 q 与光斑大小 ω 和曲率半径 R 关系为

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - i\frac{\lambda}{\pi\omega^2 n}$$

将上式与式（4.5-3）相比可知，如选取式（4.5-4）中的 $\cos\theta$ 值，使 $|\cos\theta| < 1$ 。[注：原文中为 $\sin\theta / B < 0$ ，译者改为 $|\cos\theta| < 1$ 。]

只要

$$\left|\frac{D+A}{2}\right| < 1 \tag{4.5-5}$$

则受限光束的条件就能得到满足，定态光束参量也可表示成

$$\frac{1}{q_s} = \frac{D-A}{2B} - i\frac{\sqrt{1-[(D+A)/2]^2}}{|B|} = \frac{D-A}{2B} + \frac{i\sin\theta}{|B|}, \quad \theta < 0 \tag{4.5-6}$$

方程式（4.5-5）就可看成是稳定性条件式（4.4-2）的一个推广，它适合于任意共振腔。把它应用到由两个球面镜组成的共振腔时就会还原成式（4.4-2）。

在参考平面处的曲率半径 R 和光斑大小 ω 可由式（2.6-7）及式（4.5-6）得到

$$
R = \frac{2B}{D - A}
$$

$$
\omega = \left(\frac{\lambda}{\pi n}\right)^{1/2} \frac{(|B|)^{1/2}}{[1 - [(D + A)/2]^2]^{1/4}} \tag{4.5-7}
$$

把 ABCD 定律式（2.6-9）用于 q_s，就可得到任意其他平面处的复光束参量 q，以及 ω 和 R 。

共振腔模式的稳定性

以上刚结束的讨论涉及定态共振腔稳定模式（自再现）的存在问题，一旦发现该模式的确存在，就需要探究它们是否稳定。这只要对式（4.5-6）给出的定态解 $1/q_s$ 加一微扰，并研究传播中微扰的演变情形即可[9]。

从式（2.6-9）出发，它将一次往返前后光束参量 $q_{出}$ 与 $q_{入}$ 联系起来

$$
q_{出} = \frac{Aq_{入} + B}{Cq_{入} + D}
$$

式中 A, B, C, D 为光共振腔中与一次完整往返相对应的光线矩阵元，将上式改写为

$$
q_{出}^{-1} = \frac{C + Dq_{入}^{-1}}{A + Bq_{入}^{-1}} \tag{4.5-8}
$$

并对它求微商

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}q_{出}^{-1}}{\mathrm{d}q_{入}^{-1}} &= \frac{D - \left[\left(C + Dq_{入}^{-1}\right)/\left(A + Bq_{入}^{-1}\right)\right]B}{A + Bq_{入}^{-1}} \\
&= \frac{D - Bq_{出}^{-1}}{A + Bq_{入}^{-1}}
\end{aligned} \tag{4.5-9}
$$

在定态时 $q_{出} = q_{入} \equiv q_s$

$$
\frac{\mathrm{d}q_{出}^{-1}}{\mathrm{d}q_{入}^{-1}}\bigg|_{q_{入} = q_s} = \frac{D - Bq_s^{-1}}{A + Bq_s^{-1}} \tag{4.5-10}
$$

结合式（4.5-6）得到

$$
D - Bq_s^{-1} = \frac{D + A}{2} - i\sin\theta = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}
$$

$$
A + Bq_s^{-1} = \frac{D + A}{2} + i\sin\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}
$$

由此得

$$
\frac{dq_{\text{³ö}}^{-1}}{dq_{\text{Èë}}^{-1}}\bigg|_{q_{\text{Èë}} = q_s} = \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta} \tag{4.5-11}
$$

由式（4.5-4）和式（4.5-5）可知，受限模要求 θ 为实数，于是从式（4.5-11）推知在光束参量 q^{-1} 的定态值 q_s^{-1} 加一微扰 $\Delta q_{入}^{-1}$，这一微扰不会衰减，因为一次往返后微扰 $\Delta q_{\text{out}}^{-1}$ 满足

$$
\left|\Delta q_{出}^{-1}\right| = \left|\Delta q_{入}^{-1}\right| \tag{4.5-12}
$$

我们发现，从理论上认为在高斯模共振腔中模的微扰不会衰减，但实验结果却显示激光

振荡器的模特性非常稳定，这意味着微扰会强烈地衰减，即 $\left|\Delta q_{出}^{-1}\right| < \left|\Delta q_{入}^{-1}\right|$，二者并不一致。然而如果在推导式（4.5-11）时考虑到共振腔镜面的有限大小，这一矛盾就得以解决。

4.6　光共振腔中的共振频率

到现在为止，仅讨论了空间模的特性对共振腔镜面（它们的曲率半径和间距）的依赖关系。另外一个值得考虑的问题是对一个给定的空间模，如何决定其共振频率。

共振频率决定的条件是，共振模经过一次完整的往返后相位延迟应该是 2π 的整数倍，这一点等效于微波波导共振腔的频率决定条件，即腔长须等于导波半波长的整数倍[1]。满足了这个要求就可沿轴自行建立一个稳定驻波，且它的横向电场分布与传输模的相同。

考虑一个球面镜共振腔，镜面分别位于 z_2 和 z_1 处。对 l,m 模来说其共振条件可写成⑤

$$\theta_{l,m}(z_2) - \theta_{l,m}(z_1) = q\pi \tag{4.6-1}$$

式中，q 为整数，$\theta_{l,m}(z)$ 是由式（2.8-2）给定的相移

$$\theta_{l,m}(z) = kz - (l + m + 1)\arctan\frac{z}{z_0}\ (z_0 = \pi\omega_0^2 n/\lambda) \tag{4.6-2}$$

共振条件式（4.6-1）可变为

$$k_q d - (l + m + 1)\left(\arctan\frac{z_2}{z_0} - \arctan\frac{z_1}{z_0}\right) = q\pi$$

式中，$d = z_2 - z_1$ 为共振腔长度。从而

$$k_{q+1} - k_q = \frac{\pi}{d}$$

或利用 $k = 2\pi\nu n/c$，则模间频率间隔可写成

$$\nu_{q+1} - \nu_q = \frac{c}{2nd} \tag{4.6-3}$$

下面来考虑对一个确定的 q 值，改变横模指数 l 和 m 所产生的影响。由式（4.6-3）我们注意到共振频率只与（$l+m$）之和有关而与 l,m 各自的值无关，所以对一个给定的 q，所有（$l+m$）之值相同的模都是简并的（也就是说，它们的共振频率相等）。对于式（4.6-3）选取两个不同的（$l+m$）值就有

$$\begin{aligned} k_1 d - (l + m + 1)_1\left(\arctan\frac{z_2}{z_0} - \arctan\frac{z_1}{z_0}\right) = q\pi \\ k_2 d - (l + m + 1)_2\left(\arctan\frac{z_2}{z_0} - \arctan\frac{z_1}{z_0}\right) = q\pi \end{aligned} \tag{4.6-4}$$

两式相减得

$$(k_1 - k_2)d = [(l + m + 1)_1 - (l + m + 1)_2]\left(\arctan\frac{z_2}{z_0} - \arctan\frac{z_1}{z_0}\right) \tag{4.6-5}$$

而

⑤ 获得式（4.6-1）时我们并未计及反射所造成的相移，不过加上这种修正并不会对本节的结果有任何影响，因为式（4.6-3）中的相减可将这种相移的影响抵消。

$$\Delta\nu = \frac{c}{2\pi nd}\Delta(l+m)\left(\tan^{-1}\frac{z_2}{z_0} - \tan^{-1}\frac{z_1}{z_0}\right) \tag{4.6-6}$$

$\Delta\nu$ 为 $l+m$ 之和变化 $\Delta(l+m)$ 时共振频率的变化值。举例来说，对于对称共焦共振腔（$R=d$），根据式（4.3-6），有 $z_2=-z_1=z_0$，所以 $\arctan(z_2/z_0)=-\arctan(z_1/z_0)=\pi/4$，式（4.6-6）可写成

$$\Delta\nu_{共焦}=\frac{1}{2}[\Delta(l+m)]\frac{c}{2nd} \tag{4.6-7}$$

将式（4.6-7）与式（4.6-4）相比较，可以发现在共焦共振腔中因改变 l 和 m 而得到的横模共振频率，要么与改变纵模指数 q 所得的各频率相等，要么与该频率的一半相等。该情形如图 4.17 所示。

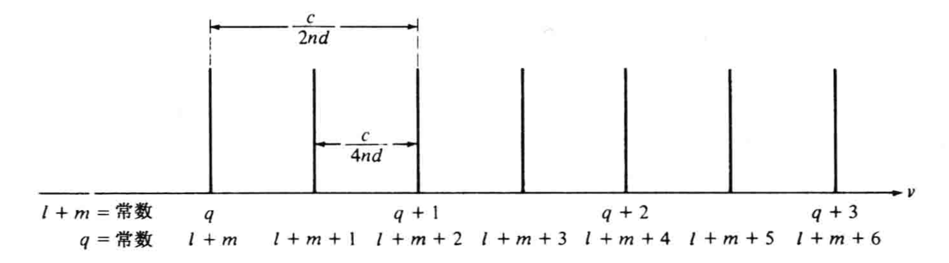


图 4.17　共焦（$d=R$）光学共振腔频率的位置与模指数 l，m和q 的函数关系

为了解共焦共振腔中横向共振频率的变化（由于 l 和 m 的变化），考虑一个近平面式共振腔，其中$|z_1|$和 z_2 都比 z_0 小（即 $d \ll R_1$和R_2。在这种情形下式（4.6-6）可写成

$$\Delta\nu \simeq \frac{c}{2\pi n z_0}\Delta(l+m) \tag{4.6-8}$$

图 4.18 表示了模式群的分布。

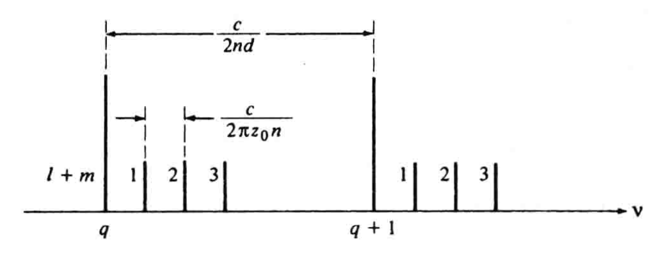


图 4.18　近似平面（$R>>d$）光学共振腔的共振频率与模指数 l，m和q 的函数关系

在一般情况下，$|z_1|$和 z_2 与 z_0 可比，推导式（4.6-8）所用的近似不适用。在这样的情形下，可以应用如下较长的但直接的计算式

$$\arctan\frac{z_2}{z_0} - \arctan\frac{z_1}{z_0} = \cos^{-1}\left[\pm\sqrt{\left(1-\frac{d}{R_1}\right)\left(1-\frac{d}{R_2}\right)}\right] \tag{4.6-9}$$

当 $(1-d/R)$ 因子项都为正用加号（+），都为负用减号（−）（其他的选择相应于非稳定共振腔）。可以解式（4.6-4）中的任意一个方程，得到模式 q,l,m 的共振频率

$$\nu_{q,l,m}=\frac{c}{2nd}\left[q+(l+m+1)\frac{\arccos\left[\pm\sqrt{\left(1-\frac{d}{R_2}\right)\left(1-\frac{d}{R_1}\right)}\right]}{\pi}\right] \tag{4.6-10}$$

如果将共振腔当做扫描干涉仪来用，图 4.18 所表示的情形是很不适宜的。原因在于，要想重现一个未知信号的频谱分布，同时传输一个以上的频率会引起混淆，解决的办法是通过一个共焦标准具，而这一共焦标准具的模间距如图 4.17 所示，并将 d 选择得足够小使模间频率间隔 $c/4nd$ ，超过所要测量的光谱频率范围。

4.7　光学共振腔中的损耗

了解电磁能量在光共振腔中损耗的机理，并能控制这种损耗，对于了解和控制各种光学器件来说极为重要。由于历史的原因，也为了方便起见，这些损耗常由几种不同的参量来表征。本书的不同章节将采用下面几个概念来描述共振腔中的损耗：单程损耗、光子寿命、品质因数 Q 。下面我们来看一看它们之间的关系。

腔模的衰减寿命（光子寿命）t_c 由下式定义

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathscr{E}}{t_c} \tag{4.7-1}$$

式中，$\mathscr{E}$为储存在模中的能量。这样在无源共振腔中$\mathscr{E}(t)=\mathscr{E}(0)\exp(-t/t_c)=\mathscr{E}(0)\exp(-\omega t/Q)$。如果单程光强损耗的比例为 L，共振腔长度是 l，那么单位时间内的损耗比例 cL/nl ，所以

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t}=-\frac{cL}{nl}\mathscr{E}$$

结合式（4.7-1）有

$$t_c=\frac{nl}{cL} \tag{4.7-2}$$

如果共振腔镜面反射率为 R_1 和 R_2，平均分布损耗常数为 α ，对损耗较小的情形单程的平均损耗为 $L=\alpha l-\ln\sqrt{R_1R_2}$ ，于是

$$t_c=\frac{n}{c[\alpha-(1/l)\ln\sqrt{R_1R_2}\,]}\approx\frac{nl}{c[\alpha l+(1-\sqrt{R_1R_2}\,)]} \tag{4.7-3}$$

上面的近似等号仅当 $R_1R_2\approx 1$ 时成立。

共振腔的品质因数通常被定义为

$$Q=\frac{\omega\mathscr{E}}{P}=-\frac{\omega\mathscr{E}}{\mathrm{d}\mathscr{E}/\mathrm{d}t} \tag{4.7-4}$$

式中，$\mathscr{E}$储存的能量 ω 是共振频率，$P=-\mathrm{d}\mathscr{E}/\mathrm{d}t$ 是功率的耗散，由式（4.7-1）与式（4.7-4）得

$$Q=\omega t_c \tag{4.7-5}$$

Q 因子与共振腔的洛伦兹响应曲线的宽度 $\Delta\nu_{1/2}$（在半功率点处）的关系式是（见参考文献[4]和 5.5 节）

$$\Delta\nu_{1/2}=\frac{\nu}{Q}=\frac{1}{2\pi t_c} \tag{4.7-6}$$

因此，结合式（4.7-3）得

$$\Delta\nu_{1/2}=\frac{c[\alpha-(1/l)\ln\sqrt{R_1R_2}]}{2\pi n} \tag{4.7-7}$$

光学共振腔中最常见的损耗机理如下：

1. **由不完全的反射造成的损耗** 反射损耗是不可避免的，因为如果没有透射，就不会有功率的输出。此外，理想镜面并不存在，即使镜面的反射率可以做得很高，总有少许的局部吸收和散射使反射率低于100%。

2. **激光介质中的吸收和散射** 光学共振腔当做激光振荡器来使用时，泵浦过程引起从被填满的原子能级向较高能级的跃迁是损耗机理之一。在固态激光器介质中，非均匀性和缺陷都会造成特别严重的散射。

3. **衍射损耗** 由式（4.3-1），或图2-7我们发现，传播光束的模的能量可延伸到偏离轴相当远的地方。当共振腔传播光束“被陷”于两个反射面间，很显然由于反射面的大小有限，部分光束的能量不被反射面所截住，从而损失掉了。对于给定的一套镜面，横模指数 l，m 越大，损耗就越大，因为其能量扩展更远。可以利用这一事实来防止高阶模式的振荡，在激光共振器中插入一个光阑，使其足够大，以便允许大部分基模（0,0, q）的能量通过，但同时又要求使其足够小，以便使高阶模损耗大大增加。图4.19表示了共焦共振腔中一些低阶模式的衍射损耗情形。特别有趣的是，与平行平面反射镜相比，采用球面镜反射面时其衍射损耗会急剧减小。

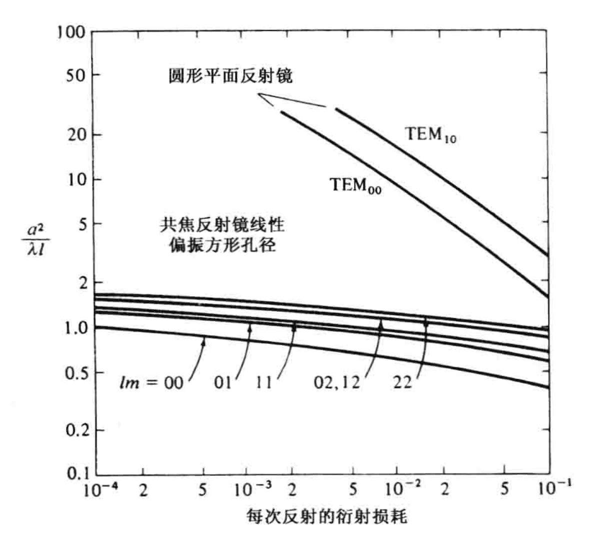


图4.19 平面平行腔和共焦共振腔中的一些低阶模的衍射损耗，a 是镜面半径，l 是它们之间的距离，箭头下面的两个数目代表横模指数 l，m（引自参考文献[7]）

4.8 环形共振腔

标准具、共振腔或干涉仪都可以由环形结构形成。这类共振腔（或干涉仪）可用于环形激光陀螺仪、微型共振腔和微片型激光器[10~12]。在适当的条件下，设计光电子器件实现开关和调制器功能。在自由空间，用三个反射镜定向排列使光束在这三个反射镜间沿圆周环行从

而形成环形共振腔。在导波中，很容易由光纤弯成环形或制备圆形沟道波导形成环形共振腔。对于波导型，应用耦合器将环形耦合到外部的波导中。参照图 4.20，由两个环形光纤耦合器组成环形共振腔。在耦合器的位置处通过环形共振腔使能量在两个波导（或光纤）间实现交换的可能性。设定入射光振幅为 A_i。在第一个耦合器处，入射光的一部分向前传播，入射光的一部分耦合后进入环形。当光在环形沿圆周运动，在耦合器处发生多次耦合。这种情形类似于图 4.20（b）所示的法布里－珀罗标准具中的多次反射。

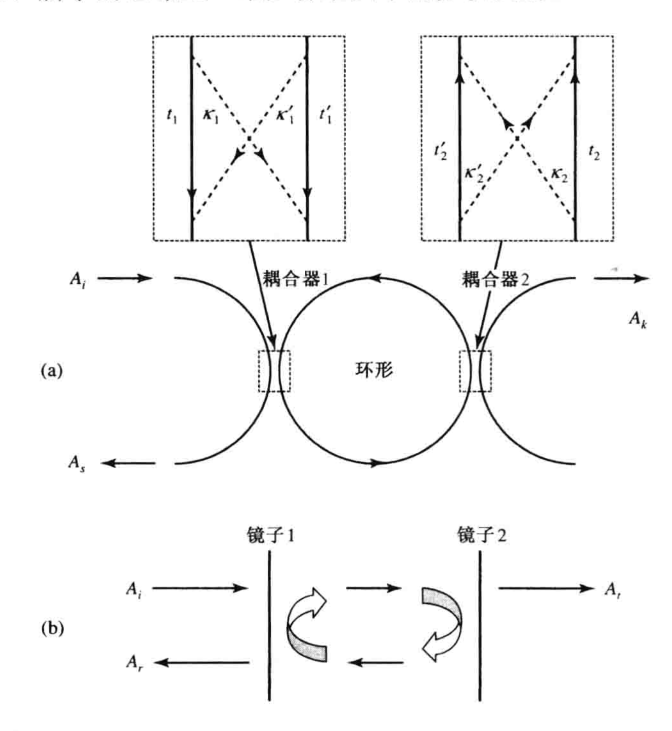


图 4.20　（a）由两个环形光纤耦合器组成的环形共振腔和（b）由两个平面反射镜构成的法布里－珀罗标准具的示意图

我们定义耦合器的交叉耦合系数分别为 κ_1，κ_1'，κ_2 和 κ_2'；前向传输耦合系数分别为 t_1，t_1'，t_2 和 t_2'（见图 4.20a）。光在环形共振腔内沿圆周运动在物理上可类似为法布里－珀罗标准具中的多次反射。沿用式（4.1-2）和式（4.1-3）中的类似分析，得到前向传输模式的振幅 A_s 和交叉耦合模式的振幅 A_k

$$A_s = \{t_1 + \kappa_1\kappa_1' t_2' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}[1 + t_1' t_2' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta} + (t_1' t_2' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta})^2 + \cdots]\}A_i \tag{4.8-1}$$

$$A_k = \kappa_1\kappa_2' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta/2}[1 + t_1' t_2' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta} + (t_1' t_2' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta})^2 + \cdots]A_i \tag{4.8-2}$$

式中

$$\delta = 2\pi nd/\lambda \tag{4.8-3}$$

式中，d 是环形的圆周周长，n 是光纤中传播模式的有效折射率。注意到这两个振幅的公式类同于法布里－珀罗标准具中的式（4.1-28）和式（4.1-29），将前向传输耦合系数（t_1，t_1'，t_2，t_2'）类比为反射镜的反射系数的振幅，交叉耦合系数（κ_1，κ_1'，κ_2，κ_2'）

类比为反射镜的透射系数的振幅。这里，不失一般性，假设耦合器在环形腔中是对称的。物理上，δ 是共振腔内一次往返传输对应的相移。

对无穷几何级数累加，我们可得到前向传输耦合系数（从光纤中透射部分）和交叉耦合系数（从环形腔耦合到另一路光纤）分别为

$$\sigma \equiv \frac{A_s}{A_i} = t_1 + \frac{\kappa_1\kappa_1' t_2' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}}{1 - t_1' t_2' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}} = \frac{t_1 + (\kappa_1\kappa_1' - t_1 t_1')t_2' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}}{1 - t_1' t_2' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}} \tag{4.8-4}$$

$$\chi \equiv \frac{A_k}{A_i} = \frac{\kappa_1\kappa_2' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta/2}}{1 - t_1' t_2' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}} \tag{4.8-5}$$

这两个公式又可类比于法布里－珀罗标准具中的式（4.1-31）和式（4.1-32），将前向传输耦合系数（t_1，t_1'，t_2，t_2'）类比为反射镜的反射系数的振幅，交叉耦合系数（κ_1，κ_1'，κ_2，κ_2'）类比为反射镜的透射系数的振幅。耦合器的这八个耦合系数不是独立的，它们与互易性、能量守恒和时间反转对称的基本原理紧密相关。简单地，假设耦合器无损耗，耦合从某种意义上限制了波的传播；也就是在波导（或光纤）中不发生反射。这种情形下，耦合系数减少为两个独立的常数[13]。耦合可简化为酉矩阵。在讨论环形共振腔性质之前，必须理解清楚耦合器。

参照图 4.21，讨论两个单模波导（或光纤）间的耦合。令 A_1 和 A_2 为输入模式的振幅，B_1 和 B_2 为输出模式的振幅，传输在波导中的模式归一化后模式振幅的平方代表了模式功率通量。耦合器的输入/输出的线性关系可写为

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1\kappa_{11} + A_2\kappa_{21} \\ B_2 &= A_1\kappa_{12} + A_2\kappa_{22} \end{aligned} \tag{4.8-6}$$

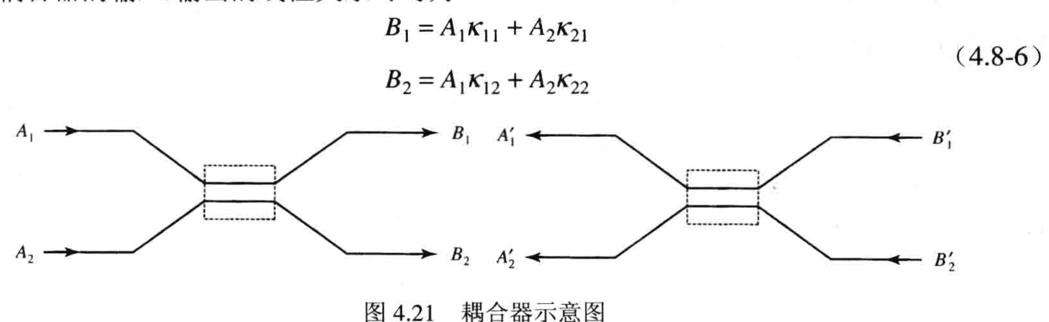


图 4.21　耦合器示意图

或以矩阵形式

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{21} \\ \kappa_{12} & \kappa_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \equiv X \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \tag{4.8-7}$$

式中，κ_{12} 和 κ_{21} 是交叉耦合系数，κ_{11} 和 κ_{22} 是前向传输耦合系数。假如将传输方向反转（见图 4.21），定义另一个矩阵 X' 如下

$$\begin{bmatrix} A_1' \\ A_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_{11}' & \kappa_{21}' \\ \kappa_{12}' & \kappa_{22}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} \equiv X' \begin{bmatrix} B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} \tag{4.8-8}$$

利用时间反转对称性，这两个矩阵满足如下关系式

$$X'X^* = 1 \tag{4.8-9}$$

设定耦合器无损耗。进一步，互易性原则要求满足

$$\kappa_{11}' = \kappa_{11},\quad \kappa_{12}' = \kappa_{21},\quad \kappa_{22}' = \kappa_{22},\quad \kappa_{12}' = \kappa_{21} \tag{4.8-10}$$

或等价地

$$X' = \tilde{X} \tag{4.8-11}$$

换句话说，X' 是 X 的转置。这样，按照式（4.8-9）～式（4.8-11），矩阵 X 是酉矩阵；即

$$X^{\dagger}X = 1 \tag{4.8-12}$$

式中，剑形符号代表厄米特共轭。利用酉矩阵的特点，按照式（4.8-12）X 的矩阵元满足如下关系

$$\begin{gathered} \kappa_{22} = |X|\kappa_{11}^*, \qquad \kappa_{21} = -|X|\kappa_{12}^* \\ |\kappa_{11}|^2 + |\kappa_{12}|^2 = |\kappa_{22}|^2 + |\kappa_{21}|^2 = 1 \\ \kappa_{11}^*\kappa_{21} + \kappa_{12}^*\kappa_{22} = \kappa_{21}^*\kappa_{11} + \kappa_{22}^*\kappa_{12} = 0 \end{gathered} \tag{4.8-13}$$

式中，$|X|$ 是矩阵 X 的行列式

$$|X| = \kappa_{11}\kappa_{22} - \kappa_{12}\kappa_{21} \tag{4.8-14}$$

式（4.8-13）与能量守恒一致。

行列式 $|X|$ 一般为复数的归一化的模（即 $|X| = \exp(i\theta)$，θ是实数）。不失一般性，得出

$$|X| = \kappa_{11}\kappa_{22} - \kappa_{12}\kappa_{21} = -1 \tag{4.8-15}$$

这样就得到耦合环形共振腔以矩阵形式的简便分析方法。选定行列式 $|X| = -1$，耦合器的线性输入–输出可表示为

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = X\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & \kappa^* \\ \kappa & -t^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \tag{4.8-16}$$

式中，$t = \kappa_{11}$ 是前向传输耦合系数，$\kappa = \kappa_{12}$ 是交叉耦合系数。注意到耦合矩阵 X 是厄米特矩阵（$X^{\dagger}$=X），因此可选定 $|X| = -1$。按照式（4.8-13）这两个耦合系数满足如下关系：

$$|t|^2 + |\kappa|^2 = 1 \tag{4.8-17}$$

在研究多个环形谐振腔相耦合的光学特性时矩阵方法尤显方便。利用酉矩阵条件式（4.8-13）和式（4.8-15），按照式（4.8-4）图 4.20（a）中的环形共振腔的前向透射系数可表示为

$$\sigma \equiv \frac{A_s}{A_i} = \frac{t_1 + t_2' a e^{-i\delta}}{1 - t_1' t_2' a e^{-i\delta}} = \frac{t_1 + t_2' e^{-i\delta} e^{-\alpha d}}{1 - t_1' t_2' e^{-i\delta} e^{-\alpha d}} \tag{4.8-18}$$

式中，$a = \exp(-\alpha d)$，α 是计入由于倾斜或散射引起的损耗而对应的衰减系数的振幅。现在考虑环形谐振腔一种特殊的情形 $\kappa_2 = 0$ 且 $t_2 = -1$。在图 4.22 中表示了这种共振腔。在这种情形中，前向透射系数则为

$$\sigma \equiv \frac{A_s}{A_i} = \frac{t_1 - a e^{-i\delta}}{1 + t_1' a e^{-i\delta}} = \frac{t - a e^{-i\delta}}{1 - t^* a e^{-i\delta}} \tag{4.8-19}$$

式中，δ 是共振腔内一次往返传输对应的相移，且 $t_1' = -t_1^* \equiv -t^*$。这里省略了下标 1，因为只有一个耦合器。对式（4.8-19）作平方，得到强度透射率（前向）

$$|\sigma|^2 \equiv \left|\frac{A_s}{A_i}\right|^2 = \frac{a^2 + t^2 - 2at\cos\delta}{1 + a^2t^2 - 2at\cos\delta} \tag{4.8-20}$$

这里，不失一般性，取 t 是实数。t 的常数相位总是可汇集于相位 δ 中。

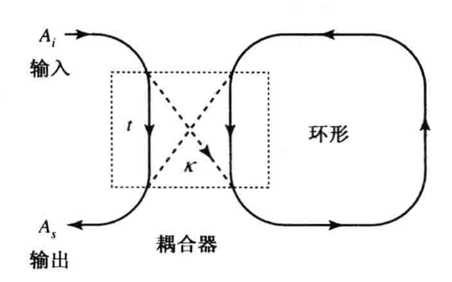


图 4.22　由波导耦合的环形共振腔的示意图。(t,κ) 是耦合器的耦合系数

当处共振态 $\delta = m2\pi$（m 为整数），前向强度透射率则为

$$|\sigma|^2 \equiv \left|\frac{A_s}{A_i}\right|^2 = \frac{(a-|t|)^2}{(1-a|t|)^2} = \frac{(a-t)^2}{(1-at)^2} \tag{4.8-21}$$

将这个简单的关系式做出关于交叉耦合系数 $|\kappa|^2$ 函数关系图表示在图 4.23 中，从中可分析出两条与潜在的应用相关的重要特性：（1）当耦合参数 $a = t = \sqrt{1-|\kappa|^2}$ 时前向透射率 $|\sigma|^2$ 为 0，被称为“极限耦合”；（2）具有低的内损耗（往返损耗=$1-|a|^2$，a 接近 1）和高的细度的环形共振腔，函数曲线位于极限耦合点左边的部分非常陡峭。对于一个给定的耦合系数 $|\kappa|^2$，a 的很小的变化可控制透射从 0 到 1。这样的一个特性用于设计调制器时，可得到很好的调制深度[13]。电吸收调制器或光放大器可由此控制损耗[14]。

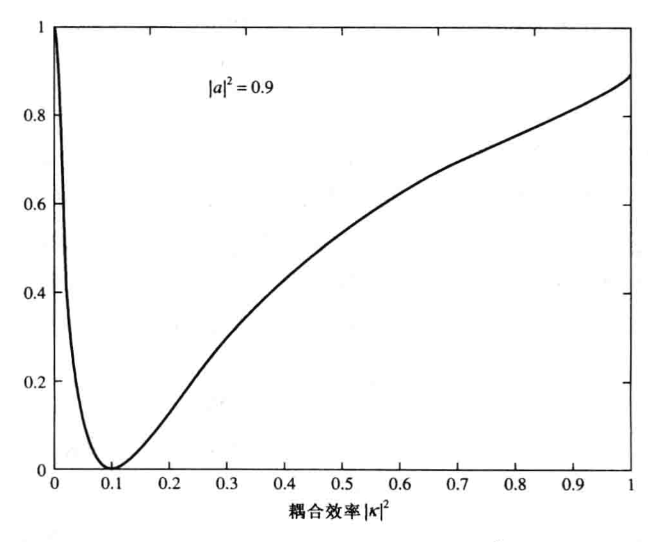
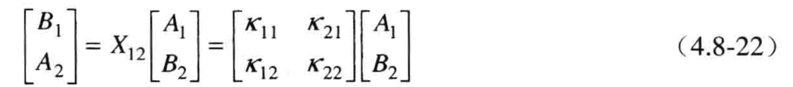


图 4.23　环形共振腔前向透射率与耦合系数 $|\kappa|^2$ 函数关系图，
耦合效率等于环形共振腔的内损耗（$1-|a|^2$）出现极限耦合

耦合环形共振腔

接下来考虑连续耦合的多个环形共振腔情形。这样的环形共振腔的光学特性用归一的矩阵关系式（4.8-15）很容易描述。参照图 4.24，我们考虑连续耦合的环形共振腔。从光纤 1 输入并前向传输，光纤 2、3 和 4 是环形共振器，光纤 5 是交叉输出。在图 4.24 中介于光纤 1 和 2 之间的第一个耦合器（12），按照公式（4.8-15）输入/输出矩阵关系式可表示为



$$\begin{bmatrix} B_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = X_{12}\begin{bmatrix} A_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{21} \\ \kappa_{12} & \kappa_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \tag{4.8-22}$$

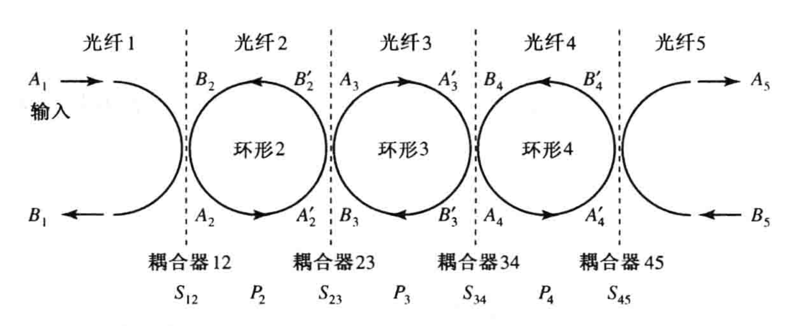


图 4.24　连续耦合的多个环形共振腔的示意图，包括三个环形共振器。这三个环形共振器标记为环形 2、环形 3 和环形 4

式中，κ_{11}、κ_{22}、κ_{12} 和 κ_{21} 是耦合器的耦合系数。这些系数由归一化条件相互关联，按照式（4.8-13）和式（4.8-15），可得

$$\kappa_{22} = -\kappa_{11}^*, \qquad \kappa_{21} = \kappa_{12}^* \tag{4.8-23}$$

注意到对于耦合器（12），A_1 和 B_2 是输入模式的振幅，B_1 和 A_2 是输出模式的振幅。为了分析连续耦合的多个环形共振腔，重写式（4.8-22）

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\kappa_{12}^2}\begin{bmatrix} 1 & \kappa_{11}^* \\ \kappa_{11} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} \equiv S_{12}\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} \tag{4.8-24}$$

式中，S_{12} 定义为耦合器的散射矩阵，A_1 是输入模式的振幅，B_1 是在同一光纤中前向模式的振幅，A_2 和 B_2 是在第一个环形器中的模式振幅（见图 4.24）。区分矩阵 X 和 S 的差别很重要。耦合矩阵 X 是到同一个耦合器的两个输入模式振幅和两个输出模式振幅之间的线性关系，而矩阵 S 是一个波导中的两个模式振幅和另一个波导中的两个模式振幅之间的线性关系。按照式（4.8-13）、式（4.8-23）和式（4.8-24），散射矩阵的行列式为

$$|S_{12}| = \frac{1}{\kappa_{12}^2}(1-|\kappa_{11}|^2) = \frac{\kappa_{21}}{\kappa_{12}} = \frac{\kappa_{12}^*}{\kappa_{12}} \tag{4.8-25}$$

注意到行列式，一般地，是模归一的复数。当交叉耦合系数 κ_{12} 是实数时上述行列式为 1。这样散射矩阵 S 是厄米特矩阵且是单位模。

定义 A_2' 和 B_2' 为第一个环形器（光纤 2 或环形 2）位于下一个耦合器（23）的模式振幅。类似地，（A_m，B_m）和（A_m'，B_m'）是在环行共振器 m（光纤 m）中的模式振幅。共振腔内的振幅由于模式在光纤环中传输而相互关联。不失一般性，假设耦合器是对称的，关

系式可写为

$$\begin{bmatrix} A_m \\ B_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\phi_m/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_m/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'_m \\ B'_m \end{bmatrix} \equiv P_m \begin{bmatrix} A'_m \\ B'_m \end{bmatrix} \tag{4.8-26}$$

式中，ϕ_m 是第 m 个环行共振器中的一次往返的相移，P_m 定义为传输矩阵。复述形式的相移 ϕ_m 记入了传输损耗和倾斜损耗。在第 m 个和第 $m+1$ 个光纤之间的耦合器，按照式（4.8-24），模式振幅之间关系式为

$$\begin{bmatrix} A'_m \\ B'_m \end{bmatrix} = \frac{1}{\kappa_{m,m+1}} \begin{bmatrix} 1 & \kappa^*_{mm} \\ \kappa_{mm} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{m+1} \\ B_{m+1} \end{bmatrix} \equiv S_{m,m+1} \begin{bmatrix} A_{m+1} \\ B_{m+1} \end{bmatrix}, \quad m \geqslant 1 \tag{4.8-27}$$

其中 $S_{m,m+1}$ 是耦合器（m，$m+1$）的散射矩阵（$m > 0$）。

利用式（4.8-24）、式（4.8-26）和式（4.8-27），从光纤 1 到光纤 5 的模式振幅间的关系表示为

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = S_{12} \, P_2 \, S_{23} \, P_3 \, S_{34} \, P_4 \, S_{45} \begin{bmatrix} A_5 \\ B_5 \end{bmatrix} \tag{4.8-28}$$

式中，S_{12}、S_{23}、S_{34} 和 S_{45} 是耦合器的散射矩阵，P_2、P_3 和 P_4 是环形共振器的传输矩阵。将上式推广到 $N(N > 3)$ 个耦合器的情形，可得到类似的公式

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix} = S_{01} \, P_1 \, S_{12} \, P_2 \, S_{23} \cdots P_N \, S_{N,N+1} \begin{bmatrix} A_{N+1} \\ B_{N+1} \end{bmatrix} \equiv M \begin{bmatrix} A_{N+1} \\ B_{N+1} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{N+1} \\ B_{N+1} \end{bmatrix} \tag{4.8-29}$$

式中，A_0 和 B_0 是编号为 0 的光纤中的模式振幅，A_{N+1} 和 B_{N+1} 是编号为 $N+1$ 的光纤中的模式振幅；光纤 1 到光纤 $N+1$ 是耦合器。矩阵 M 是所有矩阵的乘积，类似于式（4.8-28）。按照式（4.8-29），编号为 0 的光纤中前向透射系数可表示为

$$\sigma \equiv \left(\frac{B_0}{A_0} \right)_{B_{N+1}=0} = \frac{M_{21}}{M_{11}} \tag{4.8-30}$$

从光纤 1 到光纤 $N+1$ 的透射系数可表示为

$$\chi \equiv \left(\frac{A_{N+1}}{A_0} \right)_{B_{N+1}=0} = \frac{1}{M_{11}} \tag{4.8-31}$$

矩阵元 M_{11}、M_{12}、M_{21} 和 M_{22} 满足类似于 S_{12}（见式 4.8-24）的关系。基于无损耗的系统功率流守恒，模式振幅满足下式

$$|A_0|^2 - |B_0|^2 = |A_{N+1}|^2 - |B_{N+1}|^2 \tag{4.8-32}$$

利用式（4.8-29）和（4.8-32），可得到

$$\begin{gathered} |M_{11}|^2 - |M_{21}|^2 = |M_{22}|^2 - |M_{12}|^2 = 1 \\ M_{11}M^*_{12} - M_{21}M^*_{22} = 0 \end{gathered} \tag{4.8-33}$$

这些攻势与时间反转对称和互易性原则一致。按照式（4.8-33），可得

$$|\sigma|^2 + |\chi|^2 = 1 \tag{4.8-34}$$

这正是能量守恒。由式（4.8-33）可直接得出矩阵元满足下列关系式

$$|M_{22}| = |M_{11}|, \quad |M_{21}| = |M_{12}| \tag{4.8-35}$$

当所有的交叉耦合系数都为实数时，上述关系式变为

$$M_{22} = M_{11}^*, \quad M_{21} = M_{12}^* \tag{4.8-36}$$

当所有的耦合器相同，所有的环形都相同时，矩阵方程式（4.8-29）可写为

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix} = [SP]^N S \begin{bmatrix} A_{N+1} \\ B_{N+1} \end{bmatrix} \tag{4.8-37}$$

式中，S 是耦合器的散射矩阵，P 是环形共振器的传输矩阵。理想的微环形共振器可用平版印刷制膜的工艺[15,16]。式（4.8-31）和式（4.8-32）可用于计算前向或交叉透射系数。还可同时得出强度和相移。相移关于频率的导数即群时延。对于 N 个相同的环行共振器，前向透射效率可写为（见习题 4.19）

$$|\sigma|^2 \equiv \left|\frac{B_0}{A_0}\right|^2_{B_{N+1}=0} = \left|\frac{M_{21}}{M_{11}}\right|^2 = \frac{(1-|\kappa|^2)}{(1-|\kappa|^2) + |\kappa|^2 \dfrac{\sin^2\theta}{\sin^2(N+1)\theta}} \tag{4.8-38}$$

式中，θ 可表示为

$$\cos\theta = \frac{1}{|\kappa|}\cos(\phi/2) \tag{4.8-39}$$

式中，$\phi = 2\pi n_{有效} d/\lambda$ 是在环行共振器中传输而对应的往返相移。θ 是复数，$|\cos\theta|$ 可远大于 1。式（4.8-38）中分母的第二项随 N 呈指数衰减。这种状态（见图 4.25）就是所谓的光子带隙。前向透射（或从环形共振器“反射”）接近于 1。图 4.25 表示了六个（N=6）的环形共振器的透射率 $|\sigma|^2$ 关于相移 ϕ 的函数关系图。图中由周期性的抑止带阵列组成，抑止带被分成 N–1 个旁瓣。在本书的后面将对光子带隙作进一步的讨论。图 4.26 是由相同的环形组成的共振器的线性阵列的局部照片[15,16]。

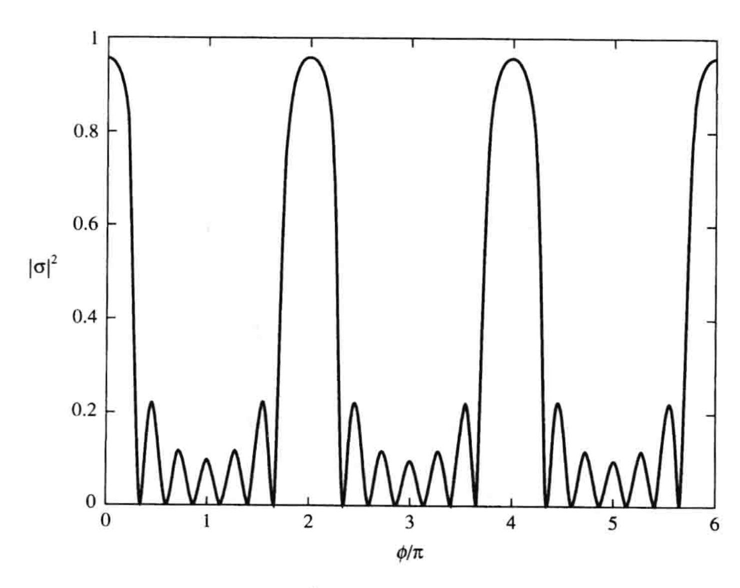


图 4.25　环形共振器的前向透射率 $|\sigma|^2$ 关于相移 ϕ 的函数关系图。其中 N=6，$|\kappa| = 0.95$

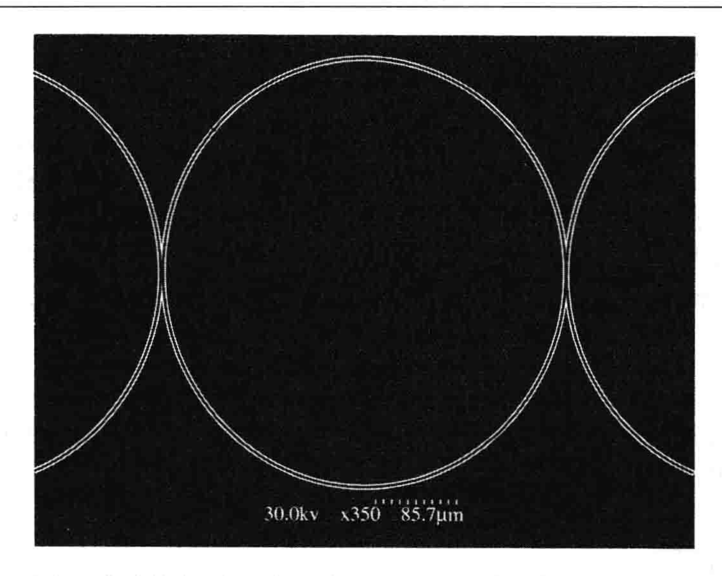


图 4.26　耦合环形共振器的线性阵列的局部照片。环形共振器的半径为 50μm，周长大约 314μm。波导由聚合物（SU-8）制成，折射率为 1.57，衬底是折射率为 1.44 的氧化硅，工作于 $\lambda = 1550\text{nm}$。波导厚 1.6μm、宽 2μm。在耦合区域，环间距大约为 0.5μm（引自参考文献[15]、[16]）

具有恒等的耦合系数的环形共振器的无限连路，场的周期是晶格常数 Λ 的两倍。这里定义晶格常数是单个环的特征长度。应用布洛赫定理，在第 n 个环处的场的振幅与第 n+2 个环存在如下的关系

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = P_n\ S_{n,n+1}\ P_{n+1}\ S_{n+1,n+2} \begin{pmatrix} A_{n+2} \\ B_{n+2} \end{pmatrix} = (PS)^2 \begin{pmatrix} A_{n+2} \\ B_{n+2} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2K\Lambda} \begin{pmatrix} A_{n+2} \\ B_{n+2} \end{pmatrix} \tag{4.8-40}$$

式中，P 是单个环的传输矩阵（对所有的 n，$P_n = P$），S 是单个耦合器的散射矩阵（对所有的 n，$S_{n,n+1} = S$），K 是布洛赫波数。正常传播模式的振幅满足一下本征方程

$$(PS)^2 \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2K\Lambda} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} \tag{4.8-41}$$

和

$$\begin{pmatrix} A_{2n} \\ B_{2n} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2nK\Lambda} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} \tag{4.8-42}$$

正常传播模式的振幅 A_0 和 B_0 以及布洛赫波数可解方程（4.8-41）而得到。色散方程（K 关于 ω 的函数）可表示为

$$\mathrm{Det}|(PS)^2 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}2K\Lambda} I| = 0 \tag{4.8-43}$$

式中，I 是单位矩阵。利用关于 P 和 S 的式（4.8-26）和式（4.8-27），可得出

$$\cos K\Lambda = \frac{1}{|\kappa_{12}|} \cos \frac{1}{2}\phi \tag{4.8-44}$$

式中，ϕ 是在单个环形共振器中一次往返对应的相移。对由单模光纤制成的环形共振器，相移可写为

$$\phi = \frac{\omega}{c} n_{有效} d = \frac{2\pi}{\lambda} n_{有效} d \tag{4.8-45}$$

式中，d 是环形共振器的周长，$n_{有效}$ 是光纤中传输模式的等效折射率。

按照公式（4.8-13），耦合常数 $|\kappa_{12}|$ 的量级总小于（或等于）1（$0 \leqslant |\kappa_{12}| \leqslant 1$）。那么按照式（4.8-44）在某些特殊的状态下布洛赫波数可能为复数。具有复数形式波数的布洛赫波不能在周期性介质中传播。按照式（4.8-42），场振幅在布洛赫波数为复数的这些特殊状态下呈指数衰减。这就是熟知的光子带隙。如果用式（4.8-44）作出色散关系图（ω– K），我们发现光子带隙出现在一次往返对应的相移 ϕ 是 2π 的整数倍的特殊状态下。光子带隙的中心正好落在 $\phi = 2m\pi(m = 1,2,3,\cdots)$。光子带隙的中心侧的布洛赫波数可表示为

$$K\Lambda = m\pi \pm i\cosh^{-1}\left(\frac{1}{|\kappa_{12}|}\right) \tag{4.8-46}$$

布洛赫波数虚部的量级与波导耦合器的交叉耦合常数有关。在第 12 章，将进一步讨论应用于光子和光电子的周期性结构。

4.9　多腔标准具

在前面讨论了单个环形共振器和耦合环形共振器的透射特性。共振发生在腔内一次往返对应的相移是 2π 的整数倍的情形下。对由单模光纤或其他单模波导制成的环形共振器，由于弯曲损耗而使传输衰减变得明显的部分原因是由于环形共振器的周长在几百（根据上下文译者增加的）微米量级。本节将讨论由薄膜或多层结构制成的多腔标准具。由于波膜厚度在微米量级，传输衰减可忽略。多腔标准具在光电子领域中可作为特殊的滤波器或色散补偿。这样的多腔标准具的透射和反射特性可利用 4.1 节和 4.8 节结论来分析。特别是振幅透射和反射系数表达式（4.1-31）和式（4.1-32），或等价式（4.8-4）和式（4.8-5）非常有用。参照图 4.27，考虑由相距为 d 的两个反射镜组成的标准具中光的透射。按照式（4.1-31）和式（4.1-32），透射和反射系数以更普遍的形式写为

$$r = r_{12} + \frac{t_{12}t_{21}r_{23}e^{-i2\phi}}{1 - r_{21}r_{23}e^{-i2\phi}} = \frac{r_{12} + (t_{12}t_{21} - r_{12}r_{21})r_{23}e^{-i2\phi}}{1 - r_{21}r_{23}e^{-i2\phi}} \tag{4.9-1}$$

$$t = \frac{t_{12}t_{23}e^{-i\phi}}{1 - r_{21}r_{23}e^{-i2\phi}} \tag{4.9-2}$$

其中

$$2\phi = 2k_x d = 2nd\cos\theta(\omega/c) \tag{4.9-3}$$

式中，d 是腔内介质的厚度，n 是腔内介质的折射率，k_x 是沿垂直于镜面方向的波矢分量。镜面的透射和反射系数定义为

t_{12}=从介质 1 入射在镜面 1 处的透射系数
t_{21}=从介质 2 入射在镜面 1 处的透射系数
t_{23}=从介质 2 入射在镜面 2 处的透射系数
t_{32}=从介质 3 入射在镜面 2 处的透射系数
r_{12}=从介质 1 入射在镜面 1 处的反射系数
r_{21}=从介质 1 入射在镜面 1 处的反射系数
r_{23}=从介质 2 入射在镜面 2 处的反射系数

r_{32}=从介质 3 入射在镜面 2 处的反射系数

上述定义如图 4.27 所示。

每个反射镜的四个系数通常都是复数。前面已讨论过，它们与物理的基本原理，包括互易性和时间反转对称有关。特别的，可给出（见习题 4.16）

$$t_{12}t_{21}^* + r_{21}r_{21}^* = 1, \quad t_{23}t_{32}^* + r_{32}r_{32}^* = 1$$
$$t_{12}r_{12}^* + r_{21}t_{12}^* = 0, \quad t_{23}r_{23}^* + r_{32}t_{23}^* = 0 \tag{4.9-4}$$

这些公式被称为斯托克斯关系式[6]。

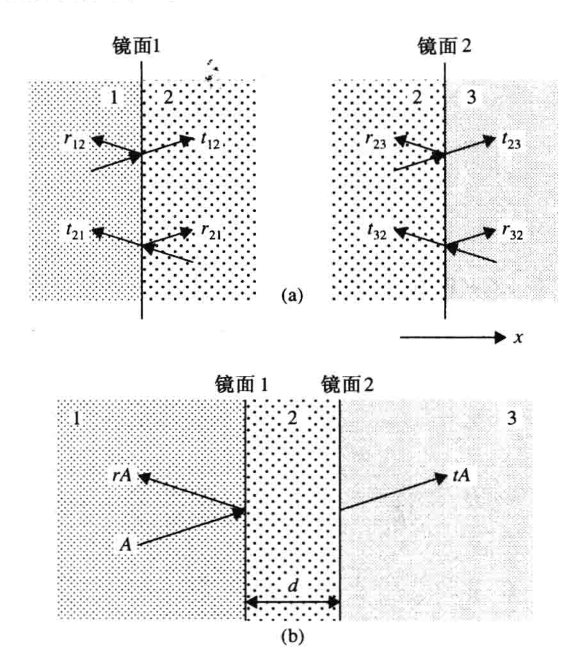


图 4.27　透射和反射系数定义示意图。（a）反射镜的透射和反射系数定义示意图。（b）有两个反射镜组成的标准具的透射和反射系数定义示意图

值得注意的是仅当介质 1 和 2 的折射系数相等时 t_{12} 和 t_{21} 相同。对无损耗的折射系数不同的介质，上述两套透射系数间的关系为

$$\frac{t_{12}}{k_{1x}} = \frac{t_{21}}{k_{2x}}, \quad \frac{t_{23}}{k_{2x}} = \frac{t_{32}}{k_{3x}} \tag{4.9-5}$$

式中，k_{1x}、k_{2x} 和 k_{3x} 是在介质 1、2 和 3 中的波矢沿 x 的分量，它们分别为

$$k_{1x} = n_1 \cos\theta_1(\omega/c)$$
$$k_{2x} = n_2 \cos\theta_2(\omega/c) \tag{4.9-6}$$
$$k_{3x} = n_3 \cos\theta_3(\omega/c)$$

式中，ω 是入射光的频率，n_1、n_2 和 n_3 是在介质 1、2 和 3 中的折射率，θ_1、θ_2 和 θ_3 是在介质 1、2 和 3 中的角度。式（4.9-5）与能量透射的互易性一致。k_{1x}、k_{2x} 和 k_{3x} 表示出不同介质中光速的不同。

为了说明透射和反射公式的应用，我们来看下面的例子。

例：夹在两种不同介质中的薄膜层。

参照图 4.28，考虑厚度为 d_2 折射率为 n_2 的薄膜层。薄膜层夹在折射率分别为 n_1 和 n_3 两种不同介质中。

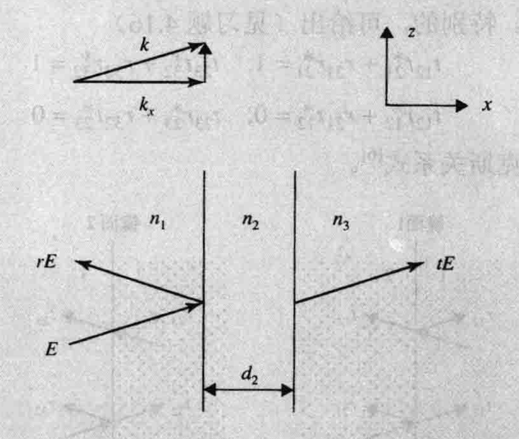


图 4.28　光从薄膜层的透射和反射示意图。x 轴垂直于膜层

界面的反射和透射系数就是菲涅耳反射和透射系数，可表示为[6]

$$r_{12}=\begin{cases}\dfrac{k_{1x}-k_{2x}}{k_{1x}+k_{2x}}\\[2ex]\dfrac{n_1^2k_{2x}-n_2^2k_{1x}}{n_1^2k_{2x}+n_2^2k_{1x}}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{n_1\cos\theta_1-n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1+n_2\cos\theta_2} & (s\text{波})\\[2ex]\dfrac{n_1\cos\theta_2-n_2\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_2+n_2\cos\theta_1} & (p\text{波})\end{cases}\tag{4.9-7}$$

$$t_{12}=\begin{cases}\dfrac{2k_{1x}}{k_{1x}+k_{2x}}\\[2ex]\dfrac{2n_1n_2k_{1x}}{n_1^2k_{2x}+n_2^2k_{1x}}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{2n_1\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_1+n_2\cos\theta_2} & (s\text{波})\\[2ex]\dfrac{2n_1\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_2+n_2\cos\theta_1} & (p\text{波})\end{cases}\tag{4.9-8}$$

式中，k_{1x} 和 k_{2x} 是在介质 1 和 2 中的波矢沿 x 的分量。θ_1 和 θ_2 是在介质 1 和 2 中的角度。式（4.9-6）给出了光线的角度与波矢沿 x 的分量的关系。对于 s 波电场矢量垂直于入射面（xz 面），而 p 波的电场矢量平行于入射面。类似的一组透射和反射系数对应于介质 2 和 3 之间的界面，只要替换 $2\to3$ 和 $1\to2$。我们注意到菲涅耳反射和透射系数满足如下关系式：

$$t_{12}t_{21}-r_{12}r_{21}=1$$

$$r_{21}=-r_{12}\tag{4.9-9}$$

为进一步理解上述概念，只考虑正入射的特殊情形。当 $\theta_1=\theta_2=0$，s 波和 p 波是大小相等的。菲涅耳反射和透射系数则变为

$$r_{12}=\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2},\quad r_{21}=-r_{12}$$

$$r_{23}=\frac{n_2-n_3}{n_2+n_3},\quad r_{32}=-r_{23}$$

$$t_{12}=\frac{2n_1}{n_1+n_2},\quad t_{23}=\frac{2n_2}{n_2+n_3}$$
$$t_{21}=\frac{2n_2}{n_1+n_2},\quad t_{32}=\frac{2n_3}{n_2+n_3} \tag{4.9-10}$$

对无损耗介质，这些系数都为实数。按照式（4.9-1）、式（4.9-2）和式（4.9-10），如图 4.28 所示的薄膜层的反射和透射系数可写为

$$r=\frac{r_{12}+r_{23}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\phi}}{1-r_{21}r_{23}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\phi}}=\frac{\left(\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right)+\left(\frac{n_2-n_3}{n_2+n_3}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\phi}}{1+\left(\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right)\left(\frac{n_2-n_3}{n_2+n_3}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\phi}} \tag{4.9-11}$$

$$t=\frac{t_{12}t_{23}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}}{1-r_{21}r_{23}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\phi}}=\frac{\left(\frac{2n_1}{n_1+n_2}\right)\left(\frac{2n_2}{n_2+n_3}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}}{1+\left(\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right)\left(\frac{n_2-n_3}{n_2+n_3}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\phi}} \tag{4.9-12}$$

其中 $\phi=k_2d_2=n_2d_2(\omega/c)=2\pi n_2d_2/\lambda$。

例：抗反射（AR）层。

我们考虑能在 $\lambda=1.5\ \mu\mathrm{m}$ 处消除菲涅耳反射的薄膜涂层。令介质 1 为空气折射率 $n_1=1$，介质 3 是折射率 $n_3=3.5$ 的半导体。利用式（4.9-11）推出反射系数关于薄膜厚度和薄膜折射率的函数关系。按照式（4.9-11），反射系数满足下式时变为 0

$$r_{12}+r_{23}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\phi}=\left(\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right)+\left(\frac{n_2-n_3}{n_2+n_3}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\phi}=0 \tag{4.9-13}$$

通过选择上式很容易满足

$$n_2=\sqrt{n_1n_3}\ \text{且}\ \phi=\pi/2,3\pi/2,5\pi/2,7\pi/2,\cdots \tag{4.9-14}$$

换句话说，当薄膜具有四分之一波长的厚度、其折射率是限制层介质折射率的几何平均时可导致反射为零。既然 $\phi=k_2d_2=n_2d_2(\omega/c)=2\pi n_2d_2/\lambda$，四分之一波长的厚度是

$$d_2=\frac{\lambda}{4n_2}=\frac{\lambda}{4\sqrt{n_1n_3}} \tag{4.9-15}$$

运用 $n_1=1$ 和 $n_3=3.5$，薄膜折射率必须是

$$n_2=\sqrt{n_1n_3}=1.87$$

厚度为

$$d_2=\frac{\lambda}{4n_2}=\frac{\lambda\cdot}{4\sqrt{n_1n_3}}=0.2\ \mu\mathrm{m}$$

或是这个值的奇数倍。特别注意的是上述抗反射层仅限于波长 $\lambda=1.5\ \mu\mathrm{m}$。式（4.9-9）可用于研究波长在 $\lambda_0=1.5\ \mu\mathrm{m}$ 附近的反射率。图 4.29 表示了不同折射率的薄膜涂层的反射率（$|r|^2$）与相位 ϕ 的函数关系。反射率是相位 ϕ 的周期函数，当 $n_2<n_3$ 且 $\phi=\pi/2,3\pi/2,5\pi/2,7\pi/2,\cdots$ 反射率取最小值。当薄膜折射率大于 n_3，反射率比较大；当 $\phi=\pi,2\pi,3\pi,\cdots$ 反射率取最小值。

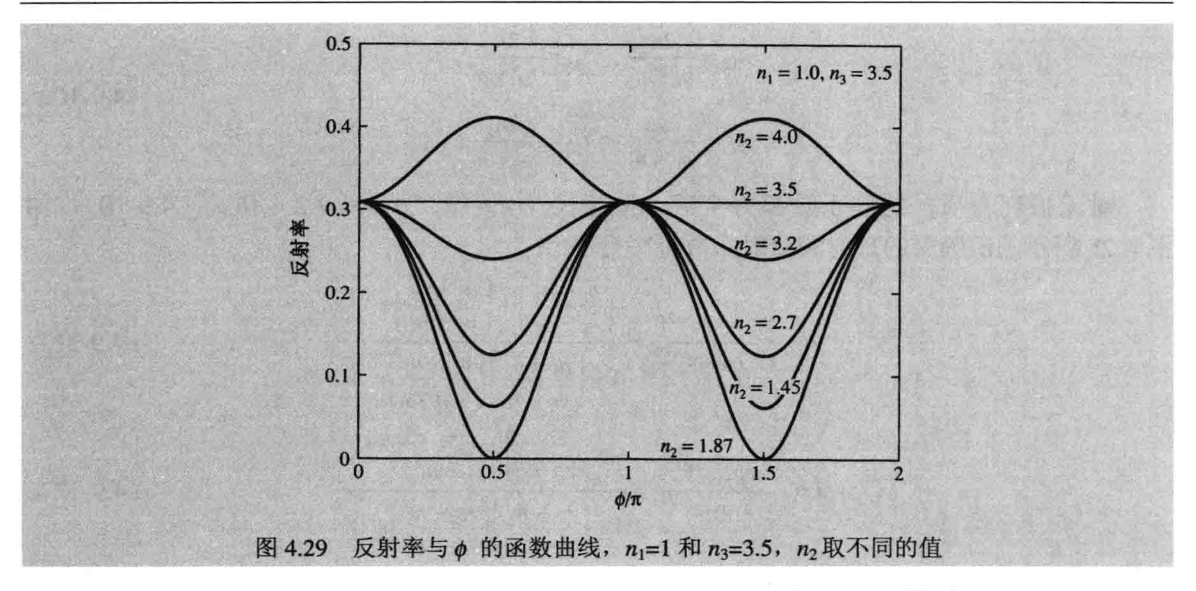


图 4.29　反射率与 ϕ 的函数曲线，n_1=1 和 n_3=3.5，n_2 取不同的值

标准具的透射和反射式（4.9-1）和式（4.9-2）可推广到多腔标准具。为了说明这一点，考虑两个腔的标准具如图 4.30 所示。为得出透射和反射系数，我们首先解决由反射镜 2 和 3 夹着的介质 3 所形成的第二个标准具的透射和反射系数。移去镜 1 和介质 1，利用式（4.9-1）和式（4.9-2）就可以解决这个问题。我们再考虑由镜 1 和等效反射镜（镜 2′）组成的一个腔的标准具。等效镜反射（镜 2′）由第二个标准具的反射镜 2 和 3 构成，夹在介质 2 和介质 4 之间。等价的单腔标准具如图 4.30（b）所示。透射和反射系数又可应用式（4.9-1）和式（4.9-2）来计算。这里描述的方法可推广到多腔标准具的透射和反射的问题。

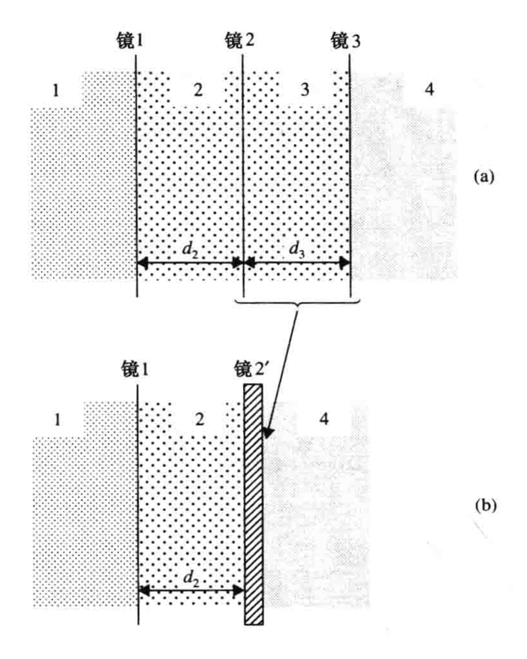


图 4.30　两个腔的标准具中的透射和反射问题。由反射镜 2 和 3 间隔 d_3 组成的第二个标准具可等价为一个反射镜（镜 2′）。这样可将两个腔的标准具的问题简化为一个腔的标准具的问题

2×2 矩阵法

当用等效反射镜概念时，多腔标准具的透射和反射的问题可以用 2×2 矩阵法来解决。矩阵方法具有普适性，可用来处理多腔标准具的透射和反射特性。为介绍矩阵法，我们考虑平面波传输到两边都是介质的界面的一般情形（见图 4.31）。写出电场的表达式为

$$E=\begin{cases}\left(A_1\mathrm{e}^{-ik_{1x}x}+B_1\mathrm{e}^{+ik_{1x}x}\right)\mathrm{e}^{-i\beta z} & 介质\ 1\\ \left(A_2\mathrm{e}^{-ik_{2x}x}+B_2\mathrm{e}^{+ik_{2x}x}\right)\mathrm{e}^{-i\beta z} & 介质\ 2\end{cases} \tag{4.9-16}$$

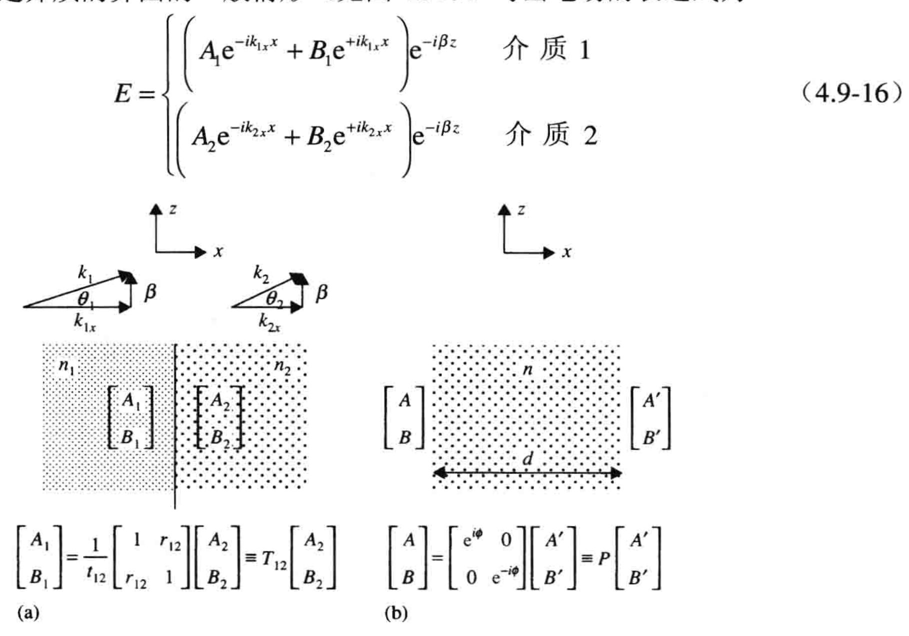


图 4.31　(a)两种介质界面之间的转换矩阵；(b)均匀介质的传输矩阵

其中 A_1 和 A_2 是右行波（沿+x 方向）的振幅，B_1 和 B_2 是左行波（沿−x 方向）的振幅，β 是波矢的 z 分量，k_{1x} 和 k_{2x} 是波矢的 x 分量。注意当沿 z 方向结构是均匀的，β 保持恒定不变。波矢的这些分量间的关系如下式所示

$$\begin{aligned}k_{1x}^2+\beta^2&=(n_1\omega/c)^2\\ k_{2x}^2+\beta^2&=(n_2\omega/c)^2\end{aligned} \tag{4.9-17}$$

基于界面处的透射和反射系数的定义，振幅间的关系如下式所示

$$\begin{aligned}B_1&=A_1r_{12}+B_2t_{21}\\ A_2&=A_1t_{12}+B_2r_{21}\end{aligned} \tag{4.9-18}$$

式中，$r_{12},r_{21},t_{12},t_{21}$ 是早在前面讨论过的菲涅耳反射和透射系数。用 A_2 和 B_2 表示 A_1 和 B_1 可解得

$$\begin{aligned}A_1&=\frac{1}{t_{12}}A_2-\frac{r_{21}}{t_{12}}B_2\\ B_1&=\frac{r_{12}}{t_{12}}A_2+\left(t_{21}-\frac{r_{12}r_{21}}{t_{12}}\right)B_2\end{aligned} \tag{4.9-19}$$

利用式（4.10-9），上式可改写为

$$A_1 = \frac{1}{t_{12}} A_2 + \frac{r_{12}}{t_{12}} B_2$$
$$B_1 = \frac{r_{12}}{t_{12}} A_2 + \frac{1}{t_{12}} B_2 \qquad (4.9\text{-}20)$$

或用矩阵的形式等价为

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{t_{12}} \begin{bmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{12} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} \equiv T_{12} \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} \qquad (4.9\text{-}21)$$

式中，T_{12} 定义为层 1 到层 2 的转换矩阵。注意到转换矩阵 T_{12} 和表述环形共振腔的式（4.8-24）中的散射矩阵 S_{12} 的很大程度的相似性。事实上，t_{12} 可等价为交叉耦合系数 κ_{12}，r_{12} 可等价为前向耦合系数 κ_{11}。特别注意到，界面侧的反射和透射系数 r_{12} 和 t_{12} 与偏振态（s 或 p）有关。因此，对每个偏振态分别计算透射和反射问题。注意到转换矩阵 T_{12} 是对称矩阵。

转换矩阵与场列矢量的关联性对介质界面的每一边都起作用。现在需要引入从一个均匀层的结束处到另一层的结束处的传输矩阵。参照图 4.31（b），考虑在厚为 d 折射系数为 n 的均匀介质中传输的平面波。利用代表场的列矢量，可得

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} \equiv P \begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} \qquad (4.9\text{-}22)$$

式中，A 和 B 是介质左侧结束处的振幅，A' 和 B' 是介质右侧结束处的振幅。相移可表示为

$$\phi = k_x d = nd\cos\theta(\omega/c) \qquad (4.9\text{-}23)$$

式中，k_x 是介质中波矢的 x 分量，θ 是光线角度（波矢和 x 轴所夹的角度）。对角矩阵 P 定义为传输矩阵。转换矩阵 T 和传输矩阵 P 现在可用来处理一般的多腔的标准具的问题。图 4.32 表示了三层（N=3）结构夹在半无限大的介质 n_0 和 n_4 中的情形。在介质 0 中的平面波振幅的列矢量 (A_0, B_0) 与平面波振幅的列矢量 (A_{N+1}, B_{N+1}) 之间的关系式为

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{N+1} \\ B_{N+1} \end{bmatrix} \equiv M \begin{bmatrix} A_{N+1} \\ B_{N+1} \end{bmatrix} \qquad (4.9\text{-}24)$$

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix} = T_{01}P_1T_{12}P_2T_{23}P_3T_{34} \begin{bmatrix} A_4 \\ B_4 \end{bmatrix}$$

图 4.32　用于说明矩阵方法处理多层结构的示意图（N=3）

式中，M 是由转换矩阵和传输矩阵连成而得到的 2×2 矩阵

$$M = T_{01}P_1T_{12}P_2T_{23}P_3 \ldots P_{N-1}T_{N-1,N}P_NT_{N,N+1} \qquad (4.9\text{-}25)$$

注意到传输矩阵与偏振态无关，而转换矩阵受偏振态影响。利用转换矩阵 T_{12} 的对称特性和传输矩阵的幺正性，很容易证得

$$M_{21} = M_{12}^*, \qquad M_{22} = M_{11}^* \tag{4.9-26}$$

上式对应于无损耗的多层结构。利用式（4.9-21）和式（4.9-22）以及菲涅耳反射和透射系数的显函数式（4.9-7）和式（4.9-8），可以证明行列式可表示为

$$|M| = \frac{k_{N+1x}}{k_{0x}} \tag{4.9-27}$$

式中，k_{N+1x} 和 k_{0x} 分别是波矢在介质 0 和介质 $N+1$ 中的 x 分量。即使在层状结构中存在损耗式（4.9-27）也是正确的。如果两层介质是相同的（即 $n_0 = n_{N+1}$），那么矩阵 M 是单位矩阵。

按照式（4.9-7），式（4.9-8）和式（4.9-21），对于 s 波和 p 波，转换矩阵都表示为

$$T_{12} = \begin{cases} \dfrac{1}{2k_{1x}}\begin{bmatrix} k_{1x} + k_{2x} & k_{1x} - k_{2x} \\ k_{1x} - k_{2x} & k_{1x} + k_{2x} \end{bmatrix} & (s\text{ 波}) \\ \dfrac{1}{2n_1 n_2 k_{1x}}\begin{bmatrix} n_1^2 k_{2x} + n_2^2 k_{1x} & n_1^2 k_{2x} - n_2^2 k_{1x} \\ n_1^2 k_{2x} - n_2^2 k_{1x} & n_1^2 k_{2x} + n_2^2 k_{1x} \end{bmatrix} & (p\text{ 波}) \end{cases} \tag{4.9-28}$$

或等价地用角度形式表示为

$$T_{12} = \begin{cases} \dfrac{1}{2n_1 \cos\theta_1}\begin{bmatrix} n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2 & n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2 \\ n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2 & n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2 \end{bmatrix} & (s\text{ 波}) \\ \dfrac{1}{2n_1 \cos\theta_1}\begin{bmatrix} n_1\cos\theta_2 + n_2\cos\theta_1 & n_1\cos\theta_2 - n_2\cos\theta_1 \\ n_1\cos\theta_2 - n_2\cos\theta_1 & n_1\cos\theta_2 + n_2\cos\theta_1 \end{bmatrix} & (p\text{ 波}) \end{cases} \tag{4.9-29}$$

传输矩阵表示为

$$P = \begin{bmatrix} e^{ik_x d} & 0 \\ 0 & e^{-ik_x d} \end{bmatrix} \tag{4.9-30}$$

式中，d 是介质厚度，k_x 是波矢的 x 分量

$$k_x = \sqrt{(n\omega/c)^2 - \beta^2} = (n\omega/c)\cos\theta \tag{4.9-31}$$

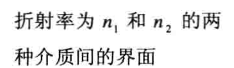
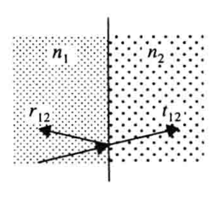
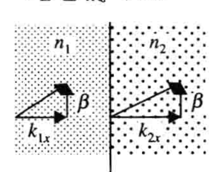
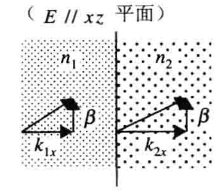
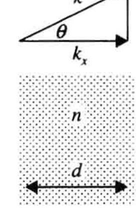
表 4.1 是对 s 波和 p 波的 2×2 矩阵的汇总。在正入射时，s 波和 p 波是对等的；转换矩阵变为

$$T_{12} = \frac{1}{2n_1}\begin{bmatrix} n_1 + n_2 & n_1 - n_2 \\ n_1 - n_2 & n_1 + n_2 \end{bmatrix} \quad (\text{正入射}) \tag{4.9-32}$$

一旦得出了矩阵，多层结构的透射和反射系数就可随即计算出来。令 A_0 是入射光束的振幅，B_0 是反射光束的振幅，A_{N+1} 是透射光束的振幅。我们可设 $B_{N+1} = 0$，即光是从左边入射，按照式（4.9-24）

$$\begin{aligned} A_0 &= M_{11} A_{N+1} \\ B_0 &= M_{21} A_{N+1} \end{aligned} \tag{4.9-33}$$

表 4.1　介质界面和均匀层结构的 2 × 2 矩阵

 折射率为 n_1 和 n_2 的两种介质间的界面	 s 偏振（$E \perp xz$ 平面）	$\dfrac{1}{t_{12}}\begin{bmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{12} & 1 \end{bmatrix}$
折射率为 n_1 和 n_2 的两种介质间的界面	 p 偏振（E // xz 平面）	$\dfrac{1}{2k_{1x}}\begin{bmatrix} k_{1x}+k_{2x} & k_{1x}-k_{2x} \\ k_{1x}-k_{2x} & k_{1x}+k_{2x} \end{bmatrix}$
折射率为 n_1 和 n_2 的两种介质间的界面		$\dfrac{1}{2n_1n_2k_{1x}}\begin{bmatrix} n_1^2k_{2x}+n_2^2k_{1x} & n_1^2k_{2x}-n_2^2k_{1x} \\ n_1^2k_{2x}-n_2^2k_{1x} & n_1^2k_{2x}+n_2^2k_{1x} \end{bmatrix}$
厚度为 d 的均匀介质		$\begin{bmatrix} e^{ik_xd} & 0 \\ 0 & e^{-ik_xd} \end{bmatrix}$

透射和反射则可表示为

$$t=\left(\frac{A_{N+1}}{A_0}\right)_{B_{N+1}=0}=\frac{1}{M_{11}}$$
$$r=\left(\frac{B_0}{A_0}\right)_{B_{N+1}=0}=\frac{M_{21}}{M_{11}} \tag{4.9-34}$$

当光从右边入射，透射和反射则表示为

$$t'=\left(\frac{B_0}{B_{N+1}}\right)_{A_0=0}=\frac{|M|}{M_{11}}$$
$$r'=\left(\frac{A_{N+1}}{B_{N+1}}\right)_{A_0=0}=-\frac{M_{12}}{M_{11}} \tag{4.9-35}$$

式中，$|M|$ 是矩阵的行列式。令 T 和 T' 分别是光从左边（介质 0）入射和光从右边（介质

N+1）入射式的多层结构的透射率。这两个透射率可分别表示为

$$T = \frac{k_{N+1x}}{k_{0x}}|t|^2,\quad T' = \frac{k_{0x}}{k_{N+1x}}|t'|^2 \tag{4.9-36}$$

利用式（4.9-34）和式（4.9-35）以及式（4.9-27）中的$|M|$的表示式，可得

$$T' = T \tag{4.9-37}$$

和

$$t' = |M|t = \frac{k_{N+1x}}{k_{0x}}t \tag{4.9-38}$$

基于式（4.9-37），我们注意到层状结构的透射率T'和T是相等的，无论光束是从左边还是从右边入射。即使层状结构中存在损耗，上述的相等仍然成立。当两层介质是相同的（即$n_0 = n_{N+1}$），可得

$$t' = t \tag{4.9-39}$$

这与互易定则相一致。

利用式（4.9-34）和式（4.9-35），推广透射和反射系数的表达式，可得

$$tt'^* + rr^* = 1,\quad tr'^* + rt^* = 0 \tag{4.9-40}$$

这与由对称讨论（时间反转对称）[6]得出的结论相同。这就是著名的斯托克斯关系式。对一个无损耗的层状结构，可证得

$$R + T = 1 \tag{4.9-41}$$

这与能量守恒相一致。

4.10　模式耦合和耦合损耗

在理论上和实际应用中的一个基本问题是在光学共振腔或光纤中对于复振幅为$E_{输入}(x,y)$的给定模式如何有效地与入射光耦合，并且测得其余的，不需要但被激发的共振模。这个问题对于光纤而言，就是纤尾融熔耦合过程。上述问题会频繁发生在光通信中，例如，在用波长选择、功率放大或色散管理时光与单模光纤耦合输入和输出，在光与激光器（或放大器）耦合输入和输出。在光纤中，模式失配会造成很大的插入损耗。

参照图 4.33 用$E_{输入}(x,y)$表示在输入平面z_1处入射场的强度，用E_{mn}（x,y）表示光纤中或共振腔中的本征模式，其中m，n是光学共振腔中的高斯光束或光纤中的 LP 模的横模模式数。光纤或共振腔内的模式的场E_{mn}（x,y）由完全正交的波函数组成。它们满足

$$\iint E_{mn}(x,y,z)E^*_{m'n'}(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \quad 除非 \quad m = m' 且 n = n' \tag{4.10-1}$$

利用E_{mn}完备系的优势，将入射场展开为各模式的线性叠加，可写为

$$E_{输入}(x,y) = \sum_{mn} a_{mn}E_{mn}(x,y) \tag{4.10-2}$$

式中，a_{mn}是常数。将两边同乘以E_{mn}^*，在整个xy平面内积分，再利用正交关系式（4.10-1），可得

$$a_{mn}=\frac{\iint E_{\text{输入}}(x,y)E^*_{mn}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint E_{mn}(x,y)E^*_{mn}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} \tag{4.10-3}$$

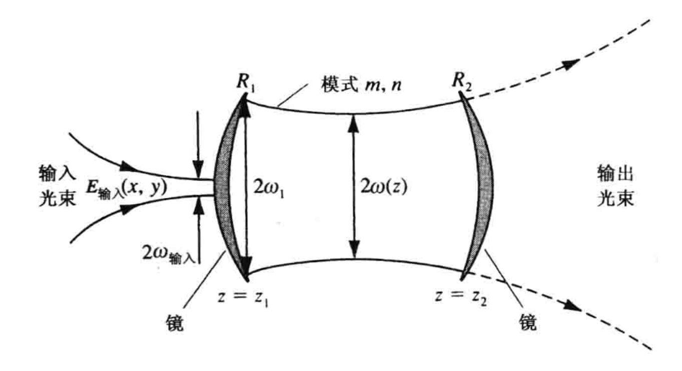


图 4.33　由单色入射光激励的共振腔（或光纤）中的横模（m,n）

入射场入射给定空间模式，如 E_{mn} 的耦合效率定义为

$$\eta_{mn}=\frac{\text{耦合进入模式 }mn\text{ 的功率}}{\text{总入射功率}}=\frac{\iint\left|a_{mn}E_{mn}(x,y)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\left|E_{\text{输入}}(x,y)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y} \tag{4.10-4}$$

用式（4.10-3）替换式（4.10-4）中的 a_{mn}，可得

$$\eta_{mn}=\frac{\left|\iint E_{\text{输入}}(x,y)E^*_{mn}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|^2}{\iint\left|E_{\text{输入}}(x,y)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\iint\left|E_{mn}(x,y)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y} \tag{4.10-5}$$

这是本节的主要结论。由式（4.10-5）和柯西 • 许瓦尔兹不等式得出，η_{mn} 总是小于或等于 1。这与能量守恒一致。

由式（4.10-5），在入射面处的入射光具有与被激发模相同的空间依赖关系，即当

$$E_{\text{输入}}(x,y)\propto E_{mn}(x,y) \tag{4.10-6}$$

这里 $\eta_{mn}=1$，所有其他 $\eta_{m'n'}=0$，则所有的入射功率都用来激发单一模式 E_{mn}。实际应用中，只有在光纤端面或共振腔输入镜面处，入射光具有与被激发模相同的横模模式数 m 和 n，并且具有相同的光斑大小和曲率半径模式才能匹配；在推出结论式（4.10-5），假设了在输入面没有波被反射。对光学共振腔，模式 m，n 还必须满足共振腔纵模法布里—珀罗纵模共振条件，否则大部分入射光功率将被反射。在图 4.33 描述的情形中，当 $\omega_{\text{输入}}\ll\omega_1$ 时，将激发出大量的模。证明被激发的模数多达 $(\omega_1/\omega_{\text{输入}})^2$ 将在留给读者作为习题。利用模式匹配，在利用扫描式法布里—珀罗标准具（由球面镜组成）时，可以避免高阶模，只要分析入射高斯基模光束的光谱。

例：插入损耗。

一个有效的耦合必备的条件要求入射光束沿着共振腔或光纤的轴向（z 轴）传播。任何侧向位移（x，y）都会导致与共振腔或单模光纤的耦合效率的减小。下面引出较为容易计算的插入损耗。设定侧向位移只沿 x 轴。在分析中与 y 相关的可忽略。令共振腔或光纤中的波

函数具有高斯横模场的形式 $E_{00}=\mathrm{e}^{-x^2/\omega^2}$，其中 ω 是高斯光束在入射面的光斑半径。设定存在侧向位移的光束的波函数写为 $E_{输入}=\mathrm{e}^{-(x-a)^2/\omega^2}$，其中 a 是沿 x 轴的侧向位移。将上述波函数带入式（4.10-5），并进行积分。可得

$$\eta=\mathrm{e}^{-a^2/\omega^2}$$

对于高斯光束的光斑半径 ω =10μm，侧向位移 a=2μm，从上面的公式可得，$\eta=\mathrm{e}^{-1/25}\approx 0.96$，对应的插入损耗为 4%（–0.13dB）。类似的，侧向位移 a=10μm，对应的耦合效率 $\eta=\mathrm{e}^{-1}\approx 0.368$，相应的插入损耗为 63.2%（–4.4dB）。

习题

4.1　作出法布里–珀罗标准具，当 $R=0.9$ 时 I_r/I_i 与 δ 的关系图。

4.2　证明：若法布里–珀罗标准具的单程强度损耗为 $1-A$，其峰值透射率为 $(1-R)^2G/(1-RG)^2$。

4.3　由定义式（4.2-6）

$$F\equiv\frac{\nu_{m+1}-\nu_m}{\Delta\nu_{1/2}}$$

F 为法布里–珀罗标准具的细度，用半定量的讨论，说明为什么相对完全平整的表面，均方根偏差为 λ/N 时，细度不能超过 $F\approx N/2$。（提示，考虑当由透射长度与平行平面间距接近相等时，标准具透射峰的分布。）

4.4　证明：垂直入射到平面平行的法布里–珀罗标准具的光束，当透射峰的偏离不超过 1 时，其发散角度不超过 $\theta_{1/2}=\sqrt{\dfrac{2n\pi}{lF}}$ 。

4.5　完成式（4.1-4），式（4.1-5），式（4.1-6）和式（4.1-7）的推导。

4.6　考虑发散的单色光入射到平面平行的法布里–珀罗标准具的情形。

a. 推导出沿输出能量的传输方向的各种角度的表达式（提示：这些角度与式（4.1-8）改变 m 而得到的不同的 θ 值相对应。）

b. 假定（a）中的输出光入射到焦距为 f 的透镜上。证明焦平面上的能量分布由一系列圆组成，每一个圆对应于不同的 m 值。导出这些圆的半径的表达式。

c. 若（b）输入光中同时包含频率为 ν_1 和 ν_2 的光，推导在焦平面上相应圆间距的表达式，并由上述方法证明最小的间距 $\nu_1-\nu_2$ 由 $(\Delta\nu)\sim c/2nlF$ 给定。

4.7　计算基模（l=m=0）高斯光束通过一个半径与光束光斑大小相等的孔时出射功率的比例。

4.8　证明：传统的两个反射镜的共振腔的稳定性条件式（4.5-5）可降为满足式（4.4-2）。

4.9　考虑一个曲率半径为 R 的球面镜，其反射率为

$$\rho(r)=\rho_0\exp\left(-r^2/a^2\right)$$

式中，r 是距中心的径向距离。

证明：上述镜面的（A,B,C,D）变换矩阵为

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{2R} - i\frac{\lambda}{\pi a^2} & 1 \end{vmatrix}$$

4.10　给定一个光学共振腔，如图 p4.10 所示。

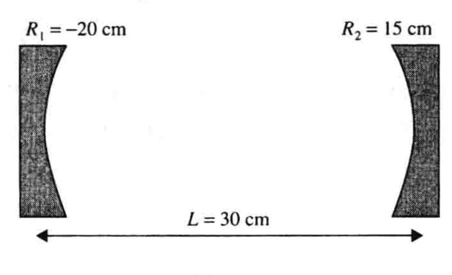


图 P4.10

a. 计算 $\lambda = 1\mu\text{m}$ 模的束腰位置。

b. 计算束腰的直径。

4.11　推导 Gires-Tournois 标准具的群时延为下列表达式

$$\tau = \frac{\sigma}{1+(\sigma^2-1)\sin^2\phi}\tau_0$$

其中 $\tau_0 = 2\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\omega$ 是前端反射镜的反射率为 0 时标准具的群时延。证明群时延（时间延迟）当共振时（$\phi = m\pi$）达到极大值 $\sigma\tau_0$，当 $\phi = m\pi + \pi/2$ 时达到极小值 τ_0/σ，其中 m=整数。

4.12　证明：利用图 4-33 所描述的简单计论，由基模（入射）高斯光束激励的厄米一高斯共振模式数约为（$\omega_1/\omega_{输入}$）^{2}，条件是入射模式的量级在被激发模式中最大量级的同一个量级范围内，忽略纵模仅考虑横模（沿 x,y）。提示：考虑关于 η_{mn} 的数值方程式（4.10-5）中的积分。说明为什么对积分主要的贡献来自于半径为 $\omega_{输入}$ 或很小的 ω_1/l（l,m 是厄米多项式中的整数）的圆。

4.13　推导高斯基模光束入射到曲率半径为 R，镜面处光斑半径为 ω 的光学共振腔的耦合效率。入射光束的曲率半径为 R_b，在镜面处的光斑半径为 ω_b。

4.14　法布里–珀罗标准具的自由谱范围（$\mathrm{FSR} = \Delta\nu = c/2nd$）取决于共振条件：$2kd = 2(2\pi\nu/c)nd = 2m\pi$，其中 n 是腔内介质的折射率，d 是腔长。

（a）证明：如果材料色散存在，自由谱范围则为

$$\Delta\nu = \frac{v_g}{2d} = \frac{c}{2n_g d}$$

式中，v_g 是群速度，n_g 群折射率定义为 $n_g = c/v_g$。

（b）上面忽略了从镜面反射而引起的相移。该相移可表示为频率的函数。共振条件可写为 $2kd + \phi_1 + \phi_2 = 2m\pi$。记入频率与相移间的影响，推导自由谱范围的表达式。

4.15　考虑对称法布里–珀罗标准具，端面反射率为 R。

（a）推导透射光束（E_t/E_i 的相位）的相位延迟的解析表达式。

（b）推导群时延的表达式（相对角频率的相位的导数）。找出群时延的最大值和最小值，以腔内渡越时间为单位（假设 n=1）。

4.16　如本书中所示，反射系数和透射系数r, r', t和t'间的相关性与互易性和时间反转对称有关。这些系数如图 P4.16 所示。当时间反转，$(tA)^*$和$(rA)^*$与A^*相乘。证明：

$$tt'^* + rr^* = 1$$
$$tr'^* + rt^* = 0$$

这就是斯托克斯关系式。

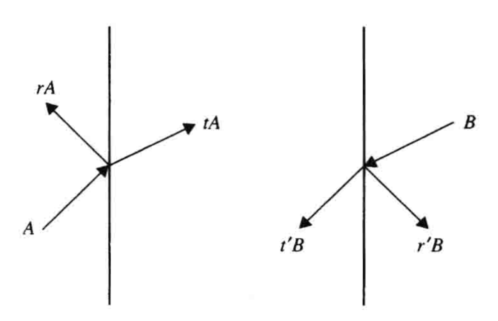


图 P4.16

4.17　光学交叉器是一种无源器件，可将入射光束的光谱分解为两路的光束。换句话说，如果入射光束包含频率（$\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5,\nu_6,\nu_7,\nu_8$），输出中的一路包含频率（$\nu_1,\nu_3,\nu_5,\nu_7$），另一路包含频率（$\nu_2,\nu_4,\nu_6,\nu_8$）。像迈克尔逊（或马赫 曾德）干涉仪可实现上述功能（见图 P4.17）。令$\Delta L = L_2 - L_1$是两个干涉目标物间的路程差；其中一路的光强可表示为

$$I = \frac{1}{2}[1+\cos\left(\frac{2\pi}{c}\nu 2\Delta L + \phi_2 - \phi_1\right)]$$

式中，ϕ_1和ϕ_2是反射镜的相移。注意到一次往返的路程差$2\Delta L$。

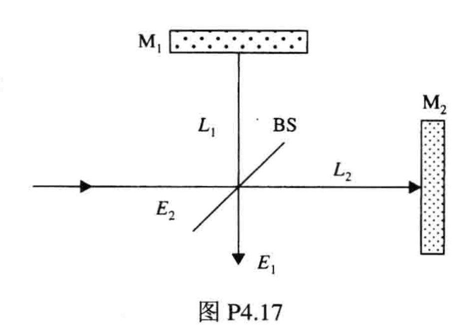


图 P4.17

（a）假设$\phi_1 = \phi_2 = 0$，找出输出强度为 0 和最大强度处的频率。证明：最大值（或最小值）间隔为

$$\Delta\nu = \frac{c}{2\Delta L}$$

（b）一个 GT 标准具的功能类似于一个具有较大的相位色散（即相位与频率的函数关系）的反射镜。在光交叉中，标准具可用作反射镜，提供周期性相位色散去匹配周期性的强度输出。计算出标准具的腔间距。

（c）如果标准具的前向反射镜的反射率可适当选择，可得到平顶带宽的谱形。这可应用

于工程设计中。画出 $R_1=0\%$， $R_2=20\%$ 时的输出强度图。

（d）重复（c）画出 $R_1=3\%$， $R_2=40\%$ 时的输出强度图。

4.18 令习题 4.17 中得分波器（BS）的反射和透射系数为 r,r',t和t'，假设分波器无损耗，能量守恒要求

$$|t|^2+|r|^2=1\text{ 和 }|t'|^2+|r'|^2=1$$

互易性原则要求 $t'=t$，假设分波器两边的介质是相同的。

（a）证明：$|r'|=|r|$。

（b）证明：输出场 (E_1,E_2) 可写为

$$E_1=rtA\mathrm{e}^{-2ikL_1}+tr'A\mathrm{e}^{-2ikL_2}$$
$$E_2=r^2A\mathrm{e}^{-2ikL_1}+tt'A\mathrm{e}^{-2ikL_2}$$

（c）利用能量守恒 $|E_1|^2+|E_2|^2=|A|^2$

证明：
$$tt'^*+rr^*=1$$
$$tr'^*+rt^*=0$$

4.19 考虑 N 个等同的环和（N+1）个等同的耦合器。模式振幅由式（4.8-37）给出。

（a）证明：式（4.8-37）可改写为

$$\begin{bmatrix}A_0\\B_0\end{bmatrix}=[SP]^{N+1}P^{-1}\begin{bmatrix}A_{N+1}\\B_{N+1}\end{bmatrix}=[SP]^{N+1}\begin{bmatrix}A_{N+1}\exp(-i\phi/2)\\B_{N+1}\exp(+i\phi/2)\end{bmatrix}$$

（b）假设实数形式的交叉耦合系数 κ，证明：

$$[SP]=\frac{1}{\kappa}\begin{bmatrix}\exp(i\phi/2) & t^*\exp(-i/\phi 2)\\ t\exp(i\phi/2) & \exp(-i\phi/2)\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$$

且 $AD-BC=1$

（c）利用式（2.1-11）证明：

$$|\chi|^2\equiv\left|\frac{A_{N+1}}{A_0}\right|^0_{B_{N+1}=0}=\left|\frac{1}{M_{11}}\right|^2=\frac{1}{1+|C|^2\dfrac{\sin^2(N+1)\theta}{\sin^2\theta}}$$

（d）推导公式（4.8-38）。

参考文献

1. Ramo, S., J. R. Whinnery, and T. Van Duzer, *Fields and Waves in Communication Electronics*. Wiley, New York, 1965.
2. Yariv, A., *Quantum Electronics*, 3rd ed. Wiley, New York, 1989, p. 99.
3. Fabry, C., and A. Perot, Theorie et applications d'une nouvelle methode de spectroscopie interferentielle. *Ann. Chim. Phys.* **16**:115 (1899).
4. Born, M., and E. Wolf, *Principles of Optics*, 3rd ed. Pergamon, New York, 1965, Chapter 7.
5. Peterson, D. G., and A. Yariv, Interferometry and laser control with Fabry–Perot etalons. *Appl. Opt*. **5**:985 (1966).
6. See, for example, Pochi Yeh, *Optical Waves in Layered Media*. Wiley, New York, 1988.
7. Boyd, G. D., and J. P. Gordon, Confocal multimode resonator for millimeter through optical wavelength masers. *Bell Syst. Tech. J.* **40**:489 (1961).

8. Boyd, G. D., and H. Kogelnik, Generalized confocal resonator theory. *Bell Syst. Tech. J.* **41**:1347 (1962).
9. Casperson, L., Gaussian light beams in inhomogeneous media. *Appl. Opt.* **12**:2434 (1973).
10. Levi, A. F., R. E. Slusher, S. L. McCall, J. L. Glass, S. J. Pearson, and Ra. A. Logan, Directional light coupling from micro-disk lasers. *Appl. Phys. Lett.*, **62**:561 (1993).
11. Little, B. E., Ultra compact Si–SiO_2 micro-ring resonator optical channel dropping filters. *Opt. Lett.* **23**:1570 (1998).
12. Cai, M., O. Painter, and K. J. Vahala, Observation of critical coupling in a fiber taper to a silica-microsphere whispering gallery mode system. *Phys. Rev. Lett.* **85**:74 (2000).
13. Yariv, A., Universal relations for coupling of optical power between micro-resonators and dielectric waveguides. *Electron. Lett.* **36**:32 (2000).
14. Choi, J. M., R. K. Lee, and A. Yariv, Ring fiber resonators based on fused silica-fiber grating add-drop filters: application to resonator coupling, *Opt. Lett.* **27**:1598 (2002).
15. Huang, Y., G. T. Paloczi, J. Scheuer, and A. Yariv, Soft lithography replication of polymetric microring optical resonators. *Optics Express* **11**:2452 (2003).
16. Paloczi, G., Y. Huang, and A. Yariv, Polymeric Mach–Zehnder interferometer using serially coupled microring resonators. *Optics Express* **11**:2666 (2003).

第 5 章　辐射和原子系统的相互作用

5.0　引言

在光电子学领域，特别是光通信，均匀介质的折射率是关键的物理参数，决定了光束的透射特性。在上一章我们以介电常数的形式定义了介质中的折射率。在本章中将研究折射率、色散、吸收的物理本质，特别是研究电磁波在原子介质（如原子蒸汽）中会发生什么现象。原子系统的量子态之间的跃迁包括光子的吸收或发射。互作用的结果导致原子系统的行为像振荡的电偶极子。这些单个的偶极子的累加导致介质宏观上发生电场极化，这是极化率、介电常数和折射率的物理本质。同时也将特别关注与原子互作用所引起的辐射的增强（或衰减），以及由于互作用光的传输速率的改变。本章中讨论的概念将用于后面处理激光振荡的问题。首先讨论原子跃迁和电磁辐射的吸收和发射之间的关联性，接着讨论经典电子模型和导出原子极化率；由此可得出折射率及其与原子系统的频率（色散）的依赖关系，再讨论原子体系的受激跃迁、吸收和放大，最后研究光放大器的增益饱和。

5.1　原子跃迁和电磁波

量子力学理论的基本结论之一是通过测量，每一个物理体系只能处在预先确定的一系列能量状态之上。这些能量状态被称为体系的本征态。每一个本征态只对应一个能量，它相当于体系占据该态时的总能量值。在量子力学基础教科书中有关于一些较简单体系如自由电子、氢原子和简谐振子的阐述，较为复杂的体系的例子有氢分子和半导体晶体。对于每一能态，以氢原子能态 m 为例，都可写出一个相应的本征函数

$$\psi_m(\boldsymbol{r}, t) = u_m(\boldsymbol{r}) \exp(-iE_m t/\hbar), \quad m = 1, 2, 3, \cdots \tag{5.1-1}$$

式中，$|u_m(\boldsymbol{r})|^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 表示电子出现在 $\boldsymbol{r}$ 处的体积元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 中处于状态 m 的概率，E_m 为该状态的能量，$\hbar \equiv h/2\pi, h = 6.626\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}$，为普朗克常量。

量子力学的主要课题之一是确定各种物理体系的本征函数 $u_m(\boldsymbol{r})$ 和与其相应的能量 E_m。本书中我们先假定这些状态和能级的存在，以及一些其他相关的结果。这些结论被实验证实，为量子力学理论提供了证明。以下将对部分结果进行讨论。

辐射过程和原子跃迁

一般的，在大多数原子体系中都存在很多本征态。让我们集中在其中两个能级，例如能级 1 和 2 上。对于氢原子，这两个能级是电子的 1s 和 2p 态。这种两能级系统可简化基本概念的介绍和讨论。图 5.1 画出了原子能级的示意图和可能的辐射过程。

假如原子体系初态处于基态（图 5.1 中的 E_1），当入射一个光子，光子可能被吸收，如果光子的能量满足如下条件

$$h\nu = E_2 - E_1 \tag{5.1-2}$$

并且满足特定的选择规则（如角动量守恒）。那么入射光子被吸收，原子被激发到较高能级（具有能量 E_2）。如果在时刻 $t=0$ 原子处于能态 2，那么在单位时间内，该原子存在一个有限的概率跃迁到能态 1，同时放出一个能量为 $h\nu = E_2 - E_1$ 的光子。这个过程的发生不需要有外来的辐射电场的诱导，称为自发辐射。如果原子的初态处在态 2 同时有光子入射，这时除了自发辐射还发生由于存在光子诱导而产生的辐射。这种辐射称为受激辐射，在很多情形下很重要，主要包括在激光器和光放大器中。

外加的电磁辐射与原子体系的互作用可以用量子力学或简单的经典电子模型来处理。在辐射过程中，原子体系的行为像一个振荡的电偶极子。在下一节中，我们将讨论由于外加电磁场导致的原子体系的电偶极距。

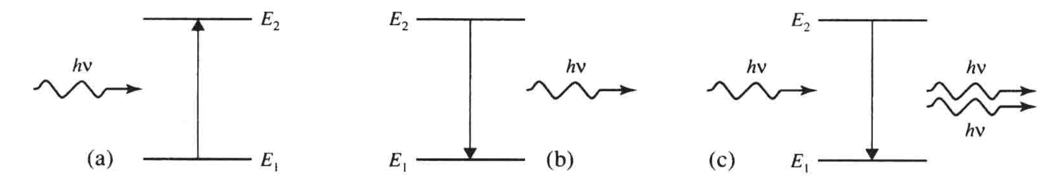


图 5.1　辐射过程：（a）吸收——入射光子被吸收同时原子态从本征态 1 激发到本征态 2；（b）自发辐射——原子态从本征态 2 跃迁回本征态 1 同时放射一个光子；（c）受激辐射——光子入射到原子体系并放射出附加的一个光子

5.2　原子极化和介电常数

考虑穿过透明的各向同性的介质的一束光的透射问题。在光束的电磁场的作用下，在原子内基本的荷电粒子（主要是电子）从各自的平衡位置发生位移。在大多数电介质中，这种电荷的相对分离直接正比于光束的电磁场并与之同方向。由此产生的电偶极距 $\boldsymbol{p}$ 可写为

$$\boldsymbol{p} = \alpha \boldsymbol{E} \tag{5.2-1}$$

式中，常数 α 就是熟知的原子极化率（或称为分子极化率），$\boldsymbol{E}$ 是电场。一般的，分子极化率是张量。对于球对称的原子体系，极化率简为标量。这个量可用简单的经典电子模型推导出来（见下一节）。介质的介电常数取决于原子内的排列方式。考虑气体介质这种较为简单的情形。令 N 是单位体积中的原子数，则极化强度可近似写为

$$\boldsymbol{P} = N\boldsymbol{p} = N\alpha\boldsymbol{E} \equiv \varepsilon_0 \chi \boldsymbol{E} \tag{5.2-2}$$

式中，χ 是介质的电极化率。在式（5.2-2）中，忽略了局域场和宏观场的区别。这对于气体介质 $N\alpha/\varepsilon_0 << 1$ 是合理的。按照式（1.1-5）和式（5.2-2），介质的介电常数式 ε 可表示为

$$\varepsilon = \varepsilon_0(1+\chi) = \varepsilon_0(1 + N\alpha/\varepsilon_0) \tag{5.2-3}$$

假如介质是非磁化的，按照式（1.4-15）介质的折射率可写为

$$n^2 = 1 + \chi = 1 + N\alpha/\varepsilon_0 \tag{5.2-4}$$

值得注意的是折射率和介电常数都与光的频率有关。我们在第 3 章讨论氧化硅的时候已提到这一点。这就是色散，在下一节我们在叙述经典电子模型时将作进一步的讨论。

对于固体和液体，密度 N 大约比气体高出 1000 倍。因此电极化率会大很多。在这种情况下，单个原子（或分子）的电场 $\boldsymbol{E}$ 不是介质中的平均电场。单个原子（或分子）的电场被称为局域场。为了分析局域场，我们考虑一个均匀的介质，在整个介质中（在宏观长度尺度上）电场 $\boldsymbol{E}$ 是均匀的。考虑构成介质得其中的一个原子（或分子），围绕这个特殊的原子画一个半径为 r 的球面。这可代表影响原子的微观和宏观的边界。将球面外的电解质看做连续的介质，将球面内的看做极化原子的集合。因为是均匀极化，表面电荷分布在球面的内表面，很容易证明由于表面电荷所对应的场强为

$$\boldsymbol{E}_{表面电荷} = \frac{\boldsymbol{P}}{3\varepsilon_0} \tag{5.2-5}$$

因此单个分子可观察到的净的电场（局域场）是

$$\boldsymbol{E}_{局域} = \boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{P}}{3\varepsilon_0} \tag{5.2-6}$$

这个场强比介质中的平均场强要大。上面的分析表示了由于介质中的原子（或分子）与另一个原子（或分子）的长程互作用产生了局域场。用式（5.2-2）中的电场代入式（5.2-6），可得

$$\boldsymbol{P} = N\alpha\boldsymbol{E}_{局域} = N\alpha(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{P}}{3\varepsilon_0}) = \varepsilon_0\chi\boldsymbol{E} \tag{5.2-7}$$

消去 $\boldsymbol{P}$，可得

$$\chi = \frac{\dfrac{N\alpha}{\varepsilon_0}}{1 - \dfrac{N\alpha}{3\varepsilon_0}} \tag{5.2-8}$$

这就是介质磁化率常数，通过计算局域电场效应而得出。按照式（5.2-3），通常上式可表示为

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} = \frac{N\alpha}{3\varepsilon_0} \tag{5.2-9}$$

这个公式被称为克劳修斯-莫索蒂关系式。注意到电解质的磁化率简为 $\chi = N\alpha/\varepsilon_0$，在稀薄的系统中 $\chi = N\alpha/\varepsilon_0 \ll 1$。

5.3 经典电子模型

为了解决原子的极化问题，我们需要解在入射光波的电场作用下所引入的原子的电偶极距。既然原子相对光波要小很多，就可以假设对每一个原子电场是均匀的。令原子中光波所对应的电场为

$$E = E_0 \exp(i\omega t) \tag{5.3-1}$$

式中，E_0 是常数振幅，ω 是频率。原子体系中的每一个荷电粒子都受到这个电场的作用从而受到或向上或向下（或向后或向前）的随时间变化的电场力的作用。因为荷电粒子与电子的质量的很大差异，电子对电偶极距的贡献是主要的。应用经典物理，我们进一步假设电子对原子是“快速”弹性的，遵守如下运动方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}X + m\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X + m\omega_0^2 X = -eE \tag{5.3-2}$$

式中，X 是电子相对原子的位置，m 是电子的质量，$-e$ 是电子的电荷。参数 ω_0 是电子运动的共振频率，γ 是阻尼系数。对于如图 5.1 所示的两能级系统，$\omega_0 = (E_2 - E_1)/\hbar$。对于谐振形式的场，上述方程的稳态解如下式

$$X = \frac{-eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}\exp(i\omega t) \tag{5.3-3}$$

引入的电偶极距可表示为

$$p = -eX = \frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}E_0 \exp(i\omega t) \tag{5.3-4}$$

利用式（5.2-2），可得到原子极化率的表达式如下公式所示

$$\alpha = \frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} \tag{5.3-5}$$

如果单位体积中有 N 个原子，按照式（5.3-5）和（5.2-4）介质的折射率可表示为

$$n^2 = 1 + \chi = 1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} \tag{5.3-6}$$

式中，磁化率 χ 通常以实部和虚部形式

$$\chi = \chi' - i\chi'' = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} \tag{5.3-7}$$

注意到当频率 ω 接近共振频率 ω_0 时磁化率 χ 取最大值。共振时，$\omega = \omega_0$，磁化率 χ 为纯虚数。如果式（5.3-6）中的第二项相对 1 很小，折射率可近似写为

$$n = 1 + \frac{1}{2}\chi = 1 + \frac{Ne^2}{2m\varepsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} \quad （当\chi \ll 1时） \tag{5.3-8}$$

在接近共振（$\omega \approx \omega_0$）的频率附近，上述公式可写为

$$n^2 = 1 + \chi = 1 + \frac{Ne^2}{2\omega_0 m\varepsilon_0(\omega_0 - \omega + i\gamma/2)} \tag{5.3-9}$$

$$\chi = \chi' - i\chi'' = \frac{Ne^2}{2\omega_0 m\varepsilon_0(\omega_0 - \omega + i\gamma/2)} \tag{5.3-10}$$

$$n = 1 + \frac{1}{2}\chi = 1 + \frac{Ne^2}{4\omega_0 m\varepsilon_0(\omega_0 - \omega + i\gamma/2)} \quad （当\chi \ll 1时） \tag{5.3-11}$$

式（5.3-6）不仅以原子的基本参量的形式表示了折射率，而且显示出折射率随光的频率 ω 的变化。尽管如此，要由此计算出折射率还不太现实，因为材料的参量 N 和 ω_0 同是变化的。进一步，共振频率 ω_0 的计算需要用量子力学的方法。所以我们对所有的材料不可能得到折射率的一个很简单的公式。尽管如此，式（5.3-9）和式（5.3-11）对许多实际的问题非常有用。首先，考虑气体介质，如空气、氦气和氢气。电子振荡对应的共振频率在紫外波段，这些频率远高于可见光；也就是 ω_0 远大于可见光的 ω。作第一个近似，我们在分母上相对 ω_0^2 忽略 ω^2 和 $i\gamma\omega$。这样我们发现折射率几乎为常数。如果我们取标准温度（0℃）和压强（760mmHg）时气体的密度 $N = 2.69\times10^{25}\,\mathrm{m}^{-3}$，吸收边取在 $\lambda_0 = 80\mathrm{nm}$，由公式（5.3-7）得

出对空气 $n=1.0002$。对大多数透明物质如玻璃和水，N 值比空气的大三个量级；因此磁化率要大很多。当我们研究激光媒质中的增益或损耗时公式（5.3-7）和公式（5.3-10）也十分有用。当描述气体激光器（如氦-氖，氩离子激光器）激光跃迁的增益谱时公式（5.3-6）～公式（5.3-11）也十分有用。

利用量子力学的含时微扰可得出类似的表达式。假设原子体系初态处于低能级（图 5.1a 中的态 1），原子的极化率可表示为[1]

$$\alpha = \frac{f_{21}e^2}{2\omega_0 m(\omega_0 - \omega + i\gamma/2)} \tag{5.3-12}$$

式中，γ 是跃迁的线宽，f_{21} 是振子强度可表示为

$$f_{21} = \frac{2m\omega_0}{\hbar}|\langle u_2|x|u_1\rangle|^2 = \frac{2m\omega_0}{\hbar}\iiint u_2^* x u_1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{5.3-13}$$

式中，u_1 和 u_2 是本征态的波函数，假设电场偏振沿 x 方向。振荡强度是无量纲的量。这个量表征了原子体系中不同跃迁的相对强度。可以证明有

$$\sum_{m=2}^{\infty} f_{m1} = 1 \tag{5.3-14}$$

以上是对所有态累加，初态（态 1）除外。公式（5.3-14）被称为求和法则。注意到经典电子模型在所讨论的两能级时原子中占主导地位的能级时可得到较为准确的结果。

5.4　色散和复折射率

如果仔细验看折射率的表达式（5.3-11），我们会注意到当增加 ω 接近 ω_0，折射率也增加。所以 n 缓慢地随 ω_0 增加。这对几乎所有的透明介质都成立。因此蓝光的折射率要比红光的折射率要大。这个折射率与频率的关联现象称为色散，式（5.3-7）称为色散方程。后面我们会看到色散会影响光信号在光通信系统中的传播。

上节中，在公式（5.3-16）的分母上忽略了虚数项 $i\gamma\omega$。这一项对应电子运动的阻尼（$\gamma>0$）并产生光吸收现象。由于阻尼项，$i\gamma\omega$，按照公式（5.3-7）折射率是复数。折射率的虚部仅当 ω 接近 ω_0 时才有意义。将式（5.3-8）用实部和虚部的形式表示，复折射率可写为

$$n' = n - i\kappa = 1 + \frac{Ne^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{2m\varepsilon_0[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]} - i\frac{Ne^2\gamma\omega}{2m\varepsilon_0[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]} \tag{5.4-1}$$

这里我们用 n' 表示复折射率，$-\kappa$ 表示折射率的虚部。从现在起，用 n 表示折射率的实部。常数 κ 称为消光系数，因为它代表了电磁波的吸收（或衰减）。为验看 κ 对电磁辐射的作用，考虑复折射率为 $n-i\kappa$ 的介质中单色平面波的传输。按照 1.4 节中的讨论，这样的波可表示为

$$E = A\exp[i(\omega t - k'z)] \tag{5.4-2}$$

式中，k' 表示介质中的波数，可表示为

$$k' = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\omega}{c}n' = \frac{2\pi}{\lambda}n' \tag{5.4-3}$$

利用复折射率表达式（5.4-1），波数 k' 也是复数，表示为

$$k' = \frac{2\pi}{\lambda}(n - i\kappa) \tag{5.4-4}$$

式中，n 现在是复折射率的实部，κ 是消光系数。用式（5.4-4）中的 k' 代入式（5.4-2），光波的电场则表示为

$$E = A\exp\left[i\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}nz\right)\right]\exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda}\kappa z\right) \tag{5.4-5}$$

注意到复折射率的虚部导致电磁辐射沿传播方向衰减。衰减系数通常定义为

$$\alpha \equiv \frac{1}{I}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z} \tag{5.4-6}$$

式中，I 是电磁辐射的强度，除了一个常数因子外，正比于 E^*E。按照式（5.4-6），不断衰减的光强可写为

$$I(z) = I(0)\exp(-\alpha z) \tag{5.4-7}$$

式中，I（0）是 z=0 侧的光强。式（5.4-6）定义的衰减系数 α 与消光系数 κ 的关系式为

$$\alpha = \frac{4\pi}{\lambda}\kappa \tag{5.4-8}$$

按照式（5.4-7）和（5.4-5），衰减系数正比于复折射率的虚部。按照式（5.4-8），即使很小的 κ 也导致可见光很强的衰减。例如，当 κ =0.0001 和 $\lambda = 0.5\,\mu\text{m}$，由式（5.4-8）计算得衰减系数 $\alpha = 25\text{cm}^{-1}$。

复折射率的实部 n 和虚部 κ 都是 ω 的函数。特别当 ω 接近 ω_0，这种与 ω 的依赖关系很有意义。为研究频率位于共振附近的色散，设公式（5.4-1）中 $\omega \approx \omega_0$

$$n - i\kappa = 1 + \frac{Ne^2(\omega_0 - \omega)}{4m\omega_0\varepsilon_0[(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma/2)^2]} - i\frac{Ne^2(\gamma/2)}{4m\omega_0\varepsilon_0[(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma/2)^2]} \tag{5.4-9}$$

等价地，磁化率可写为

$$\chi = \chi' - i\chi'' = \frac{Ne^2(\omega_0 - \omega)}{2m\omega_0\varepsilon_0[(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma/2)^2]} - i\frac{Ne^2(\gamma/2)}{2m\omega_0\varepsilon_0[(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma/2)^2]} \tag{5.4-10a}$$

磁化率通常以频率 ν 的函数的形式写为

$$\begin{aligned} \chi' &= \frac{Ne^2(\nu_0 - \nu)}{4\pi m\omega_0\varepsilon_0[(\nu_0 - \nu)^2 + (\Delta\nu/2)^2]} \\ \chi'' &= \frac{Ne^2(\Delta\nu/2)}{4\pi m\omega_0\varepsilon_0[(\nu_0 - \nu)^2 + (\Delta\nu/2)^2]} \end{aligned} \tag{5.4-10b}$$

式中，$\Delta\nu$ 是以赫兹为单位的 FWHM 带宽。图 5.2 表示了归一化的 n–1 和 κ 与 ω 的函数关系。注意消光系数 κ 在 $\omega = \omega_0$ 处最大并随 $|\omega - \omega_0|$ 的增大呈 $|\omega - \omega_0|^{-2}$ 的函数关系减小，事实上，式（5.4-9）中的 $\kappa(\omega)$ 呈洛仑兹线形。另一方面，折射率的实部接近于 1，随 $|\omega - \omega_0|$ 的增大呈 $|\omega - \omega_0|^{-1}$ 的函数关系减小。这就解释了当频率位于 κ 可忽略的范围，对于大多数透明材料存在色散的事实。按照式（5.4-9），对低频（$\omega < \omega_0$）折射率大于 1 并且当频率接近共振频率 ω_0 时，折射率随 ω 增加而增加。这种增加的行为属于正常色散并发生在大多数介质中。非常接近共振频率时，函数图存在一小部分的斜率是负的。这种负的斜率通常属于反常色散。从图 5.2 中可以看出，反常色散总是发生在显著的吸收时。

在 5.3 节中讨论的经典电子模型中，我们仅假设了单一的共振 ω_0，这对应两能级系统，比实际的情况要简单。

事实上，对于每一个原子都存在几个共振频率。现在修改色散方程，假设不是所有的电子受到相同的约束力，但是所有电子独立振荡。令 f_j 为共振频率为 ω_j 阻尼因子为 γ_j 的电子的比例。将所有原子的振荡叠加，可得

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}\sum_j \frac{f_j}{(\omega_j^2 - \omega^2 + i\gamma_j\omega)} \tag{5.4-11}$$

比例 f_j 被称为振子强度，由式（5.3-13）定义，是无量纲的。由定义，振子强度遵循以下规则

$$\sum_j f_j = Z \tag{5.4-12}$$

式中，Z 是每个原子中的电子数。振子强度的理论估算需要原子体系的波函数的知识。为了说明振子强度的量级和遵循的规则，先从氢原子中 1s → 2p 的跃迁（$\omega_{1s\to 2p} = 1.55\times10^{16}\,\text{s}^{-1}$）估算振子强度为 0.4162，从基态到所有除 2p 以外的态的跃迁对应的振子强度的和是 0.5838。在前面的讨论中，我们假设了对于每一个共振频率都有一个阻尼系数 γ_j 与之对应。这些系数都是正的，电子的阻尼导致电子辐射的衰减。

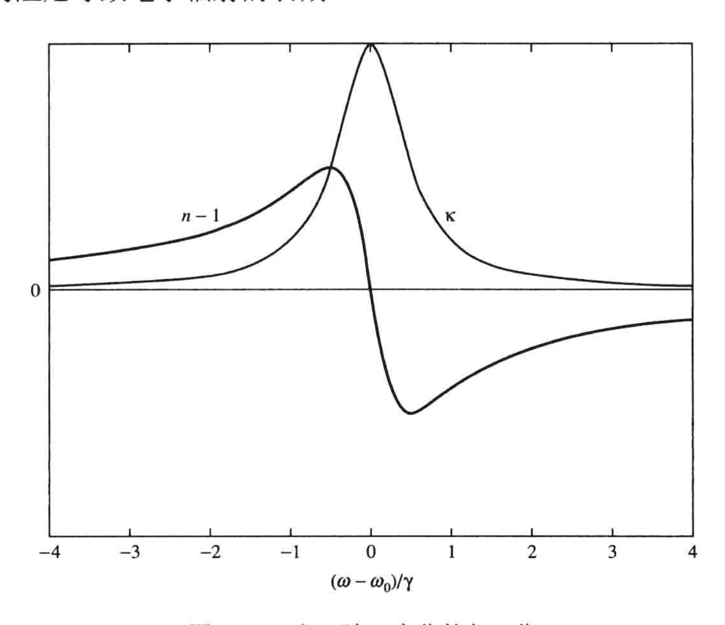


图 5.2　n 和 κ 随 ω 变化的归一化

在有些电子的激发态上，电磁辐射将驱动电子并激发出共振频率上的光子发射。对于这样的激发体系（或反转体系），式（5.4-11）依然有效，只要将参数 N 替换成 $N_g - N_j$，其中 N_g 是单位体积中的基态数而 N_j 是单位体积中的第 j 个激发态数。在反转体系中，N_j 大于 N_g；因此激发体系的复折射率在接近共振频率 ω_j 的小的频率范围内虚部为正，同时 $N_g - N_j$ 为负。按照式（5.4-5），当 $\kappa < 0$ 的介质中电磁辐射的传播将导致能量的放大。这样的介质称谓增益介质，用虚部为正（即 $\kappa < 0$）的复折射率描述。

图 5.3 表示了一些透明的光学材料的折射率在 $\lambda = 0.3\,\mu m$ 到 $\lambda = 30\,\mu m$ 的范围内的色散分布。通常 n 的色散用波长 λ 的形式表示。

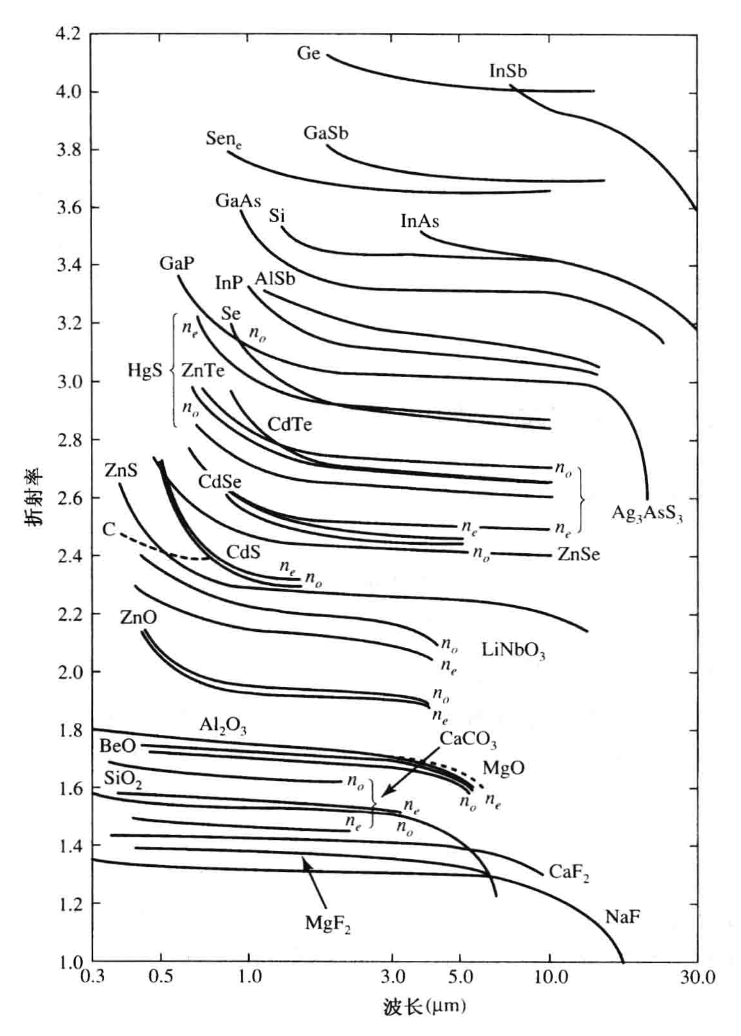


图 5.3　折射率 n 关于 λ 的关系图。对双折射晶体，n_o 是寻常光的折射率，n_e 是非常光的折射率（数据取自参考文献[2]）

电子气（金属）的复折射率

在金属中，电子不是围绕着原子振动而是在外加的电场的作用下可以自由运动。对于这些电子没有恢复力。令 $\omega_0 = 0$，运动方程（5.3-2）仍然有效。因此 5.3 节中得出的所有结论仍然适用于金属。式（5.3-2）中令 $\omega_0 = 0$，得到金属的复折射率

$$n^2 = 1 - \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0(\omega^2 - i\gamma\omega)} \tag{5.4-13}$$

式中，N 是电子浓度。事实上，式（5.4-13）给出了实际复折射率的很好的近似，假定已忽略了金属和一些半导体中被深度约束的电子的贡献。阻尼常数代表了涉及动量转移的碰撞的平均概率。如果我们进一步假设 $\gamma \ll \omega$，折射率可表示为

$$n^2 = 1 - \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \tag{5.4-14}$$

式中，ω_p 是等离子角频率，表示为

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \tag{5.4-15}$$

对于高频辐射（$\omega > \omega_p$），折射率是实数，波自由传输。当频率低于等离子角频率 ω_p 时，n 是纯虚数。因此在金属中，从表面出发（见习题 5.4），电场呈指数衰减。结果上述电磁辐射入射到高电导率的金属中会在表面被反射回去。金属，如铝、铜、金、银，自由电子的浓度在 $N = 10^{23}\,\text{cm}^{-3}$ 的量级。这意味着 $\omega_p \approx 2\times10^{16}\,\text{s}^{-1}$，所以对可见和红外光 $\omega < \omega_p$，按照式（5.4-14），折射率是虚数。一般的，当 γ 有限时，折射率是复数。

5.5 线形函数——均匀增宽和非均匀增宽

按照式（5.4-8）和式（5.4-9），两能级的原子系统的吸收系数可写为

$$\alpha(\omega) = \frac{4\pi}{\lambda}\frac{Ne^2\gamma}{8m\omega_0\varepsilon_0[(\omega_0-\omega)^2+(\gamma/2)^2]} \tag{5.5-1}$$

式中，ω 是光的频率，ω_0 是原子系统的共振频率。验看上式，注意到吸收不是严格意义上的单色（即一个频率）。事实上，吸收峰在 ω_0 并当 ω 偏离 ω_0 吸收迅速减小。由式（5.5-1）表述的线形称为洛仑兹线形。在经典的电子模型中，吸收谱与自发辐射谱相同。所以，如果对 2→1 自发跃迁辐射进行光谱分析，则会发现辐射并非严格单色（即单一频率），而是占据一定的频带宽度。按照式（5.5-1），在 ω_0 处的两能级系统的辐射发光谱的归一化线形函数可写为

$$f(\omega) = \frac{\gamma}{[(\omega_0-\omega)^2+(\gamma/2)^2]} \tag{5.5-2}$$

上述线形正好是阻尼振荡电偶极子的傅里叶谱（见习题 5.7）。在光电子中，线形函数 $g(\nu)$ 通常以频率 ν 的分布函数的形式表示，它满足归一化条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\nu)\,\mathrm{d}\nu = 1 \tag{5.5-3}$$

因而 $g(\nu)\,\mathrm{d}\nu$ 表示由给定能级 2 到能级 1 的自发辐射发出一个频率在 ν 到 $\nu+\mathrm{d}\nu$ 之间的光子的概率。

从实验的角度，$g(\nu)$ 可由原子系统的辐射发光谱的分析得到，或可由通过光在包含原子系统特征的样品的透射与频率 ν 的函数关系的测量而得到。辐射和吸收可由同一线形函数 $g(\nu)$ 描述，既可由实验证明，也可由量子力学基本理论导出。

均匀增宽和非均匀增宽

利用经典电子模型得到的结论，原子跃迁的线形函数可写为

$$g(\nu) = \frac{1}{2\pi}\frac{\gamma/2\pi}{(\nu-\nu_0)^2+(\gamma/4\pi)^2} \tag{5.5-4}$$

式中，$\nu_0 = \omega_0/2\pi$，γ 是阻尼因子。洛伦兹线形函数下降到峰值的一半时的频率间隔 $\Delta\nu$ 是

线宽，可表示为

$$\Delta\nu = \gamma/2\pi \tag{5.5-5}$$

以线宽的形式表示，归一化的线性函数可写为

$$g(\nu) = \frac{\Delta\nu}{2\pi[(\nu-\nu_0)^2 + (\Delta\nu/2)^2]} \tag{5.5-6}$$

导致自发辐射频率展宽的可能的原因之一是激发态的寿命有限。按照式（5.3-2），电子的振荡振幅当驱动电场撤掉后会衰减。解存在驱动电场时的公式（5.3-2），可得

$$\left|X(t)\right|^2 \propto \exp(-\gamma t)$$

因此阻尼因子与自发辐射的寿命的关系为

$$\gamma = 1/\tau \tag{5.5-7}$$

利用公式（5.5-5），线宽可写为

$$\Delta\nu = \frac{1}{2\pi\tau} \tag{5.5-8}$$

这里线宽的展宽是由于较高能级 (τ_u) 的有限寿命。在许多激光系统中，较低能级 (τ_l) 的寿命也是有限的。这种情形下间跃迁时，总的线宽展宽是上述两个能级对应的展宽的总和。碰撞造成进一步的展宽。在相干辐射的过程中，一个原子的辐射场与另一个原子的弹性碰撞而引起的相位骤变有关（见习题 5.8）。令 τ_{co} 是碰撞时间，可将式（5.5-8）写为

$$\Delta\nu = \frac{1}{2\pi}\left(\tau_u^{-1} + \tau_l^{-1} + \tau_{\mathrm{co}}^{-1}\right) \tag{5.5-9}$$

上述增宽类型（即发射光谱的有限宽度）称为均匀增宽，其特征是，在 $\Delta\nu$ 范围中的响应增宽是样品中每一个原子自身的特点。因此，函数 $g(\nu)$ 描写了任一不可区分的原子的响应。

如上所述，均匀增宽多半是由于发射或吸收原子具有有限的相互作用寿命，最普通的机理有：

1. 激发态的自发辐射寿命。

2. 晶体中的原子与声子的碰撞，可能引起声子能量的发射或吸收，但这种碰撞不会中止原子在吸收或发射态的寿命。然而，它会中断原子振荡和外场之间的相对相位关系，从而造成辐射展宽。

3. 气体中原子的压力增宽。当原子密度足够大时，原子间的频繁碰撞，如前述机理一样，会造成寿命的终止和相位关系的中断，成为增宽机理的主要因素。

不过，在很多物理现象中个体原子是可区分的，每一个原子的跃迁频率 ν_0 都有微小差别。如果在这种情况下观察的自发辐射光谱，其光谱分布反映的是各个跃迁频率增宽，而不是受激态有限寿命引起的增宽。这种增宽可由两种典型情形引起，称为“非均匀增宽”。

情形之一：存在于晶体中的杂质离子其能级和跃迁频率，与邻近的晶格有关。随机的应变，以及其他类型的晶体缺陷，使每个晶格周围的情形都不尽相同，进而影响到跃迁频率的增宽。情形之二：气体原子（或分子）的跃迁频率 ν 会由于原子的有限速度按下式发生多普勒频移

$$\nu = \nu_0 + \frac{v_x}{c}\nu_0 \tag{5.5-10}$$

式中，v_x 是运动原子沿相对于观察者方向的速度分量，c 为真空中的光速，ν_0 是静止时原子的频率。温度 T 时，处于平衡态的原子量为 M 的气体的麦克斯韦速度分布函数是[3]

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{M}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{M}{2kT}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\right) \tag{5.5-11}$$

其中，$k = 1.38\times10^{-23}$ J/K，为玻耳兹曼常量，$f(v_x,v_y,v_z)\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z$ 代表速度 x 分量在 v_x 到 $v_x+\mathrm{d}v_x$ 之间，速度 y 和 z 分量分别在 v_y 到 $v_y+\mathrm{d}v_y$，v_z 到 $v_z+\mathrm{d}v_z$ 之间的原子的百分比，换言之，可以将 $f(v_x,v_y,v_z)\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z$ 看做任一给定原子的速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 在速度空间中位于 $\boldsymbol{v}$ 处速度体积元 $\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z$ 内的概率，所以

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} f(v_x, v_y, v_z)\, \mathrm{d}v_x\, \mathrm{d}v_y\, \mathrm{d}v_z = 1 \tag{5.5-12}$$

根据式（5.1-10），跃迁频率位于 ν 和 $\nu+\mathrm{d}\nu$ 之间的概率 $g(\nu)\mathrm{d}\nu$，与 v_x 处于 $v_x=(\nu-\nu_0)(c/\nu_0)$ 和 $(\nu+\mathrm{d}\nu-\nu_0)(c/\nu_0)$ 之间的概率相等，并且与 v_y 和 v_z 的值无关[因为如果 $v_x=(\nu-\nu_0)(c/\nu_0)$，发生多普勒效应的频率将等于 ν，而与 v_y 和 v_z 无关]。所以将 $v_x=(\nu-\nu_0)(c/\nu_0)$ 代入 $f(v_x,v_y,v_z)\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z$ 中，然后对所有的 v_y 和 v_z 值求积分，就可求得该概率为

$$g(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \left(\frac{Mc^2}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(M/2kT)(v_y^2+v_z^2)}\mathrm{d}v_y\,\mathrm{d}v_z \times \mathrm{e}^{-(Mc^2/2kT)(\nu-\nu_0)^2/\nu_0^2}\left(\frac{1}{\nu_0}\right)\mathrm{d}\nu \tag{5.5-13}$$

应用定积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{(-M/2kT)v_z^2}\mathrm{d}v_z = \left(\frac{2\pi kT}{M}\right)^{1/2}$$

由式（5.1-13）得

$$g(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \frac{1}{\nu_0}\left(\frac{Mc^2}{2\pi kT}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{-(Mc^2/2kT)(\nu-\nu_0)^2/\nu_0^2}\,\mathrm{d}\nu \tag{5.5-14}$$

上式称为归一化的多普勒增宽线形函数。式（5.5-14）中 $g(\nu)$ 的函数关系称为高斯关系式。此时，$g(\nu)$ 的宽度即是当 $g(\nu)$ 从峰值下降到峰值一半时的频率间隔。从式（5.1-14）可得此宽度为

$$\Delta\nu_D = 2\nu_0\sqrt{\frac{2kT}{Mc^2}\ln 2} \tag{5.5-15}$$

式中，下标 D 代表多普勒效应。我们可以重新将 $g(\nu)$ 用 $\Delta\nu_D$ 写成

$$g(\nu) = \frac{2(\ln 2)^{1/2}}{\pi^{1/2}\Delta\nu_D}\,\mathrm{e}^{-[4(\ln 2)(\nu-\nu_0)^2/\Delta\nu_D^2]} \tag{5.5-16}$$

图 5.4 是一个线形函数的例子，它是 Nd^{3+} 在 $CaWO_4$ 晶格中作为杂质离子存在时的自发发射光谱，该光谱由许多部分重叠的跃迁组成。

例：Ne 的多谱勒谱线宽度。

计算在 He-Ne 激光器中氖在 6328 Å 处发生跃迁，将氖的原子量 20 代入式（5.5-15），取温度 T=300K，可得多普勒线宽为

$$\Delta\nu_D \approx 1.5\times10^9\ \text{Hz}$$

按式（5.1-15）计算在 CO_2 激光器中，10.6μm 的跃迁，可得 $\Delta\nu_D \approx 6\times10^7\text{Hz}$。

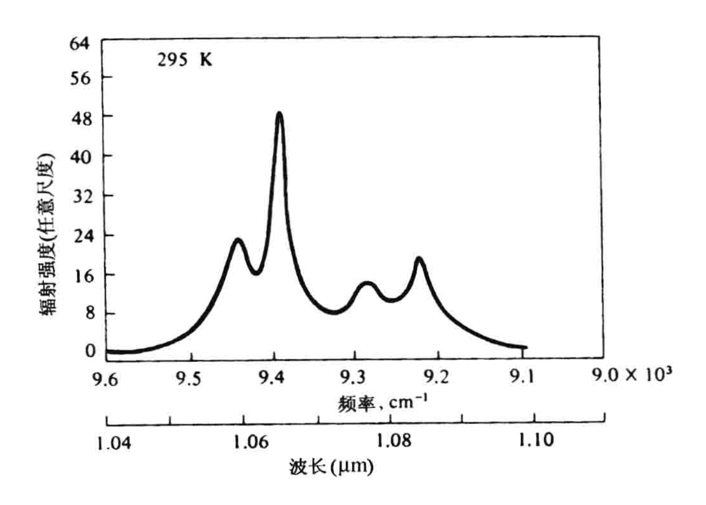


图 5.4　Nd^{3+}：$CaWO_4$ 在 1.06μm 激光跃迁附近的发射光谱，主峰对应于激光跃迁（引自参考文献[4]）单位 1cm^{-1} 对应频率 $\nu = 30\text{GHz}$，或光子能量 $h\nu = 1.24\times10^{-4}\text{eV}$

5.6　受激跃迁——吸收和放大

两能级系统如图 5.1 所示，在频率为 $\nu \sim (E_2 - E_1)/h$ 的电磁场中，原子会发生自 1 到 2 的跃迁，在此过程中原子从电磁场中吸收一个能量为 $h\nu$ 的量子（光子）。如果原子受到电磁场作用时正好位于能级 2，它就会向下跃迁到能级 1，并发射一个能量为 $h\nu$ 的光子。受激跃迁与上一节所述的自发跃迁过程的区别在于，从 2→1 和 1→2 的受激跃迁概率是相等的，而由 1→2（即原子能量增加的过程）的自发跃迁概率等于零。另一个基本的差别——也是从量子力学的角度考虑——是受激跃迁概率与外加电磁场强度成正比，而自发率则与其无关。在处理原子系统与电磁场的相互作用时，受激跃迁概率与（激发）场强度之间的关系十分重要，下面是这个关系的推导。

首先考虑一个全同原子系与辐射场的作用，在跃迁频率附近，能量密度是频率的函数且均匀分布（在原子线形函数内）。将单位频率的能量密度定义为 $\rho(\nu)$，并假设每个原子从 2→1 和 1→2 的受激跃迁概率皆与 $\rho(\nu)$ 成正比，于是有

$$(W'_{21})_{受激} = B_{21}\rho(\nu) \qquad (W'_{12})_{受激} = B_{12}\rho(\nu) \tag{5.6-1}$$

式中，B_{21} 和 B_{12} 为待定常数。总的向下（2→1）跃迁概率是受激和自发跃迁之和

$$W'_{21} = B_{21}\rho(\nu) + A_{21} \tag{5.6-2}$$

自发速率 A_{21} 在 5.1 节中曾讨论过。总的向上（1→2）跃迁概率是

$$W_{12}' = (W_{12}')_{受激} = B_{12}\rho(\nu) \tag{5.6-3}$$

首先要确定 B_{12} 和 B_{21}。由于系数 B_{12} 和 B_{21} 的大小只与原子有关，而与辐射场无关，让我

们来考虑一个具有普遍性的例子。假设原子处于热平衡温度为 T 的黑体辐射场中。在这种情形下，辐射场能量密度由下式给出[5]

$$\rho(\nu)=\frac{8\pi n^3 h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1} \tag{5.6-4}$$

由于在热平衡时能级 2 和能级 1 的平均电子数目不随时间而变，所以 2→1 的跃迁数目在给定时间间隔内等于 1→2 的跃迁数，也就是

$$N_2 W'_{21}=N_1 W'_{12} \tag{5.6-5}$$

式中，N_1 和 N_2 分别为能级 1 和 2 上的电子数目。将式（5.6-2）和（5.6-3）代入式（5.6-5），可得

$$N_2[B_{21}\rho(\nu)+A_{21}]=N_1 B_{12}\rho(\nu)$$

将式（5.6-4）中的 $\rho(\nu)$ 代入上式得

$$N_2\left(B_{21}\frac{8\pi n^3 h\nu^3}{c^3(e^{h\nu/kT}-1)}+A_{21}\right)=N_1\left(B_{12}\frac{8\pi n^3 h\nu^3}{c^3(e^{h\nu/kT}-1)}\right) \tag{5.6-6}$$

因为原子处于热平衡，N_2/N_1 比值由玻耳兹曼因子决定[5]

$$\frac{N_2}{N_1}=e^{-h\nu/kT} \tag{5.6-7}$$

式（5.6-6）和式（5.6-7）中的 N_2/N_1 相等，可得

$$\frac{8\pi n^3 h\nu^3}{c^3(e^{h\nu/kT}-1)}=\frac{A_{21}}{B_{12}e^{h\nu/kT}-B_{21}} \tag{5.6-8}$$

上述等式仅当

$$B_{12}=B_{21} \tag{5.6-9}$$

时才成立，同时有

$$\frac{A_{21}}{B_{21}}=\frac{8\pi n^3 h\nu^3}{c^3} \tag{5.6-10}$$

上述最后的两个方程式由爱因斯坦最先给出[6]，我们可以用式（5.6-10）将受激跃迁概率式（5.6-1）重新写为

$$W_i'=\frac{A_{21}c^3}{8\pi n^3 h\nu^3}\rho(\nu)=\frac{c^3}{8\pi n^3 h\nu^3 t_{自发}}\rho(\nu) \tag{5.6-11}$$

这里 $t_{自发}\equiv 1/A_{21}$ 是原子的自发辐射的寿命。根据式（5.6-9），不考虑 2→1 和 1→2 受激跃迁概率的区别。

式（5.6-11）表述的是均匀（白色）光谱在单位频率间隔中的能量密度为 $\rho(\nu)$ 的场中，每个原子的受激跃迁概率。当单位频率间隔中的能量密度 $\rho(\nu)$ 不是均匀的而是与原子线形函数 $g(\nu)$ 相关，受激跃迁概率可写成

$$W_i=\int\frac{c^3}{8\pi n^3 h\nu^3 t_{自发}}\rho_\nu g(\nu)\,d\nu \tag{5.6-12}$$

在光电子中，我们主要关心的是频率为 ν 的单色（即单一频率）场的受激跃迁概率。令受激跃迁概率为 $W_i(\nu)$。对于频率为 ν 的单色场，单位频率的间隔中的能量密度为 $\rho(\nu')$ 是 δ

函数

$$\rho(\nu') = U_0\delta(\nu' - \nu) \tag{5.6-13}$$

式中，U_0是单色场的能量密度（$\mathrm{J/m^3}$）。把式（5.6-13）中的单位频率的间隔中的能量密度代入式（5.6-12），可得

$$W_i = \frac{c^3U_0}{8\pi n^3 h\nu^3 t_{自发}} g(\nu) \tag{5.6-14}$$

式中，U_0是诱导跃迁的电磁场的能量密度（$\mathrm{J/m^3}$）。上式就是能量密度为U_0、频率为ν的单色场所激发的受激跃迁概率。

回到我们的中心结论，式（5.6-14），利用光强$I_0 = cU_0/n$（$\mathrm{W/m^2}$），可将方程重新表达如下：

$$W_i(\nu) = \frac{A_{21}c^2 I_0}{8\pi n^2 h\nu^3} g(\nu) = \frac{\lambda^2 I_0}{8\pi n^2 h\nu t_{自发}} g(\nu) \tag{5.6-15}$$

式中，I_0是频率为ν的光强，c为光在真空中的速度，λ是真空中的波长，$t_{自发} \equiv 1/A_{21}$。注意到受激跃迁概率正比于入射光束的光强。

吸收和放大

考虑有一束频率为ν强度为I_0的单色平面波，通过一介质。该介质中在单位体积内处于能级 1 和能级 2 的原子数为N_1和N_2。由式（5.6-15）可知，单位时间、单位体积内发生的从能级 2 到能级 1 的受激跃迁，以及从能级 1 到能级 2 的跃迁的次数分别为N_2W_i和N_1W_i。于是在单位体积内产生的功率为

$$\frac{P}{体积} = (N_2 - N_1)W_i h\nu \tag{5.6-16}$$

该辐射与传播的波相干（即具有确定的位相关系）叠加，所以在没有任何损耗机制时，等于单位长度中光强的增加。考虑沿传播方向在微分距离 dz 内功率的增加，应用式（5.6-15）可得

$$\frac{\mathrm{d}I_0}{\mathrm{d}z} = (N_2 - N_1)\frac{c^2 g(\nu)}{8\pi n^2 h\nu^2 t_{自发}} I_0 \tag{5.6-17}$$

其解为

$$I_0(z) = I_0(0)\mathrm{e}^{\gamma(\nu)z} \tag{5.6-18}$$

式中，$\gamma(\nu)$是增益系数

$$\gamma(\nu) = (N_2 - N_1)\frac{c^2}{8\pi n^2 h\nu^2 t_{自发}} g(\nu) \tag{5.6-19}$$

上式意味着在粒子数反转分布时，$N_2 > N_1$，光强呈指数式递增，而当$N_2 < N_1$时光强快速衰减。第一种情形相应于激光类型的放大作用，第二种情形为处于热平衡的原子体系。这两种情况如图 5.5 所示。在热平衡时，有

$$\frac{N_2}{N_1} = \mathrm{e}^{-h\nu/kT} \tag{5.6-20}$$

所以在热平衡下的系统总是发生吸收过程。将温度 T 取负值，反转条件$N_2 > N_1$也可用

式（5.6-20）表示。事实上，$N_2 > N_1$ 条件常被认为是“负温度”的一种情况。在式（5.6-20）中“温度”是电子数比值的指标。原子跃迁引起的电磁辐射，其吸收或放大不仅可以由指数式增益常数 $\gamma(\nu)$ 表述，还可用传播介质电极化率的虚部 $\chi''(\nu)$ 来描写。由式（1.3-24）可得，吸收功率密度为

$$\overline{\frac{功率}{体积}} = \frac{\omega\varepsilon_0\chi''(\nu)}{2}|E|^2 \tag{5.6-21}$$

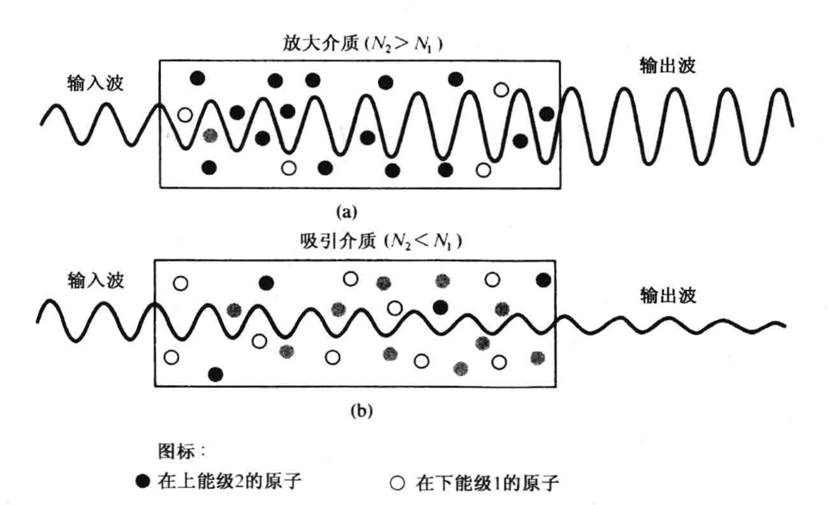


图 5.5　传播中的电磁波在反转分布（$N_2 > N_1$）时的放大情形，以及在吸收介质（$N_2 < N_1$）中的衰减情形

式中，$\chi''(\nu)$ 是电极化率的虚部。此结果与利用受激跃迁概率 $W_i(\nu)$ 的概念推导的结果一致。后者为

$$\overline{\frac{功率}{体积}} = (N_1 - N_2)W_i(\nu)h\nu \tag{5.6-22}$$

利用式（5.6-21）与式（5.6-22）相等，用式（5.6-15）表示 $W_i(\nu)$ 并引用关系式 $I_0 = (c/n)\varepsilon\ |E|^2/2$ [见式（1.4-21）]可得

$$\chi''(\nu) = \frac{(N_1 - N_2)\lambda^3}{16\pi^2 n t_{自发}} g(\nu) \tag{5.6-23}$$

式中，$n^2 \equiv \varepsilon/\varepsilon_0$，$\lambda$ 为真空中的波长。在洛伦兹线形函数 $g(\nu)$ 的情况下，最后一个结论式可改写为

$$\chi''(\nu) = \frac{(N_1 - N_2)\lambda^3}{8\pi^3 n t_{自发}\Delta\nu} \frac{1}{1 + [4(\nu - \nu_0)^2]/(\Delta\nu)^2} \tag{5.6-24}$$

这是关键结论，将在很多讨论中被引用。

例：在红宝石激光器中的指数式增益常数。

估算红宝石晶体（Al_2O_3 中掺有 Cr^{3+} 离子）在谱线中心的指数式增益常数。晶体的特性如下

$$N_2 - N_1 = 5\times10^{17}/\text{cm}^3$$

$$\Delta\nu \cong \frac{1}{g(\nu_0)} = 2\times10^{11}\,\text{Hz}\ \ (300\text{K})$$

$$t_{自发} = 3\times10^{-3}\,\text{s}$$

$$\nu = 4.326\times10^{14}\,\text{Hz}$$

$$\frac{c}{\nu}(在红宝石中) \cong 1.69\times10^{10}\,\text{cm/s}$$

将这些值代入式（5.6-19）可得

$$\gamma(\nu) = 5\times10^{-2}\,\text{cm}^{-1}$$

所以在跃迁中心频率处的波通过单位厘米具有上述特性的红宝石柱，其强度将被放大5%。

比较式（5.6-19）和式（5.6-23），可得到增益系数和 χ'' 的关系式

$$\gamma(\nu) = -\frac{2\pi}{\lambda n}\chi'' = -\frac{k}{n^2}\chi'' \tag{5.6-25}$$

假如无源介质 $\chi''>0$，增益系数是负的。许多激光器介质由寄主介质构成，存在原子跃迁与激光辐射发光对应的有源的原子。例如，铬原子是红宝石激光器中的有源成分，而 Al_2O_3 是寄主介质。激光介质的复折射率可写为

$$n'^2 = n^2 + \chi' - i\chi'' \tag{5.6-26}$$

式中，n 是寄主介质的折射率，$\chi' - i\chi''$ 是有源原子的极化系数。这样的介质中的复传输波数可写为

$$k' = k_0 n' = nk_0\left(1 + \frac{\chi'}{n^2} - i\frac{\chi''}{n^2}\right)^{1/2} \cong nk_0\left(1 + \frac{\chi'}{2n^2} - i\frac{\chi''}{2n^2}\right) \tag{5.6-27}$$

式中，k_0 是光在真空中的波数。如果记 $k=n\,k_0$，则复波数可写为

$$k' = k\left(1 + \frac{\chi'}{2n^2} - i\frac{\chi''}{2n^2}\right) = k + k\frac{\chi'}{2n^2} - ik\frac{\chi''}{2n^2} \tag{5.6-28}$$

我们知道，具有复传输常数的平面波的强度将随传输距离呈指数式增加。利用式（5.6-28），可得到与式（5.6-25）一致的增益系数。

结合式（5.6-24）和式（5.6-25），可写出具有洛伦兹线性的有源介质的指数式增益系数如下

$$\gamma(\nu) = \frac{(N_2 - N_1)\lambda^2}{4\pi^2 n^2 t_{自发}\Delta\nu}\frac{1}{1 + [4(\nu - \nu_0)^2]/(\Delta\nu)^2} \tag{5.6-29}$$

$\Delta\nu$ 为增益带宽（FWHM）。按照式（5.6-29），在线型中心处的增益可表示为

$$\gamma_0 = \gamma(\nu_0) = \frac{(N_2 - N_1)\lambda^2}{4\pi^2 n^2 t_{自发}\Delta\nu} \tag{5.6-30}$$

式中，注意到峰值增益系数反比于增益谱的线宽。按照式（5.6-29）和式（5.6-30），可写出

$$\gamma(\nu) = \frac{\gamma_0}{1 + [4(\nu - \nu_0)^2]/(\Delta\nu)^2} \tag{5.6-31}$$

式中，$\gamma_0 = \gamma(\nu_0)$ 是线型中心处的增益。

5.7　均匀激光介质中的增益饱和

在上一节中我们曾推导了反转分布时指数式增益常数的表达式（5.6-19），表达式如下

$$\gamma(v)=(N_2-N_1)\frac{c^2}{8\pi n^2 v^2 t_{\text{自发}}}g(v) \tag{5.7-1}$$

其中N_2和N_1为受激跃迁中涉及的两个原子能级的电子浓度。在式（5.7-1）中并没有指出是什么原因导致反转分布N_2-N_1，这一物理量可以当成是该体系的一个参量。实际上反转分布是由所谓的“泵浦”造成的，它具有各种各样的形式，例如在结型激光器中的注入电流、在脉冲式红宝石激光器中的闪光灯光源、或是在等离子放电的气体激光器中的高能量电子。下面考虑激光介质内部某处有光波存在时的情形。泵浦建立粒子数反转分布，在没有光场存在时其值为ΔN^0。加入光场可产生 2→1 和 1→2 的跃迁。由于$N_2>N_1$且由 2→1 和由 1→2 的受激跃迁概率相等，所以从 2→1 受激跃迁的原子数目比相反方向的多。于是导致反转分布值ΔN^0净的减少。

电磁场的存在可造成反转分布的减少，进而导致增益常数的减小，这种现象被称为增益饱和。理解这种现象在量子电子学中有重大意义。下一章涉及的一个例子中，指出增益饱和导致激光振荡器中的增益减小到正好和损耗互相平衡的程度，形成稳定的振荡。在光网络中同炎的机制导致光放大器的增益的减少。

图 5.6 所示的是一个四能级激光系统的基态 0 和两个激光能级 2 和 1 的情形。单位时间中受泵浦而跃迁至能级 2 的原子浓度用R_2表示，跃迁至能级 1 的用R_1表示。由于泵浦到能级 1 会促使反转分布减弱，当然，我们不希望看到这种情况的出现。但是，许多情况下它是不能避免的。当没有辐射场存在时原子在能级 2 的真正衰减寿命是t_2。此衰减率部分贡献来自由 2→1 的自发跃迁发射光子对应的$t_{\text{自发}}^{-1}$，以及 由 2 到 1 的非辐射复合。原子在能级 1 的寿命是t_1，由频率为v的辐射场引起的从 2→1 和 1→2 的受激跃迁概率用$W_i(v)$表示，由式（5.2-15）可得

$$W_i(v)=\frac{\lambda^2 g(v)}{8\pi n^2 hv\, t_{\text{自发}}}I_v \tag{5.7-2}$$

式中，$g(v)$是归一化的跃迁谱线线型函数，I_0是光强（W/m²）。

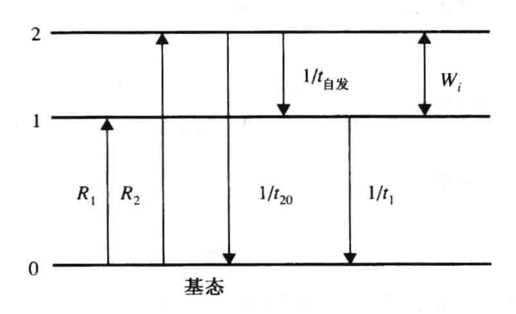


图 5.6　四能级激光系统的能级图和跃迁概率（图中并未画出第四个能级，它与泵浦造成的最初激发有关，由图可知泵浦的作用是使粒子进入能级 1 和能级 2）。能级 2 的总寿命是t_2，其中$1/t_2=1/t_{\text{自发}}+1/t_{20}$，其中$1/t_{20}$是进入基态的延迟概率

当频率为 ν 的辐射场和泵浦同时作用时，描写能级 2 和 1 的粒子数的方程式是

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = R_2 - \frac{N_2}{t_2} - (N_2 - N_1)W_i(\nu) \tag{5.7-3}$$

$$\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} = R_1 - \frac{N_1}{t_1} + \frac{N_2}{t_{自发}} + (N_2 - N_1)W_i(\nu) \tag{5.7-4}$$

N_2 和 N_1 分别为能级 2 和 1 的粒子浓度（m^{-3}），R_2 和 R_1 为进入这两个能级的泵浦率（$\mathrm{m}^{-3}\cdot\mathrm{s}^{-1}$）。$N_2/t_2$ 是由能级 2 向其他各能级衰变时能级 2 上的粒子浓度在单位时间内的变化，它包括粒子到能级 1 的自发跃迁，但不包括受激跃迁。受激跃迁概率为 $N_2W_i(\nu)$，所以受激跃迁引起的 N_2 的净变化如式（5.6-3）的最后一项所示。在稳态，粒子数是不随时间变化的常数，所以可以将上两式中的 d/dt 项取作零，求解 N_1，N_2 而得

$$N_2 - N_1 = \frac{R_2t_2 - (R_1 + \delta R_2)t_1}{1 + [t_2 + (1-\delta)t_1]W_i(\nu)} \tag{5.7-5}$$

式中，$\delta = t_2 / t_{自发}$（注意：$0<\delta<1$）。假设能级 1 和 2 的能量值足够高，以至于热学过程造成的粒子浓度变化可以忽略不计。按照式（5.7-5），如果没有光场存在，$W_i(\nu)=0$，则反转浓度由下式给出

$$\Delta N^0 = R_2t_2 - (R_1 + \delta R_2)t_1 \tag{5.7-6}$$

可利用式（5.7-6）将式（5.7-5）重新表示为

$$N_2 - N_1 = \frac{\Delta N^0}{1+\phi t_{自发}W_i(\nu)} \tag{5.7-7}$$

式中，参量 ϕ 的定义为

$$\phi = \delta[1+(1-\delta)\frac{t_1}{t_2}]$$

我们注意到 $0<\delta<1$ 时 ϕ 总是正的，在高效率的激光系统中 $t_2 \cong t_{自发}$，所以 $\delta \approx 1$，并且 $t_2 \ll t_1$，于是 $\phi \approx 1$，将 $W_i(\nu)$ 的表达式代入（5.7-2），上一个公式变为

$$N_2 - N_1 = \frac{\Delta N^0}{1 + [\phi\lambda^2 g(\nu)/8\pi n^2 h\nu]I_0} = \frac{\Delta N^0}{1 + I_0/I_s(\nu)} \tag{5.7-8}$$

式中，$I_s(\nu)$ 为饱和强度，由下式给出

$$I_s(\nu) = \frac{8\pi n^2 h\nu}{\phi\lambda^2 g(\nu)} = \frac{8\pi n^2 h\nu}{(t_2/t_{自发})\lambda^2 g(\nu)} = \frac{8\pi n^2 h\nu\Delta\nu}{(t_2/t_{自发})\lambda^2} \tag{5.7-9}$$

它相当于使反转浓度下降到非饱和值（ΔN^0）的一半时所需的光强（W/m^2）。在式（5.7-9）中最后一个等号用 $1/g(\nu)=\Delta\nu$ 代入而得到，这对于频率接近线形函数都有效。用式（5.7-8）代入增益常数表达式（5.7-1），则得到最后结果

$$\gamma(\nu) = \frac{1}{1+I_0/I_s(\nu)}\left(\frac{\Delta N^0\lambda^2}{8\pi n^2 t_{自发}}\right)g(\nu) = \frac{\gamma_0(\nu)}{1+I_0/I_s(\nu)} \tag{5.7-10}$$

式中，$\gamma_0(\nu)$ 是低强度（$I_0 << I_s$）的增益系数。式（5.7-10）表示了增益常数对光强的依赖关系。最后注意到式（5.7-10）适用于均匀增宽激光体系，因为在粒子数变化率方程（5.7-3）和式（5.67-4）中我们假定所有的原子都是等效的，因而具有相同的跃迁概率。在非均匀的激光体系中这一假设不再成立，这种情形将在下节中讨论。

5.8　非均匀激光介质中的增益饱和

5.7 节中探讨了均匀激光介质中光场引起的光学增益的下降即饱和现象。本节将讨论在非均匀体系中的增益饱和问题。

由 5.1 节可知，非均匀原子体系中的单个原子是可以区分的，每一个原子皆有其独特的跃迁频率（E_2–E_1）/ h，因此可将非均匀介质看成是由多种原子组成的，每一类均可由一连续变量ξ来描述。举例来说，变量ξ相当于在ξ类中的原子的线形函数 $g^{\xi}(v)$ 的中心频率。我们再进一步定义一个函数 $p(\xi)$，它的含义是一个原子的ξ参量位于ξ和$\xi+\mathrm{d}\xi$之间的概率为 $p(\xi)\mathrm{d}\xi$，满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 1 \tag{5.8-1}$$

因为任一原子的ξ值位于$-\infty$和$+\infty$之间的概率均为 1。在同一类ξ中的原子可以认为是均匀增宽的，具有归一化的线形函数 $g^{\xi}(v)$，满足归一化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^{\xi}(\nu)\,\mathrm{d}\nu = 1 \tag{5.8-2}$$

在 5.5 节曾定义跃迁线形函数 $g(v)$，并取 $g(v)\mathrm{d}v$ 代表产生的光子频率在 v 和 $v+\mathrm{d}v$ 之间的自发辐射的概率。利用此定义得到

$$g(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \left[\int_{-\infty}^{\infty} p(\xi) g^{\xi}(\nu)\,\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\nu \tag{5.8-3}$$

上式说明了这样一个事实：发射一个频率在 v 到 $v+\mathrm{d}v$ 之间的光子的概率，相当于先求出ξ类中的原子发射该种光子的概率 $g^{\xi}(v)\mathrm{d}v$，再对所有各种原子求和。

下面着重讨论单个ξ类原子对粒子数反转的贡献。描述粒子数密度变化的速率方程式 为

$$\frac{\mathrm{d}N_2^{\xi}}{\mathrm{d}t} = R_2 p(\xi) - \frac{N_2^{\xi}}{t_2} - (N_2^{\xi} - N_1^{\xi})W_i^{\xi}(\nu)$$

$$\frac{\mathrm{d}N_1^{\xi}}{\mathrm{d}_t} = R_1 p(\xi) - \frac{N_1^{\xi}}{t_1} + \frac{N_2^{\xi}}{t_{\text{自发}}} + (N_2^{\xi} - N_1^{\xi})W_i^{\xi}(v) \tag{5.8-4}$$

除了 N_2^{ξ} 和 N_1^{ξ} 分别代表在ξ类中的原子在较高和较低能级上的密度之外，其余均与式（5.7-3）和式（5.7-4）相似。进入能级 2 和 1 的泵浦速率（atoms / $\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{s}$）与在$\xi$类中找到原子的概率成正比，它们分别由 $R_2 p(\xi)$ 和 $R_1 p(\xi)$ 给出。如 5.7 节所述，进入能级 2 的总泵浦率为 R_2，可得

$$\int_{\infty}^{\infty} R_2 p(\xi)\mathrm{d}\xi = R_2\int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi)\mathrm{d}\xi = R_2$$

其中利用了式（5.8-1），根据式（5.6-15），受激跃迁概率 $W_i^{\xi}(v)$ 给定，则

$$W_i^{\xi}(v) = \frac{\lambda^2}{8\pi n^2 h v t_{\text{自发}}} g^{\xi}(v) I_0 \tag{5.8-5}$$

上式与式（5.7-2）式相同，只不过 $g^{\xi}(v)$ 代表原子在ξ类中的原子的线形函数。式（5.8-4）的稳态 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t=0$ 的解为

$$N_2^{\xi}-N_1^{\xi}=\frac{\Delta N^0 p(\xi)}{1+\phi t_{自发}W_i^{\xi}(\nu)} \tag{5.8-6}$$

式中，ΔN^0 和 ϕ 的含义与 5.7 节中的相同。ξ 类中单位体积内总原子的受激发射功率为

$$\begin{aligned}\frac{P^{\xi}(\nu)}{V}&=(N_2^{\xi}-N_1^{\xi})h\nu W_i^{\xi}(\nu)\\&=\frac{\Delta N^0 p(\xi)h\nu}{1/W_i^{\xi}(\nu)+\phi t_{自发}}\end{aligned} \tag{5.8-7}$$

这里假定所有 ξ 类的原子具有相同的自发辐射寿命。

将式（5.8-7）对所有的各类求和，可得单位体积内原子发射频率为 ν 的总功率的表达式

$$\frac{P(\nu)}{V}=\frac{\Delta N^0 h\nu}{t_{自发}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(\xi)\mathrm{d}\xi}{1/(W_i^{\xi}(\nu)t_{自发})+\phi} \tag{5.8-8}$$

利用式（5.8-5）可将上式改写为

$$\frac{P(\nu)}{V}=\frac{\Delta N^0 h\nu}{t_{自发}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(\xi)\mathrm{d}\xi}{8\pi n^2 h\nu/[\lambda^2 I_0 g^{\xi}(\nu)]+\phi} \tag{5.8-9}$$

受激发射的功率引起了行波光场强度随着距离 z 按 $I_0=I_0(0)\exp[\gamma(\nu)z]$ 的规律而增加，其中，增益系数为

$$\gamma(\nu)=\frac{\mathrm{d}I_0}{\mathrm{d}z}/I_0=\frac{P(\nu)}{V}/I_0=\frac{\Delta N^0\lambda^2}{8\pi n^2 t_{自发}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(\nu_{\xi})\mathrm{d}\nu_{\xi}}{[1/g^{\xi}(\nu)]+(\phi\lambda^2 I_0/8\pi n^2 h\nu)} \tag{5.8-10}$$

式中，$p_{\xi}\,\mathrm{d}\xi$ 由 $p(\nu_{\xi})\mathrm{d}\nu_{\xi}$ 代替。这里我们将 ν_{ξ} 看作 ξ 类原子的线性函数 $g^{\xi}(\nu)$ 的中心频率。

作为对式（5.8-10）的第一个验证，考虑 $I_0 << 8\pi n^2 h\nu/\phi\lambda^2 g^{\xi}(\nu)$ 的情形，即饱和效应忽略不计的情形。将式（5.8-3）代入式（5.8-10）可得

$$\gamma(\nu)=\frac{\Delta N^0\lambda^2}{8\pi n^2 t_{自发}}g(\nu)$$

此式与（5.6-19）相同。它表明，在没有达到饱和的情形下，均匀增宽和非均匀增宽的原子体系的增益表达式是相同的。

下面重点推导非均匀增宽的原子跃迁的饱和增益常数。假定在 ξ 类中原子是等同的（均匀增宽），则可用式（5.5-4）表示线形函数 $g^{\xi}(\nu)$，得

$$g^{\xi}(\nu)=\frac{\Delta\nu}{2\pi[(\nu-\nu_{\xi})^2+(\Delta\nu/2)^2]} \tag{5.8-11}$$

式中，$\Delta\nu$ 称为非均匀增宽谱线的均匀线宽。可以认为跃迁频率处于 $\Delta\nu$ 内的那些原子是不可区分的，这些原子常用“均匀波包”描述。将式（5.8-11）代入式（5.8-10），得

$$\gamma(\nu)=\frac{\Delta N^0\lambda^2\Delta\nu}{16\pi^2 n^2 t_{\times\hat{O}\cdot\acute{c}}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(\nu_{\xi})\mathrm{d}\nu_{\xi}}{(\nu-\nu_{\xi})^2+(\Delta\nu/2)^2+(\phi\lambda^2 I_0\Delta\nu/16\pi^2 n^2 h\nu)} \tag{5.8-12}$$

在谱线增宽极其不均匀的情形下，由定义可知 $p(\nu_{\xi})$ 的宽度比式（5.8-12）中被积函数的其他部分大很多，因此在被积函数为较大区域内可认为是一个常数。在这种情形下可以将 $p(\nu_{\xi})_{\nu_{\xi=\nu}}=p(\nu)$ 移出式（5.8-12）的积分号之外，从而得

$$\gamma(\nu)=\frac{\Delta N^0\lambda^2\Delta\nu}{16\pi^2 n^2 t_{自发}}p(\nu)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\nu_{\xi}}{(\nu-\nu_{\xi})^2+(\Delta\nu/2)^2+(\phi\lambda^2 I_0\Delta\nu/16\pi^2 n^2 h\nu)} \tag{5.7-13}$$

利用定积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{a}$$

来计算式（5.8-13），可得

$$\gamma(\nu)=\frac{\Delta N^0\lambda^2 p(\nu)}{8\pi n^2 t_{自发}}\frac{1}{\sqrt{1+(\phi\lambda^2 I_\nu/4\pi n^2 h\nu\Delta\nu)}} \tag{5.8-14}$$

$$=\gamma_0(\nu)\frac{1}{\sqrt{1+I_0/I_s}} \tag{5.8-15}$$

其中

$$I_s=4\pi^2 n^2 h\nu\Delta\nu/\phi\lambda^2 \tag{5.8-16}$$

为饱和光强度。在公式（5.8-16）中，参量ϕ已由 5.7 节定义，$\Delta\nu$ 是线形函数 $g^{\xi}(\nu)$ 的线宽。比较式（5.8-15）和（5.8-10）可知，由于平方根项的关系，随着强度 I_0 的增加饱和（也即是增益的下降）比均匀情况更缓慢地变化。

习题

5.1　利用式（5.4-8）和式（5.4-9）证明：

（a）吸收系数为

$$\alpha(\omega)=\alpha_0\frac{(\gamma/2)^2}{(\omega-\omega_0)^2+(\gamma/2)^2}，其中\ \alpha_0=\frac{Ne^2}{mc\varepsilon_0\gamma}$$

（b）$I=\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(\omega)\mathrm{d}\omega=\pi\alpha_0\gamma/4$

（c）积分吸收与γ无关（仅当$\gamma\to 0$）。

5.2　考虑两能级原子气体，吸收中处于$\nu_0=2.0\times10^{15}\,\mathrm{Hz}$，且具有洛伦兹线形。在$\nu=2.0\times10^{14}\,\mathrm{Hz}$处原子气体的折射率为 1.0003（实部）。假设洛仑兹线宽为$\Delta\nu=1\mathrm{GHz}$。

（a）以m^{-1}为单位，计算线形中心处和$\nu=2.0\times10^{14}\,\mathrm{Hz}$处的吸收系数。

（b）计算线形中心处和偏离线形中心 1GHz 处的折射率（实部）。

5.3　证明：若$\chi(\nu)$的极点位于上半面，阶跃型激发场$e(t)$将导致$p(t)$关于t以指数形式变化。提示：用傅里叶积分关系

$$p(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{p}(\nu)\exp(i2\pi\nu t)\mathrm{d}\nu$$

$$\tilde{p}(\nu)=\varepsilon_0 x(\nu)\tilde{e}(\nu)$$

5.4　证明：在习题 5.3 中对函数$p(t)$存在实函数

$$\chi(-\nu)=\chi^*(\nu) \tag{1}$$

或等价地

$$\begin{aligned}\chi'(\nu)&=\chi'(-\nu)\\ \chi''(\nu)&=-\chi'''(-\nu)\end{aligned} \tag{2}$$

5.5

（a）证明：按照式（5.3-7），χ的极点位于

$$\omega = i\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$$

注意这些极点都位于复平面的上半面。

（b）证明：下面的积分当$\tau < 0$时为零：

$$F(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\varepsilon(\omega) - \varepsilon_0]e^{i\omega\tau}d\omega$$

按照附录 C 中的式（C-9），电位移场可表示为

$$D(t) = \varepsilon_0 E(t) + \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)E(t-\tau)d\tau$$

$$= \varepsilon_0 E(t) + \int_{0}^{\infty} F(\tau)E(t-\tau)d\tau$$

时刻t电位移场$D(t)$与时刻t前所有时间的电场值有关。

5.6　证明洛仑兹线形中心频率ν_0，峰值增益为

$$\gamma(\nu_0) = (N_2 - N_1)\frac{c^2}{8\pi n^2\nu^2 t_{自发}}\frac{2}{\pi\Delta\nu}$$

式中，$\Delta\nu$是线形函数的半高宽。

5.7

（a）证明：当不存在驱动场，经典电子模型的解为

$$X(t) = A\exp(-\gamma t/2)\cos(\omega' t + \alpha)$$

式中，A和α是常数，ω'可表示为

$$\omega'^2 = \omega_0^2 - (\gamma/2)^2$$

（b）给定阻尼振荡偶极子$X(t) = A\exp(-\gamma t/2)\cos(\omega_0 t)$，证明：

傅里叶变换可近似表示为

$$f(\omega) = \frac{A}{4\pi}\frac{i}{(\omega_0 - \omega) + i\gamma/2}$$

5.8　考虑两个原子（或分子）以弹性碰撞作用而相互接近。量子态，严格地说，取决于这两个原子间的距离和排列方向，是时间的函数。

（a）假如原子在频率为$\omega = (E_2 - E_1)/\hbar$的光子作用下辐射，证明：碰撞净的效果是增加了辐射场的相位

$$\phi = \int \frac{[\Delta E_2(t) - \Delta E_1(t)]}{\hbar}dt$$

如果$\phi \gg 1$，一次碰撞足以将辐射场的振荡移相。碰撞中将ϕ视为随机数。

（b）利用（a）中的模型和辐射场的傅里叶谱，证明：线宽的展宽正比于$1/\tau_{co}$。

参考文献

1. See, for example, A. Yariv, *Quantum Electronics*, 3rd ed. Wiley, New York, 1989.
2. Yeh, P., *Optical Waves in Layered Media*. Wiley, New York, 1988.
3. See, for example, R. Kubo, *Statistical Mechanics*. North Holland, Amsterdam, 1964, p. 31.

4. Johnson, L. F., Optically pumped pulsed crystal lasers other than ruby. In *Lasers*, Vol. I, A. K. Levine (ed.). Marcel Dekker, New York, 1966, p. 137.
5. Kittel, C., *Elementary Statistical Physics*. Wiley, New York, 1958, p. 197.
6. Einstein, A., Zur Quantentheorie der Strahlung, *Phys. Z.* **18**:121 (1917).

第 6 章　激光振荡理论和特殊激光系统

6.0　引言

在第 5 章中已讨论，如果电磁波的频率位于跃迁线形（或增益）曲线之内，那么粒子数反转（$N_2 > N_1$）的原子介质（如一个两能级系统）就能将其放大。本章考虑反转原子介质（或称激光介质）处于光学共振腔内的情形。当电磁波在两个反射镜之间来回反射时，它会穿过激光介质并且被放大，如果放大超过了由于镜面的透射（或吸收）损耗和由于激光介质的散射所造成的损耗，那么存储在共振腔内的场能在适当的条件下将随时间增加。场能的增加会导致增益介质的增益系数因增益饱和（将在下一章讨论）而下降。共振腔内的场能直到单程的饱和增益正好等于损耗为止。这时单程的净增益等于 1，辐射强度不可能再进一步增加，即达到了稳态振荡。本章将从法布里–珀罗标准具理论开始，导出维持激光振荡所必须的起振反转分布条件。还将获得激光振荡器的振荡频率表达式，并说明它如何受到原子介质色散的影响。接着考虑最佳输出耦合的问题。多模激光振荡和锁模将在本章后面提到。最后介绍一些激光系统，包括红宝石激光器，Nd:YAG 激光器和 Er:氧化硅激光器。激光器中重要的一类，半导体激光器，将在第 15、16 章阐述。

6.1　法布里－珀罗激光器

参照图 6.1，考虑具有两个镜面的激光振荡器，本质上就是一个的法布里–珀罗标准具。设定反射镜之间填满了粒子反转分布的放大介质。由于放大介质的存在，复折射率 n' 可写为

$$n'^2 = n^2 + \chi' - \mathrm{i}\chi'' \tag{6.1-1}$$

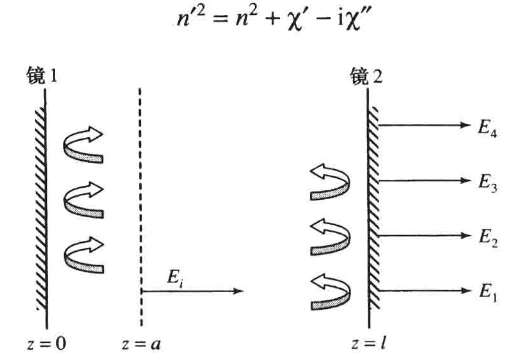


图 6.1　在法布里–珀罗腔内，多次反射和对应的部分透射光束示意图。E_1 是第一次透射光束，E_2 是在腔内经过一次往返后的透射光束，E_3 在腔内经过两次往返后的透射光束，以此类推

式中，n 是寄主介质的折射率，$\chi' - \mathrm{i}\chi''$ 是由于放大材料（对增益有贡献的有源原子）的存在引起的复数介质极化率。对于红宝石激光器，寄主材料 Al_2O_3 的折射率 $n = 1.77$，$\chi' - \mathrm{i}\chi''$ 是源于铬原子（实际上是 Cr^{3+} 离子）。在大多数激光系统中，$|\chi' - \mathrm{i}\chi''| \ll n^2$。在增益介质中的

平面波的复传输常数可写为

$$k'(\omega) = k_0 n' = k_0\sqrt{n^2 + \chi' - \mathrm{i}\chi''} - \mathrm{i}\frac{\alpha}{2} \cong k + k\frac{\chi'(\omega)}{2n^2} - \mathrm{i}k\frac{\chi''(\omega)}{2n^2} - \mathrm{i}\frac{\alpha}{2} \quad (6.1\text{-}2)$$

式中，$k_0 = \omega / c$，$k = n\omega / c$，α 是线性衰减系数，包含了各种不同的损耗机制，如缺陷的散射、受激原子态的吸收及其他因素。由所有这些机制引起的衰减皆由上述衰减系数 α 代表。可将 $k - i\alpha / 2$ 视为频率远离激光跃迁时的介质内的传输常数。既然 α 涵盖了截肢的分布式无源损耗，单位距离的强度所损耗因子就是 $\exp(-\alpha l)$，其中 l 是腔长。

再参照图 6.1，现在考虑在腔内具有均匀谱分布的白噪声。该噪声源于黑体辐射或自发辐射。令 E_i 是频率为 ω 沿腔的正向轴传播的平面波分量（基于噪声）的振幅。

电磁波 E_i 在共振腔内多次反射，如图 6.1 所示。验算在 $z = l$ 的反射镜 2 处部分透射的波的振幅。按照第 4 章中相同的过程得出镜 2 处的透射波。透射波可写为所有部分透射波的和

$$E_{\text{输出}} = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + \cdots \quad (6.1\text{-}3)$$

其中

$$\begin{aligned} E_1 &= t_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'(l-a)} E_i \\ E_2 &= (r_1 r_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2k'l}) t_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'(l-a)} E_i \\ E_3 &= (r_1 r_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2k'l})^2 t_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'(l-a)} E_i \\ E_4 &= (r_1 r_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2k'l})^3 t_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'(l-a)} E_i \end{aligned} \quad (6.1\text{-}4)$$

式中，a 是共振腔内噪声源的位置，t_2 是第二个反射镜（$z = l$）处振幅透射系数，r_1 和 r_2 分别是两个反射镜的振幅反射系数（从腔内观察）。注意到作为在共振腔内多次反射的结果，透射波的累加形成几何级数。应用式（6.1-3）和式（6.1-4），可得

$$\begin{aligned} E_{\text{输出}} &= t_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'(l-a)} E_i \{1 + (r_1 r_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2k'l})^1 + (r_1 r_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2k'l})^2 + (r_1 r_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2k'l})^3 + \cdots\} \\ &= \frac{t_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'(l-a)}}{1 - r_1 r_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2k'l}} E_i \end{aligned} \quad (6.1\text{-}5)$$

式中，k' 是由式（6.1-1）给出的复传输常数，l 是标准具的长度。既然 χ'' 与增益系数有关，可将复传输常数改写为

$$k' = k + \Delta k + \mathrm{i}(\gamma - \alpha)/2 \quad (6.1\text{-}6)$$

其中

$$\Delta k = k\frac{\chi'(\omega)}{2n^2} \quad (6.1\text{-}7)$$

$$\gamma = -k\frac{\chi''(\omega)}{n^2} = (N_2 - N_1)\frac{\lambda^2}{8\pi n^2 t_{\text{自发}}} g(\nu) \quad (6.1\text{-}8)$$

Δk 是与有源原子（如红宝石激光器中的铬原子）对应的传输常数。γ 是与有源原子对应的增益。输出波可写为

$$E_{\text{输出}} = \frac{t_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}[(k+\Delta k)(l-a)]} \mathrm{e}^{(\gamma-\alpha)(l-a)/2}}{1 - r_1 r_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2(k+\Delta k)l} \mathrm{e}^{(\gamma-\alpha)l}} E_i \quad (6.1\text{-}9)$$

假如噪声源位于共振腔外（$z < 0$），E_i 可看做一束从位于 $z = 0$ 的反射镜（图 6.1 中的反

射镜 1）处的入射波。在此情形下，输出波可写为

$$E_{输出}=\frac{t_1t_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k+\Delta k)l}\mathrm{e}^{(\gamma-\alpha)l/2}}{1-r_1r_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2(k+\Delta k)l}\mathrm{e}^{(\gamma-\alpha)l}}(E_i)_{腔外} \tag{6.1-10}$$

式中，t_1 是反射镜 1 处的振幅反射系数，$(E_i)_{腔外}$ 是到达反射镜 1 的入射波的振幅。注意到上面两个公式中的分母是相同的。如果原子跃迁实现反转（$N_2>N_1$），则 $\gamma>0$，式（6.1-9）、式（6.1-10）的分母会变得很小。输出波 $E_{输出}$ 会变得比入射波 E_i 大。此时法布里–珀罗标准具（含有激光介质）具有放大器的功能，其功率增益为 $\left|E_{输出}/E_i\right|^2$。

如果式（6.1-9）、式（6.1-10）中的分母变成零，也就是当

$$r_1r_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2(k+\Delta k)l}\mathrm{e}^{(\gamma-\alpha)l}=1 \tag{6.1-11}$$

成立时，$E_{输出}/E_i$ 比值趋于无穷大，这相当于输入波无限小（$E_i\cong 0$）时仍有有限的输出波 $E_{输出}$ 存在，这就是振荡。从物理上来看，条件式（6.1-11）描述的情形是，一个波在共振腔内经过一次完整的往返回到起始平面时振幅不变，除了增加 2π整数倍以外其相位也不变。将振荡条件式（6.1-11）中对振幅和相位的条件分开可得

$$r_1r_2\mathrm{e}^{[\gamma(\omega)-\alpha]l}=1 \tag{6.1-12}$$

以及相位条件公式

$$2[k+\Delta k(\omega)]l=2m\pi,\quad m=1,2,3,\cdots \tag{6.1-13}$$

这里不是一般性，假设实数形式的反射系数 r_1 和 r_2。振幅条件式（6.1-12）可以写成

$$\gamma_t(\omega)=\alpha-\frac{1}{l}\ln r_1r_2 \tag{6.1-14}$$

式中，$\gamma_t(\omega)$ 被称为阈值增益系数。按照式（6.1-8）阈值增益条件可表示为阈值反转粒子数

$$N_t\equiv(N_2-N_1)_t=\frac{8\pi n^2 t_{自发}}{g(\nu)\lambda^2}\left(\alpha-\frac{1}{l}\ln r_1r_2\right) \tag{6.1-15}$$

这就是在阈值条件下粒子数反转的公式。此式最初由肖洛和汤尼斯在他们证明激光器可行性的经典文献中推导出来（见参考文献[1]）。反转粒子数的阈值通常以光子腔内寿命的形式表示，光子腔内寿命随后定义。考虑镜面损耗和分布损耗都很小，则 $r_1^2\approx 1, r_2^2\approx 1$ 以及 $\exp(-\alpha l)\approx 1$，具有单位强度的波经历一个来回路程后的强度为 $R_1R_2\exp(-2\alpha l)$，其中 $R_1\equiv r_1^2$ 和 $R_2\equiv r_2^2$ 为镜面的反射率，往返一次强度损耗百分数则为 $1-R_1R_2\exp(-2\alpha l)$。由于此损耗发生在时间间隔 $2ln/c$ 之内，与之相应的指数衰减时间常数 t_c（见习题 6.15）为

$$\frac{1}{t_c}=\frac{(1-R_1R_2\mathrm{e}^{-2\alpha l})c}{2\ln} \tag{6.1-16}$$

这就称为光子腔内寿命。

在此定义下，存储在无源共振腔内的能量 U 按下式衰减: $\mathrm{d}U/\mathrm{d}t=-U/t_c$。因为共振时 $R_1R_2\mathrm{e}^{-2\alpha l}\cdot\mathrm{e}^{2\gamma_t l}\approx 1$，光子腔内寿命又可写为

$$\frac{1}{t_c}=\frac{(1-\mathrm{e}^{-2\gamma_t l})c}{2nl}=\frac{c}{n}\gamma_t=\frac{c}{n}\left(\alpha-\frac{1}{l}\ln r_1r_2\right) \tag{6.1-17}$$

式中，假设小阈值增益，所以$e^{2\gamma_t l} \approx 1-2\gamma_t l$。应用光子腔内寿命的表达式，阈值条件式（6.1-14）变为

$$N_t \equiv (N_2 - N_1)_t = \frac{8\pi n^3 \nu^2 t_{自发}}{c^3 t_c g(\nu)} \tag{6.1-18}$$

式中，$N \equiv N_2 - N_1$，脚标 t 代表阈值。

例：粒子数反转。

为了得到临界粒子数反转(N_2-N_1)的数量级估计，采用典型的 6328 Å 的 He-Ne 激光器（见 7.5 节讨论）的数据，一些参数值如下：

$$\lambda = 6.328\times10^{-5}\,\text{cm}$$

$$t_{自发} = 10^{-7}\,\text{s}$$

$$l = 12\,\text{cm}$$

$$1/g(\nu_0) \approx \Delta\nu \approx 10^9\,\text{Hz}$$

最后的数据为激光跃迁的多普勒宽度。

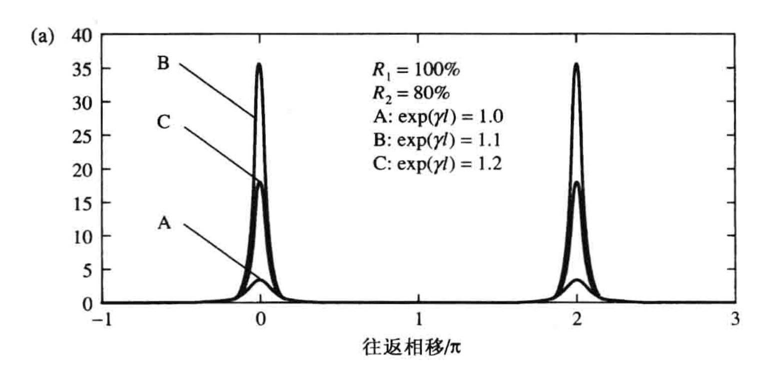
共振腔衰减时间 t_c 由式（6.1-17）计算而得，并假设 $\alpha = 0$，$R_1 = R_2 = 0.98$。因为 $R_1 = R_2 \approx 1$，可利用近似关系 $\ln r_1 r_2 = \ln R \approx R - 1$ 得出

$$t_c \approx \frac{nl}{c(1-R)} = 2\times10^{-8}\,\text{s}$$

再将上述数据代入式（6.1-18）得

$$N_t \approx 10^9\,\text{cm}^{-3}$$

图 6.2 表示了在给定噪声源情形下输出强度与往返相移间的函数关系图。在图 6.2（a）中，假定增益是均匀的，每条曲线对应于不同的分布增益常数γ值。注意到当$\exp[(\gamma-\alpha)/l]>1$，即单程净增益大于 1 时，输出大于输入，这时标准具可当做放大器。图 6.2（b）表示了假设洛仑兹增益谱时的输出强度。注意到不同模式的输出强度是不同的。这是由于每个模式的增益的不同。作为增益谱的结果，只有一个模式满足振荡条件式（6.1-11）。当发生振荡时，增益大于损耗，稳态的场能量在共振腔内建立起来。因此，对于均匀加宽的增益介质，只有一个模式可以形成激射振荡。



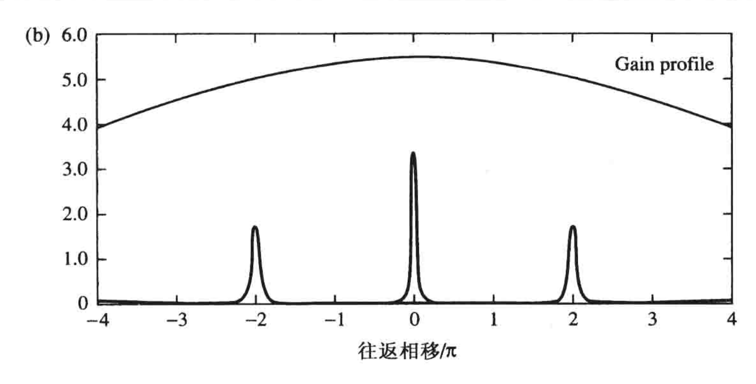


图 6.2　法布里−珀罗共振腔内输出强度与往返相移 $\theta = 2(kl - m\pi)$ 函数关系图。(a)增益是均匀的(b)洛伦兹增益，中心位于法布里−珀罗标准具的共振频率处

特别感兴趣地注意到，当接近振荡条件 $\exp(2\gamma l)R_1R_2 = 1$ 时，输出谱的峰很窄。在激射振荡时，峰值透射趋于无穷而透射峰谱宽趋于零。所以理想的激光器的谱宽是零。实际中，激光器输出的准确的频率取决于腔长 l，而腔长会受外在影响（如热、声）而变化。这就导致了振荡频率随时间有所变化。进一步，自发辐射也会导致激光输出的谱分布的展宽。这个问题将在 10.6 节中进一步探讨。

6.2　振荡频率

无穷多个频率可以满足式(6.1-13)给出的起振条件中的相位条件，这些频率对应于不同的整数值 m。除此之外,如果增益条件式（6.1-12）在一个或多个上述频率下得到满足，激光器就以这一频率振荡。为了求解振荡频率，将式（6.1-13）重新写成

$$kl\left(1 + \frac{\chi'(\nu)}{2n^2}\right) = m\pi \tag{6.2-1}$$

引进一个物理量

$$\nu_m = \frac{mc}{2nl} \tag{6.2-2}$$

它表示无源共振腔$[N_2 - N_1 = 0]$的第 m 个共振频率。利用公式（5.4-10a）和式（5.4-10b），可得

$$\chi'(\nu) = \frac{2(\nu_0 - \nu)}{\Delta\nu}\chi''(\nu) \tag{6.2-3}$$

式中，$\Delta\nu$ 是增益谱的半高宽 FWHM，则

$$\gamma(\nu) = -\frac{k\chi''(\nu)}{n^2} \tag{6.2-4}$$

由式（6.2-1）可得振荡频率为

$$\nu\left[1 - \left(\frac{\nu_0 - \nu}{\Delta\nu}\right)\frac{\gamma(\nu)}{k}\right] = \nu_m \tag{6.2-5}$$

式中，ν_0 是原子线形函数的中心频率。假设调节激光器的长度使其某一共振频率 ν_m 与 ν_0 非常接近，可以认为振荡频率 ν 也与 ν_m 接近，这样就可利用下列事实：当 $\nu \approx \nu_0$ 时增益常数 $\gamma(\nu)$ 是 ν 的缓变函数，这从图 5.5 中的 $\chi''(\nu)$ 曲线可以看出，$\chi''(\nu)$ 与 $\gamma(\nu)$ 成正比。因此,可以分别

用 $\gamma(v_m)$ 和 $(v_0 - v_m)$ 来取代式（6.2-5）中的 $\gamma(v)$ 和 $(v_0 - v)$ 从而得到振荡频率 v 为

$$v = v_m - (v_m - v_0)\frac{\gamma(v_m)c}{2\pi n\,\Delta v} \tag{6.2-6}$$

从式（6.1-12）增益阈值条件出发，可以将式（6.2-6）写成略微不同但易于运用的形式。为简单起见，令 $r_1 = r_2 = \sqrt{R}$ 并假设 $R \sim 1, \alpha = 0$，可将式（6.1-14）写成

$$\gamma_t(v) \approx \frac{1-R}{l}$$

还利用关系式，按照式（4.2-4）得出

$$\Delta v_{1/2} \approx \frac{c(1-R)}{2\pi nl}$$

将无源共振腔谱线宽 $\Delta v_{1/2}$ 与 R 联系起来（ $R \sim 1$ ），于是式（6.2-6）可写成

$$\nu = \nu_m - (\nu_m - \nu_0)\frac{\Delta\nu_{1/2}}{\Delta\nu} \tag{6.2-7}$$

分析式（6.2-7）可知，如果无源腔共振频率 v_m 正好等于原子谱线的中心频率，即 $v_m = v_0$，则振荡在 $v = v_0$ 处发生。如果 $v_m \neq v_0$，振荡会在 v_m 附近发生，不过它会略微移向 v_0，这就是所谓“频率牵引”现象，如图 6.3 所示。

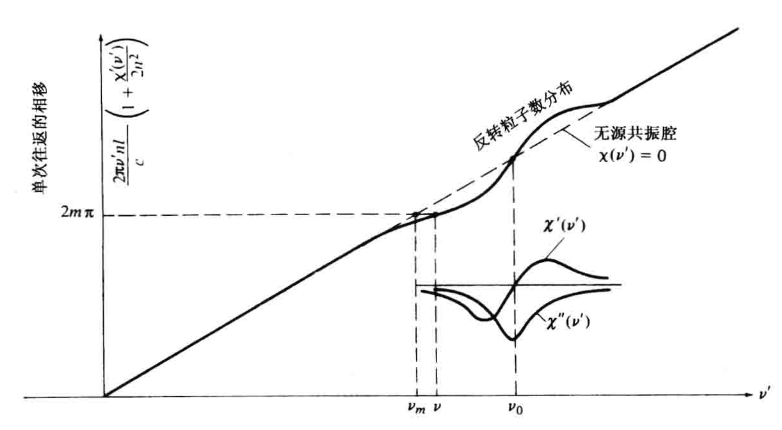


图 6.3　激光器频率条件[方程式（6.2-1）]的图解，示出原子色散 $\chi'(v)$ 如何将激光振荡频率 v 从无源共振腔之值 v_m 向原子共振值 v_0 方向“牵引”

频率牵引是接近谱线中心的区域的色散引起的。基于第 4 章的讨论，可将自由谱范围（FSR）写为

$$(\Delta\nu)_{\mathrm{FSR}} = \frac{c}{2n_g l} \tag{6.2-8}$$

式中，n_g 是群折射率，表示为

$$n_g = n_a + \omega\frac{\mathrm{d}n_a}{\mathrm{d}\omega} = n_a + v\frac{\mathrm{d}n_a}{\mathrm{d}v} \tag{6.2-9}$$

式中，n_a 是包括有源介质的折射率

$$n_a = n + \frac{1}{2}\chi' \tag{6.2-10}$$

在接近反转系统的谱线中的区域，$\nu\left(\mathrm{d}n_a/\mathrm{d}\nu\right)$是正数，这就对应接近谱线中心的斜率的增加，如图 6.3 所示。而正的斜率对应群折射率大于材料折射率，因此自由谱范围在接近激光振荡发生的谱线中心的区域内预期会减小。这种减小的自由谱范围与振荡频率向谱线中心的牵引效应一致。

6.3　三能级和四能级激光器

激光器通常被分成“三能级”和“四能级”激光器两类，一个四能级激光器的理想模型如图 6.4 所示。这种激光器的特点是其激光下能级与基态之间的能量间隔 E_1 甚大，以至于激光器在工作温度 T 时 $E_1 \gg kT$ 。这一点保证了在能级 1 上的热平衡粒子数可被忽略。此外，如果能级 1 上的原子寿命 t_1 比 t_2 短，那么和 N_2 相比， N_1 可以忽略，并且当

$$N_2 \simeq N_t \tag{6.3-1}$$

时，阈值条件式（6.1-11）得以满足。因此在泵浦的作用下，当较高能级的粒子数密度等于阈值 N_t 时激光器的振荡就会开始。

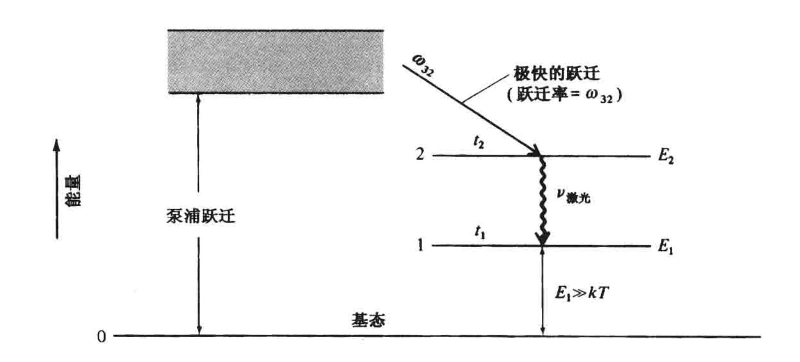


图 6.4　一个理想的四能级激光器的能级图

三能级激光器的特点在于，这种激光器的较低能级要么是基态，要么与基态的能量间距 E_1 与 kT 相比甚小，以致于热平衡时，总粒子密度中大部分占据在这个较低能级上。一个理想的三能级激光器系统如图 6.5 所示。

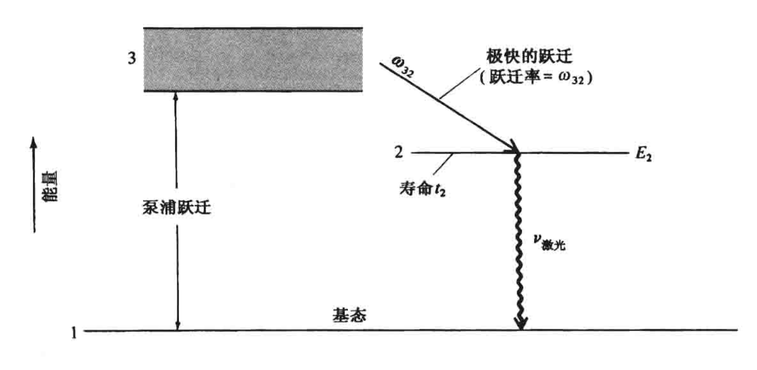


图 6.5　一个理想的三能级激光器的能级图

当泵浦强烈到使较高能级的粒子密度 $N_2 = N_1 = N_0/2$ ，光学增益 γ 为零，因为 $\gamma \propto N_2 - N_1 = 0$ 。为了满足振荡条件，泵浦率必须进一步增高，直到

$$N_2 = \frac{N_0}{2} + \frac{N_t}{2},$$

和

$$N_1 = \frac{N_0}{2} - \frac{N_t}{2} \tag{6.3-2}$$

从而 $N_2 - N_1 = N_t$ 。因为在大部分激光系统中 $N_0 >> N_t$，所以比较式（6.3-1）与式（6.3-2）可以发现，如果所有其他条件都相同的话，三能级激光器的阈值泵浦率必须超过四能级激光器的，它们的比值是

$$\frac{(N_2)_{\text{能级}}}{(N_2)_{\text{能级}}} \sim \frac{N_0}{2N_t}$$

在下一章的数值例中发现，对于红宝石激光器来说上述因子约为 100。

在三能级激光器的较高能级上必须维持 $N_0/2$ 原子数，相应于所必需消耗的最低功率值

$$(P_s)_{3\text{能级}} = \frac{N_0 h\nu V}{2t_2} \tag{6.3-3}$$

对于四能级激光器来说该值是

$$(P_s)_{4\text{能级}} = \frac{N_t h\nu V}{t_2} \tag{6.3-4}$$

式中，V 是体积。上述最后两式是将较高能级在阈值时的衰减率（atoms/s），$N_0 V/2t_2$ 以及 $N_t V/t_2$ ，与每次跃迁的能量 $h\nu$ 相乘而得。如果较高能级上每一个原子的衰减速率 $t_2^{-1}(\mathrm{s}^{-1})$ 仅由自发发射造成，可用 $t_{\text{自发}}$ 来代替 t_2 ,那么 P_s 就等于在阈值条件下（模）体积 V 内的原子由荧光而发射的功率，把它称为“临界荧光”功率。对于四能级激光器，由式（6.1-18）的 N_t 表达式可得

$$(P_s)_{4\text{能级}} = \frac{N_t h\nu V}{t_2} = \frac{8\pi n^3 h\Delta\nu V}{\lambda^3 t_c}\frac{t_{\text{自发}}}{t_2} \tag{6.3-5}$$

式中，$\Delta\nu \cong 1/g(\nu_0)$ 是激光跃迁线宽。

例：钕（Nd^{3+}）玻璃激光器的临界荧光功率。

用下列数据计算 Nd^{3+}玻璃激光器的临界荧光功率：

$$l = 10\text{cm},$$
$$V = 10\text{cm}^3$$
$$\lambda = 1.06\times10^{-6}\text{m}$$
$$R = (\text{镜面反射率}) = 0.95$$
$$n \simeq 1.5$$
$$t_c \simeq \frac{nl}{(1-R)c} = 10^{-8}\text{s}$$
$$\Delta\nu = 3\times10^{12}\text{Hz}$$

Nd^{3+}：玻璃激光器是一个四能级系统（参见图 6.49），因为能级 1 比基态约高 2 000cm^{-1}，

所以在室温下 $E_1 \approx 10kT$ ，于是利用式（6.3-5）得 $N_t \approx 8.5\times10^{15}\text{cm}^{-3}$ ，并且

$$P_s \simeq 150\text{W}$$

6.4 激光振荡器的功率

在 6.1 节中推导了一个阈值反转粒子数 N_t 的表达式，它相当于激光增益与损耗相等的情形。可以预期，如果泵浦强度超过 $N_2 - N_1 = N_t$ ，激光器将会发生振荡并且发射出功率。在本节中将求出激光器功率输出与泵浦强度的关系式，并处理最佳耦合问题，亦即导致最大功率输出的镜面透射率问题。

速率方程组

考虑一个如图 6.4 所示的理想四能级激光器，并令 $E_1 \gg kT$ 以致较低能级 1 上的热平衡粒子密度可以忽略不计。假设临界反转密度 N_t 与基态密度相比要小很多，所以在振荡过程中后者不受影响，可以用 R_1 和 R_2 来表征泵浦强度，它们分别代表每秒钟泵浦进入能级 2 和 1 的原子密度。过程 R_1 使低能级 1 的粒子数增加，导致增益下降，所以对激光器的运转是不利的。而在许多激光系统中，例如放电气体激光器，相当可观的泵浦进入低能级是不可避免的，所以对此类系统做切合实际的分析时必须考虑到 R_1 的影响。

描述能级 1 和 2 的粒子数变化率的方程为

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = -N_2\omega_{21} - W_i(N_2 - N_1) + R_2 \tag{6.4-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} = -N_1\omega_{10} + N_2\omega_{21} + W_i(N_2 - N_1) + R_1 \tag{6.4-2}$$

ω_{ij} 是单个原子从能级 i 到 j 的衰减速率，所以每秒由 i 到 j 衰变的原子密度是 $N_i\omega_{ij}$ 。如果衰减率完全是由自发跃迁造成的，那么 ω_{ij} 就等于 5.6 节中引进的爱因斯坦系数 A_{ij} 。 W_i 是单位时间内在能级 2 上的原子发生受激跃迁而到达能级 1 的概率（反之亦然）。而由式（5.6-15）给出的 W_i 与共振腔内部的辐射场的能量密度成正比。

上述的变化率方程只适合于均匀增宽系统，在非均匀增宽原子跃迁的情形下，具有不同跃迁频率 $(E_2 - E_1)/h$ 的原子会有不同的受激跃迁速率，所以一个单独的参量 W_i 不足以代表它们。

在定态情形下有 $\dot{N}_1 = \dot{N}_2 = 0$，此时可以由式（6.4-1）和式（6.4-2）求解 N_1 和 N_2 ，得

$$N_2 - N_1 = \frac{R_2[1 - (\omega_{21}/\omega_{10})(1 + R_1/R_2)]}{W_i + \omega_{21}} \tag{6.4-3}$$

在此模型中粒子数反转的一个必要条件是 $\omega_{21} < \omega_{10}$ ，相当于要求较高激光能级的寿命 ω_{21}^{-1} 大于较低能级的。根据式（6.4-3），泵浦的有效性被有限泵浦率 R_1 和能级 1 的寿命 ω_{10}^{-1} 降低到下列有效值

$$R = R_2\left[1 - \frac{\omega_{21}}{\omega_{10}}\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)\right] \tag{6.4-4}$$

所以式（6.4-3）可以改写成

$$N_2 - N_1 = \frac{R}{W_i + \omega_{21}} \tag{6.4-5}$$

在振荡阈值以下，受激跃迁概率W_i等于零（因为振荡能量密度是零），并且根据式（6.4-5），N_2-N_1与泵浦率R成正比。这种情形持续到$R = N_t\omega_{21}$，这时N_2-N_1达到阈值[见式（6.1-18）]

$$N_t = \frac{8\pi n^3 v^2 t_{自发}}{c^3 t_c g(v_0)} = \frac{8\pi n^3 v^2 t_{自发}\Delta v}{c^3 t_c} \tag{6.4-6}$$

由于粒子数反转，此时在v_0处的增益大到刚好足以弥补共振腔损耗（这是用于推导N_t的判据）。在定态条件下，N_2-N_1随泵浦进一步增加是不可能的，因为它会使受激（能量）发射率超过损耗，导致储存在共振腔中的场能量随时间而增加，这违背了定态条件假设。

上述讨论表明，在定态条件下不管泵浦率超过阈值多少，N_2-N_1都必须保持等于N_t。由式（6.4-5）可知，这是可能的。一旦R超过阈值$\omega_{21}N_t$，只要让W_i增加到满足式

$$N_t = \frac{R}{W_i + \omega_{21}} \tag{6.4-7}$$

即可。因为根据式（5.6-15），W_i与共振腔内的能量密度成正比，所以式（6.4-7）将使储存在共振腔中的电磁能与泵浦率R互相联系起来。为了推导这一关系，首先由式（6.4-7）求解W_i，得

$$W_i = \frac{R}{N_t} - \omega_{21}, \quad R \geqslant N_t\omega_{21} \tag{6.4-8}$$

受激发射产生的总功率是

$$P_e = (N_t V)W_i h\nu \tag{6.4-9}$$

式中，V为振荡模的体积。将式（6.4-8）代入式（6.4-9），得

$$\frac{P_e}{Vh\nu} = N_t\omega_{21}\left(\frac{R}{N_t\omega_{21}} - 1\right), \quad R \geqslant N_t\omega_{21} \tag{6.4-10}$$

此式可以改写成稍微不同的形式，以便以后应用。用式（6.4-6）表示N_t，并注意到在理想模型中$\omega_{21}^{-1} = t_{自发}$，即得

$$\frac{P_e}{Vh\nu} = N_t\omega_{21}\left(\frac{R}{p/t_c} - 1\right), \quad R \geqslant \frac{p}{t_c} \tag{6.4-11}$$

其中

$$p = \frac{8\pi n^3 \nu^2}{c^3 g(\nu_0)} = \frac{8\pi n^3 \nu^2 \Delta\nu}{c^3} \tag{6.4-12}$$

根据式（4.0-12），p代表共振频率处于原子跃迁线宽Δv之内的辐射模密度（m^{-3}），即能和跃迁发生相互作用的辐射模密度。

回到激光振荡器的功率输出表达式（6.4-11），发现$R/(p/t_c)$这一项是代表泵浦率R超过其阈值p/t_c多少的因子。此外，在一个理想激光系统中$\omega_{21} = t_{自发}^{-1}$，可以将阈值时自发辐射的发射功率$P_s$写成$N_t\omega_{21}hvV$，其定义见式（6.3-5）。于是可以将式（6.4-11）改写成

$$P_e = P_s\left(\frac{R}{R_t} - 1\right) \tag{6.4-13}$$

式（6.4-13）除了能为激光器中原子发射功率提供一个极其简练的表达式之外，它的主

要优点在于，它表明了泵浦强度相对于阈值增加时激光功率如何随 P_s 而增加。图 6.6 表示了由式（6.4-13）预言的线性关系的实验图。

在 6.3 节中的数值例中曾得到 Nd^{3+} 玻璃激光器的 $P_s = 150\ W$，据此，可以预计，当 $(R/R_t) \simeq 2$（高于阈值两倍），此激光器的输出功率将为150 W 左右。

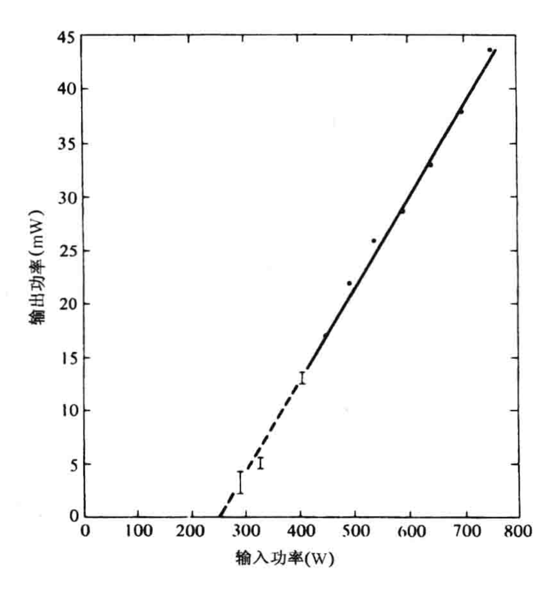


图 6.6　连续 $CaF_2:U^{3+}$激光器中输出功率随输入到氙灯的电功率而变化的曲线，镜面在 2.61 μm 时的透射率是 0.2%, $T = 77K$（引自参考文献[2]）

6.5　激光振荡器的最佳输出耦合

振荡激光模所涉及的总损耗可以简便地归结为以下两个来源：（a）由于吸收和散射在激光材料中及镜面上形成的不可避免的损耗，以及由于反射镜直径的有限大小造成的衍射损耗；（b）由于经过部分透射的反射镜时造成的输出功率耦合出去的（有用的）损耗。显然，损耗（a）应该越小越好，因为它提高了振荡阈值，而对输出功率并无贡献。然而耦合损耗（b）的问题却是微妙的，当耦合损耗为零时（两个镜面的透射率皆为零），阈值达到极小值，原子发射功率 P_e 达到极大，但是，因为没有功率输出，所以这是一种无用的状况。另一方面，若增大耦合损耗，阈值泵浦也会增加，直到超过实际泵浦水平，这时振荡就会停止，功率输出会再度变成零。在上述两个极值之间存在着一个最佳耦合（也即镜面的透射性），此时的输出功率达到极大值。

式（6.4-5）的粒子数反转公式为

$$N_2 - N_1 = \frac{R/\omega_{21}}{1 + W_i/\omega_{21}} \tag{6.5-1}$$

因为根据式（5.6-19）指数增益常数 $\gamma(\nu)$ 与 $N_2 - N_1$ 成正比，所以式（6.5-1）可写成

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{1 + W_i/\omega_{21}} \tag{6.5-2}$$

式中，γ_0 是非饱和（$W_i = 0$）的增益常数（即一个极弱场情形下的增益，它满足

$W_i \ll \omega_{21}$）。利用式（6.4-9）将式（6.5-2）中的W_i用总发射功率P_e来表示，并在表达式中用P_e取代$N_t Vh\nu\omega_{21}$，得

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{1 + P_e/P_s} \qquad (6.5\text{-}3)$$

式中，饱和功率P_s由式（6.3-4）给出。振荡条件式（6.1-12）可以写成

$$e^{\gamma_t l}(1 - L) = 1 \qquad (6.5\text{-}4)$$

式中，$L = 1 - r_1 r_2 \exp(-\alpha l)$是每单程强度损耗的比例。在损耗很小的情形下（$L \ll 1$），式（6.5-4）可写成

$$\gamma_t l = L \qquad (6.5\text{-}5)$$

本章引言的讨论中曾指出，一旦超过了振荡阈值，不管泵浦值多大，激光振荡器具有的实际增益γ会被固定在阈值γ_t处，因此可以用γ_t取代式（6.5-3）中的γ，并由该式解出P_e，于是得

$$P_e = P_s\left(\frac{g_0}{L} - 1\right) \qquad (6.5\text{-}6)$$

式中，$g_0 = \gamma_0 l$（它是单程的非饱和增益且以奈培作单位）。P_e是原子受激发射的总功率。而单程总损耗L可以表示成损耗L_i（不可避免的）与有用的镜面透射率T之和，于是

$$L = L_i + T \qquad (6.5\text{-}7)$$

则由激光耦合发出的总功率P_e中有用输出的比例是$T/(T + L_i)$，所以利用式（6.5-6）可将（有用的）功率输出表示成

$$P_o = P_s\left(\frac{g_0}{L_i + T} - 1\right)\frac{T}{T + L_i} \qquad (6.5\text{-}8)$$

用式（6.3-5）的右端代替式（6.5-8）中的P_s，再由式（4.7-2）得到在小损耗的情形下

$$t_c = \frac{nl}{(L_i + T)c} = \frac{nl}{Lc} \qquad (6.5\text{-}9)$$

则方程式（6.5-8）可写成

$$P_o = \frac{8\pi n^2 h\nu\Delta\nu A}{\lambda^2 (t_2/t_{自发})} T\left(\frac{g_0}{L_i + T} - 1\right) = I_s AT\left(\frac{g_0}{L_i + T} - 1\right) \qquad (6.5\text{-}10)$$

式中，$A = V/l$是模的横截面积（假设为常数），I_s是式（5.7-9）所给定的饱和强度。由$\partial P_0/\partial T = 0$可求$P_0$在$T$变化时达到的极大值

$$T_{最佳} = -L_i + \sqrt{g_0 L_i} \qquad (6.5\text{-}11)$$

这就是产生最大功率输出时镜面透射率满足的条件，即最佳耦合条件。

在最佳耦合情形下功率输出的表达式可以由式（6.5-11）取代式（6.5-10）中的T得到，再利用式（5.7-9）即得

$$(P_o)_{最佳} = \frac{8\pi n^2 h\nu\Delta\nu A}{(t_2/t_{自发})\lambda^2} \times \left(\sqrt{g_0} - \sqrt{L_i}\right)^2 = I_s A \times \left(\sqrt{g_0} - \sqrt{L_i}\right)^2 \equiv S\left(\sqrt{g_0} - \sqrt{L_i}\right)^2 \qquad (6.5\text{-}12)$$

上式中的参量$S = I_s A$由式（6.5-12）所定义，与激励能级（泵浦）或损耗无关。

式（6.5-10）的功率随 L_i 变化的理论曲线示于图 6.7，图中同时标明了 He-Ne 6328Å 激光器的实验数据。注意 g_0 值是由 $L_i = 0$ 的曲线与横轴的交点求得的，它等于12%。对于每一个 L_i 值，显然存在着一个极大功率输出值的最佳耦合。

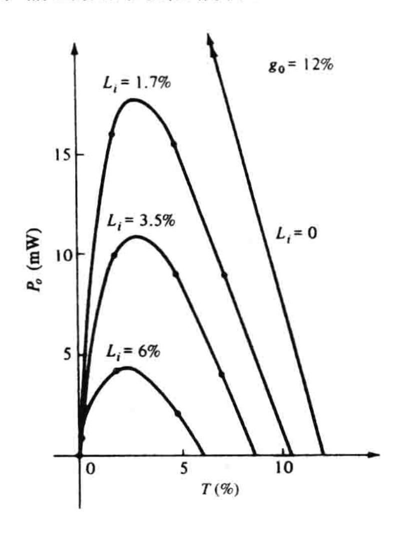


图 6.7　在 He-Ne 6328Å 激光器中各不同内耗值 L_i 的情形下，有用输出功率（P_o）随镜面透射率 T 而变化的曲线（引自参考文献[3]）

考虑存储在激光振荡器中的能量如何随耦合 T 变化是有益的，稍加思考就会得知$\mathscr{E}$与 P_o/T 成正比。P_o（取自图 6.7）以及$\mathscr{E} \propto P_o/T$ 作为耦合 T 的函数其图示于图 6.8。正如所期望的$\mathscr{E}$是 T 的单调递减函数。

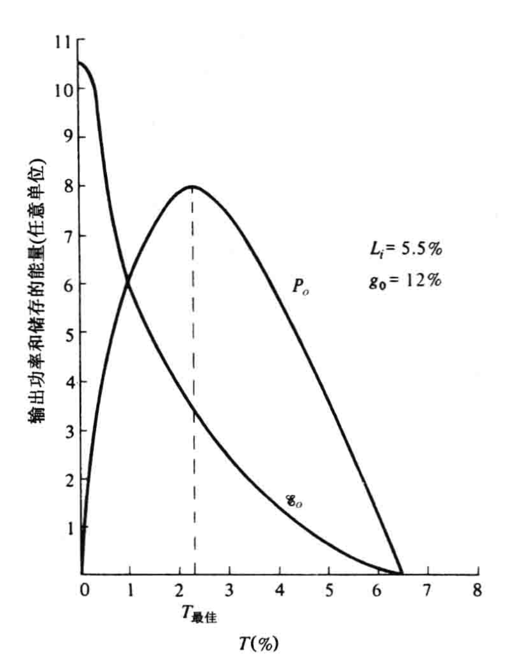


图 6.8　功率输出 P_o 和储存的能量$\mathscr{E}$随镜面透射率 T 而变化的曲线

6.6　多模激光振荡器和锁模

在本节中将考虑均匀增宽或非均匀增宽对激光振荡器的影响。由于增宽，一些模式获得足够的增益从而达到振荡。同时考虑单模和多模振荡。另外，还讨论多纵模的相位锁定已获得短激光脉冲。作为开始，先回顾一下与本节讨论有关的一些基本结论：

1. 一个激光器以振荡频率 v 振荡时，其实际增益常数被钳制在一个定态值，这个值等于损耗，按照式（6.1-14），有

$$\gamma_t(\omega) = \alpha - \frac{1}{l}\ln r_1 r_2 \tag{6.6-1}$$

其中 l 是增益介质的长度，在这里看做与镜面间距相同，α 是共振腔（或光腔）内线性衰减系数，r_1 和 r_2 是反射镜振幅反射系数。

2. 根据式（5.6-19）激光介质的增益常数是

$$\gamma(v) = (N_2 - N_1)\frac{c^2}{8\pi n^2 v^2 t_{自发}} g(v) \tag{6.6-2}$$

3. 只要增益足以抵消损耗，光学共振腔就能维持在频率 v_q 处振荡，由式（4.6-3）知，频率的间隔为

$$v_{q+1} - v_q = \frac{c}{2nl} \tag{6.6-3}$$

式中，q 是整数，忽略高阶横模和色散。现在考虑当泵浦从低于阈值处递增时，激光振荡器内部增益常数 $\gamma(v)$ 会发生的变化。假设有一个频率为 v 极其微弱的光波进入激光介质，然后测量当 v 变化时由该信号所“看见”的增益常数 $\gamma(v)$。

首先研究均匀激光器的情形，由式（6.6-2）知 $\gamma(v)$ 低于阈值时，反转密度 $N_2 - N_1$ 与泵浦速率及 $\gamma(v)$ 成正比，后者与 $g(v)$ 成正比。这种情形由图 6.9（a）中的曲线 A 描述。无源共振腔的频谱式（6.6-1）由图 6.9（b）表示。随着泵浦频率的增加，出现在中心共振频率 v_0 处每单程的增益正好等于单程的平均损耗，如图中曲线 B 所示，此时频率为 v_0 的振荡开始。泵浦的加强并不能增加反转密度，因为它会使 $\gamma(v_0)$ 超过由式（6.6-1）所给定的钳制值。线形函数 $g(v)$ 描述单个原子的响应，而所有的原子都是等同的，因此曲线 C 所示的阈值以上的增益分布 $\gamma(v)$ 与阈值曲线 B 的相同。增加泵浦仅能增强振荡强度，而增益被钳制在如式（6.6-1）的阈值上。泵浦进一步增强，以及由此造成的光强的增加终于会导致 $\gamma(v)$ 的增宽，这是由于受激发射会促使寿命变短。在其他频率，例如，v_{-1}, v_1, v_{-2}, v_2 等处，增益保持在阈值以下，所以一个理想的均匀增宽激光器只能在单一频率振荡。

对于极不均匀的情形，各个原子可以被看成是互不相同且互相独立的，线形函数 $g(v)$ 反映了各个原子跃迁频率的分布，低于阈值时的增益分布 $\gamma(v)$ 与 $g(v)$ 成正比，其行为与均匀情形下相同。一旦如曲线 B 所示达到阈值时，v_0 处的增益保持钳制值，但并不是说在其他频率之下的增益不会随泵浦增大而增大。这种增益来自于那些对频率 v_0 处的增益有贡献的原子互不相关的原子所产生的。因此，泵浦强度进一步加强之后，会导致一些附加的纵模频率的振荡，如曲线 C 所示。因为在每个振荡频率下的增益都是被钳制的，所以相应的增益分布曲线会在各个振荡频率处受到凹陷，这种现象被称为“烧孔”效应[4]。烧孔效应的进一步讨论将在 6.10 节给出。

图 6.10 反映了 He-Ne 6328 Å 激光器多模振荡时的输出频谱。

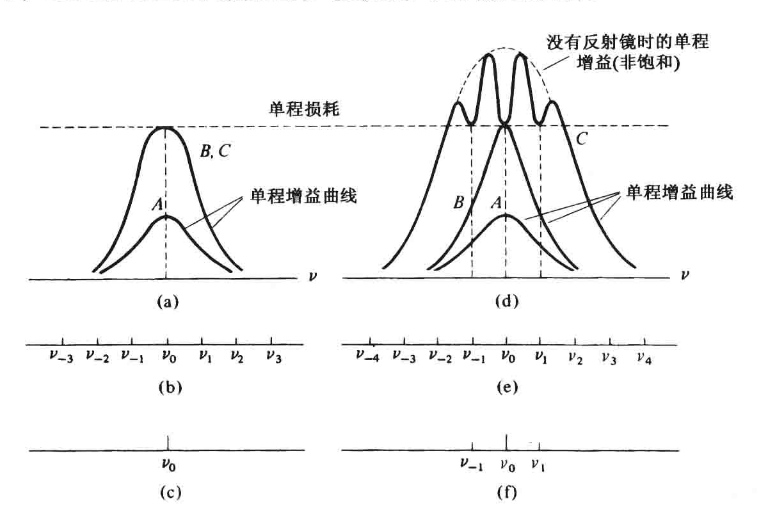


图 6.9　（a）一个均匀的原子系统中的单程增益曲线（*A*——低于阈值；*B*——位于阈值；*C*——远高于阈值）。（b）光学共振腔的纵模频谱；（c）振荡频谱（只有一个模发生振荡）；（d）非均匀原子系统中单程增益曲线。（*A*——低于阈值；*B*——位于阈值；*C*——远高于阈值）；（e）光学共振腔的纵模频谱；（f）泵浦强度为 *C* 时的振荡频谱，表明有三个振荡模式

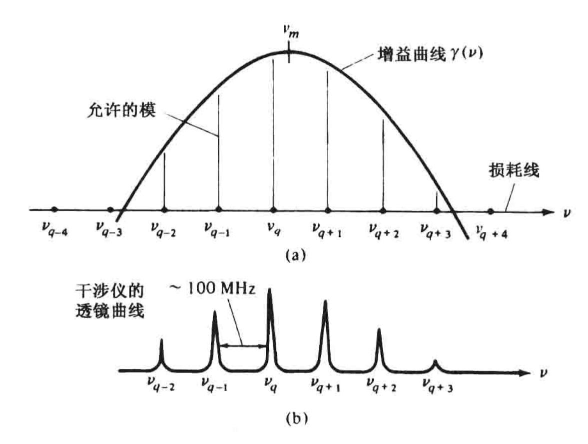


图 6.10　（a）氖跃迁 6328 Å 处的非均匀增宽多普勒增益曲线以及允许的纵模频率的位置；（b）振荡的氦–氖激光器的光强随频率变化的曲线，有 6 个模具有足够的增益而发生振荡（引自文献[5]）

锁模　在上面讨论了非均匀增宽激光器会在许多频率处产生振荡，其间隔由下式决定（假设 $n=1$）

$$\omega_q - \omega_{q-1} = \frac{\pi c}{l} \equiv \Omega(q = \text{整数}) \tag{6.6-4}$$

其中 Ω 是交频率的自由谱范围（或模式间隔）。现在考虑在光学共振腔内某一镜面旁的任意一点处，多模振荡的总光电场的表达式。它可用复数形式表示成

$$E(t) = \sum_m C_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\omega_0 + m\Omega)t + \phi_m]} \tag{6.6-5}$$

式中，C_m是第 m 个模式的振幅，ϕ_m是第 m 个模式的相位。求和号是对各振荡模求和，ω_0是任意选定的参考频率（通常选取最靠近谱线中心的频率）。式（6.6-5）表明$|E(t)|$是周期函数，其周期是$\tau \equiv 2\pi/\Omega = 2l/c$，它正好等于在共振腔内一次往返的时间。利用式（6.6-5），在$t+\tau$时刻场可写为

$$
\begin{aligned}
E(t+\tau) &= \sum_m C_m \exp\left\{ \mathrm{i}\left[(\omega_0 + m\Omega)\left(t + \frac{2\pi}{\Omega} \right) + \phi_m \right] \right\} \\
&= \sum_m C_m \exp\{\mathrm{i}[(\omega_0 + m\Omega)t + \phi_m]\} \exp\left\{ \mathrm{i}\left[2\pi\left(\frac{\omega_0}{\Omega} + m \right) \right] \right\} \\
&= E(t)\exp(\mathrm{i}2\pi\omega_0/\Omega)
\end{aligned}
\tag{6.6-6}
$$

注意$E(t+\tau)$等于$E(t)$，两者只是相差一个常数相位因子。

应注意，$E(t)$的周期性依赖于固定的相位ϕ_m。在许多典型的激光器中，其相位ϕ_m很可能随时间作无规则的变化，从而导致激光输出强度无规则地涨落，于是制约了这些激光器在时间相干性甚为重要的问题中的应用。应注意该涨落是由于不同模之间的无规干涉而产生的，并不是因为各个独立模的强度在变化。有两种办法可以使激光相干，其一是使激光器只在单一频率振荡，因而除去了模间干涉。这可以采用多种方法来实现，比如使共振腔长度l变短，从而使模间距（$\Omega = \pi c/l$）增大到只有一个模具有足够的增益而发生振荡。第二个办法是强迫模的相位ϕ_m之间保持固定的相对值（理想为零，这样都同相振荡）。这就是“锁模”技术，在激光发展史的早期被提出并被论证[6~8]。锁模促使振荡由一系列周期为$\tau = 2l/c = 2\pi/\Omega$的波组成。

当相位ϕ_m等于零时，得到最有用的一种锁模形式。为了简化分析，假设一共有N个相等振幅的振荡模。取$C_m = 1/\sqrt{N}, \phi_m = 0$，式（6.6-5）变成

$$
E(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=1}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_0 + m\Omega)t} = \frac{1}{\sqrt{N}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\omega_0 + (N+1)\Omega/2]t} \frac{\sin(N\Omega t/2)}{\sin(\Omega t/2)}
\tag{6.6-7}
$$

这里场已归一化保持恒为常数的能量（与 N 无关）。上式中的最后一个等号由几何级数累加而得。激光器功率输出的平均值与$E(t)E^*(t)$成正比，其表达式为

$$
P(t) \propto \frac{1}{N} \frac{\sin^2(N\Omega t/2)}{\sin^2(\Omega t/2)}
\tag{6.6-8}
$$

式中，求平均的时间比光学周期$2\pi/\omega_0$长，但比调制周期$2\pi/\Omega$短。

由上式可知$P(t)$的明显解析特性：

1. 功率的发射形式为一系列脉冲序列，其周期，即一次往返的延迟时间为$\tau = 2l/c$；
2. 功率的峰值$P(s\tau)$（s=1,2,3,⋯）是平均功率的N倍，N是锁模的数目；
3. 振幅的峰值是单一振幅的N倍；
4. 单个脉冲的宽度定义为从峰值到第一个零点的时间间隔，它等于$\tau_0 = \tau/N$。这就是$P(t)$ $(N \gg 1)$的珠峰的半高宽 FWHM（见习题 6.18）。在相邻主峰间存在（$N-2$）个边峰。

振荡模的数目大约为$N \cong \Delta\omega/\Omega$，即跃迁线宽$\Delta\omega$（或增益带宽）与模之间的频率间隔$\Omega$的比值。引用上述关系，并将$\tau = 2\pi/\Omega$代入$\tau_0 = \tau/N$，得

$$\tau_0 \sim \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{1}{\Delta\nu} = \frac{\tau}{N} \tag{6.6-9}$$

式中，$\Delta\nu$ 是增益带宽。所以说，锁模脉冲的长度与增益线宽近似成反比。

由式（6.6-8）给出的 $\sqrt{P(t)}$ 的理论曲线在 8 个模（$N=8$）的情形如图 6.11 所示。其纵坐标也可以认为是与瞬态电场振幅值成正比。上述讨论局限于考虑将锁模当做时间的函数，然而可以清楚地看到锁模会导致激光器的振荡能量密集并形成波包。它们以光速 c 在两个镜面之间来回运动（见图 6.12），这是因为在共振腔中麦克斯韦方程的解是行波（驻波可以看成是两个相对而行的波的叠加）。脉冲的周期 $\tau = 2l/c$ 相当于两个相继的脉冲到达镜面的时间间隔。脉冲的空间长度 L_p 相当于其持续时间乘以速度 c。结合 $\tau_0 = \tau/N$ 得到

$$L_p = c\tau_0 = \frac{c\tau}{N} = \frac{2l}{N} \tag{6.6-10}$$

图 6.12 表示了给定瞬时锁模脉冲空间分布示意图。

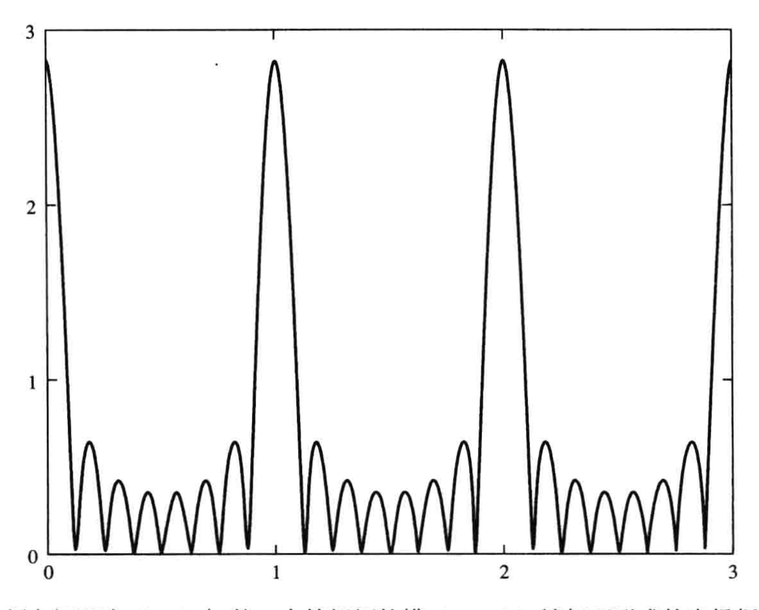


图 6.11　由频率间距为 $\Omega = 2\pi/\tau$ 的 8 个等振幅的模（$N=8$）锁相而形成的光场振幅理论曲线 $\sqrt{P(t)}:|\sin(N\Omega t/2)/\sin(\Omega t/2)|$

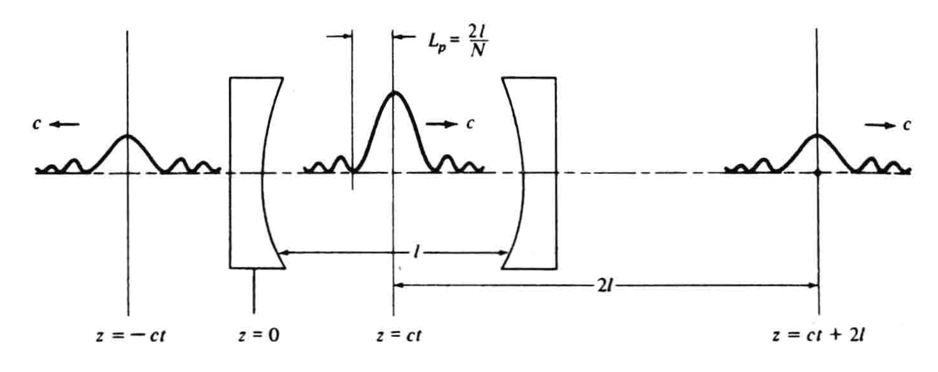


图 6.12　由 N 个激光振荡模形成锁模时的行进能量脉冲

锁模的方法　在前面的讨论中考虑了固定激光器纵模相位所导致的结果——锁模。以角频率（$\Omega = \pi c/l$）亦即模间频率间距，来调制激光器的损耗（或增益）就可以达到锁模效果。由损耗调制而得到锁模的理论证明[2,6,7]过于正式，一个近似的简单证明可以表述如下：将一个薄的快门装在激光器共振腔内当作损耗调制器，使快门在大部分时间内都关闭（高的光损耗），只是每隔$T = 2l/c$ s 周期性地开放一个短暂的时间间隔$\tau_{开}$，这种情形如图 6.13 所示。

在此情形下单一激光模不会振荡，因为损耗太大（假设$\tau_{开}$太短，以致于不足以在快门打开期间建立振荡）。同样的情形也适用于具有任意相位的多模振荡。然而有一种情形却是例外的。如果相位如式（6.6-7）那样被“锁”住，共振腔内的能量分布就会如图 6.12 所示，它由一个窄（$L_p = 2l/N$）行进脉冲组成。倘若该脉冲到达快门时快门正好打开，而且脉冲（时间）长度τ_0比快门开放的时间$\tau_{开}$短，那么锁模脉冲将不会注意到快门的存在，当然也不会衰减，于是可以得到下列结论，损耗调制经由“适者生存”的机理达到锁模效果。在实际工作中，周期性的快门开闭切断了锁模脉冲强度因相位偏离理想值（$\phi_n = 0$）而形成的尾巴，这就具有连续不断地恢复相位的功能。

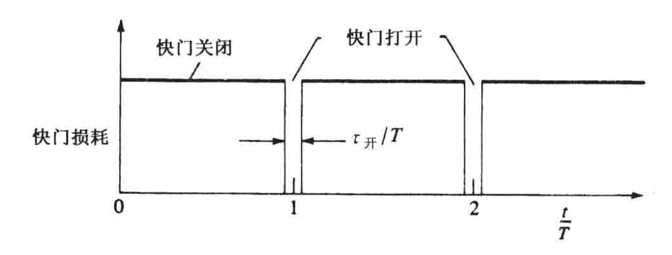


图 6.13　由快门引起的周期性的损耗造成锁模。这种损耗的存在，它优先选择模的相位，使相应的脉冲在快门打开时间间隔通过快门，即锁模

对氦–氖激光器进行锁模实验的装置如图 6.14 所示，部分激光强度因声学驻波作用发生布拉格衍射，从而导致了周期性的损耗[8]。声学振荡的驻波特性使应变具有下列形式$S(z,t) = S_0\cos(\omega_a t)\cos(k_a z)$，式中声速是$v_a = \omega_a/k_a$，$S_0$是恒幅。由于在一级近似下折射率的变化与应变$S(z,t)$成正比，所以可将式（6.6-10）理解为一个相位衍射光栅，其空间周期$2\pi/k_a$等于声波波长。当$S(z,t)$具有极大值和极小值时，每个声学周期内由于光栅对入射激光束作用引起的衍射损耗会两次达到峰值，因此损耗调制频率为$2\omega_a$，而当$2\omega_a = \Omega$时锁模就会发生，其中Ω是激光的两纵模间的（角）频率差。

图 6.15 示出了若丹明（Rhodamine）6G 染料激光器锁模后获得的脉冲。如果一些激光器的光程中含有饱和吸收剂（这种吸收剂的不透明度随光强的增加而减小），则会自发地发生锁模，这种锁模方法可以用于高功率脉冲式固态激光器[10,11]，或连续染料激光器中。其原因在于，与许多模式的无规则相位振荡相比，该种染料将会从一系列锁模脉冲中吸收较少的功率[2]，这是因为对于给定的激光平均功率，锁模振荡可能导致最高的峰值强度，最终其衰减程度也不太严重。采用与前面曾提及的有关周期性快门相同的讨论方法（图 6.13）可得到下列结论：在激光器共振腔中引进饱和吸收剂，饱和吸收剂的存在会迫使激光器按照“适者生存”的机理并按式（6.6-7）锁定各模式的相位。

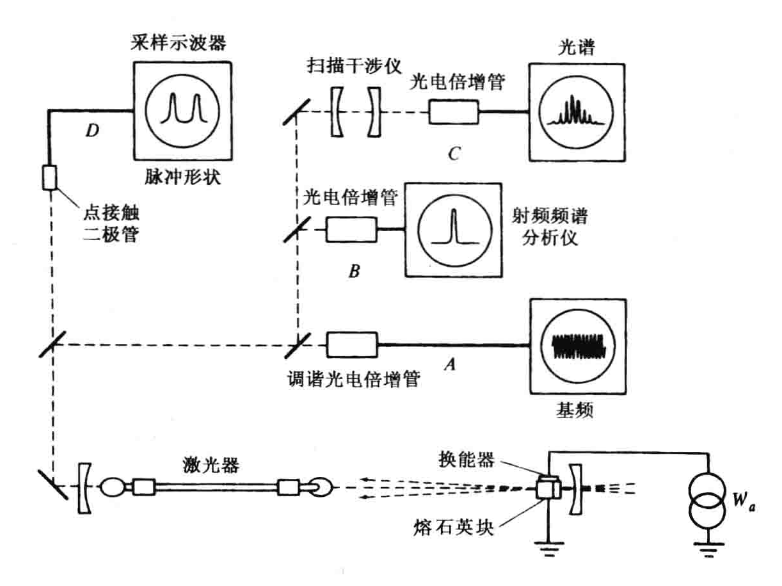


图 6.14　利用声学布拉格损耗调制而形成激光器锁模的实验装置。损耗是由声学驻波对激光的主光束引起的布拉格衍射而造成的。装置图中的 A,B,C,D 分别显示了光强调制的基本分量，光强调制的功率频谱，光场 $e(t)$ 的功率频谱，以及光强（引自文献[9]）

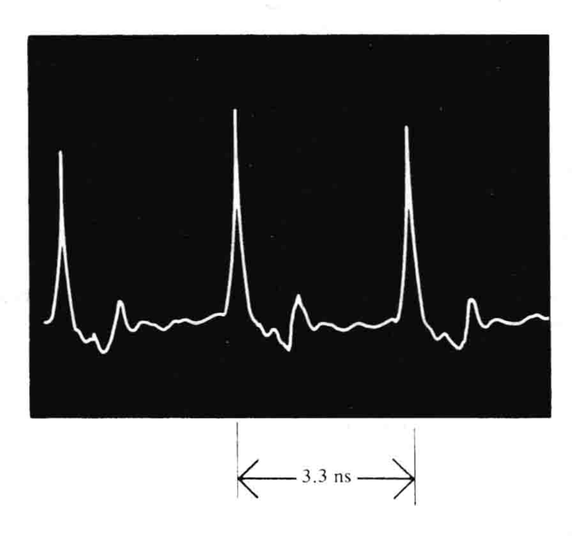


图 6.15　锁模若丹明（Rhodamine）6G 染料激光器的功率输出随时间变化的函数，振荡发生在 $\lambda = 0.61\mu m$ 。图中脉冲的宽度受探测器的限制（引自参考文献[9]）

一些超短锁模脉冲由若丹明（Rhodamine）6G 作为增益介质的染料激光器而获取。锁模由同步增益调制而实现，因为泵浦源（蓝绿色）氩气体激光器自身也是锁模的。泵浦脉冲精确地与染料激光器脉冲的重复变化率同步（这要求两种激光器的光学长度精确相等）。当上述条件实现染料激光器增益介质在每一个往返周期中泵浦一次，进而在染料单元中使得泵浦脉冲和锁模脉冲在空间和时间上重叠。

锁模脉冲附加的尖峰可由含饱和（染料）吸收剂的共振腔产生。同步锁模染料激光器的示意图如图 6.16。由三到四个染料激光放大器单元序列（该序列由二次谐波 Q 开关 Nd^{+3}：

YAG 激光器泵浦用若丹明（Rhodamine）6G 作为增益介质）组成的染料激光器的输出脉冲的附加放大，可以产生峰值功率超过 10^9W 的次皮秒脉冲，能获取的最短脉冲达 $\sim 30\times10^{-15}$s [12]。在 6.8 节中采用非线性光学技术可将其进步变窄达 $\sim 6\times10^{-15}$s 。

超短锁模脉冲应用于测量和研究短寿命分子和电子现象。应用超短光学脉冲能使研究上述现象的实验的瞬时分辨能力提高三个量级以上。许多关于上述应用及许多用于测量脉冲宽度的方法，读者可参照文献[13~15]。

由于半导体介质特别大的增益带宽，使半导体激光器的锁模问题尤为引人注目。半导体激光器具有在 10～20fs 范围的潜在运行时间，尽管目前远未达到[16,17]。作为特殊的应用可通过多电极控制增益和损耗[18]。表 6.1 列出了一些常用的锁模激光器及所观察到的脉冲宽度。

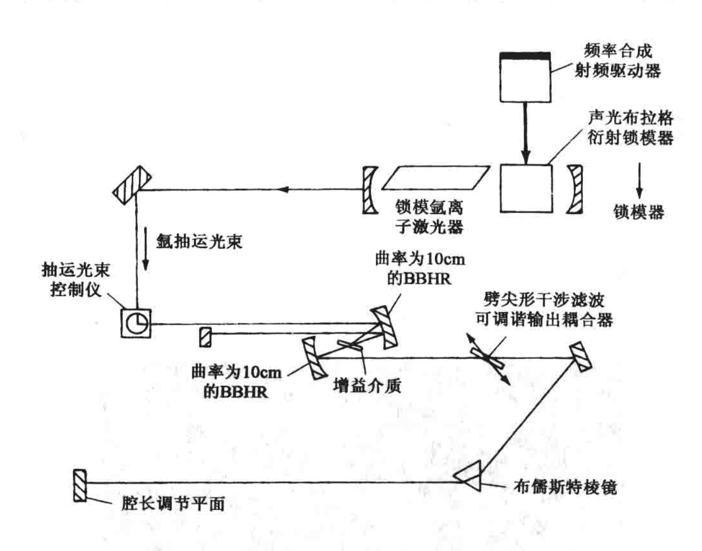


图 6.16　同步锁模染料激光器的示意图（引自参考文献[19]）

表 6.1　一些激光系统的增益线宽 $\Delta\nu$，以及在锁模运行时的脉冲宽度

激光介质	$\Delta\nu$ （Hz）	$(\Delta\nu)^{-1}$ （s）	观察值 τ_0 （s）
He-Ne(0.6328μm)	$\sim1.5\times10^{9}$	6.66×10^{-10}	$\sim6\times10^{-10}$
Nd:YAG(1.06μm)	$\sim1.2\times10^{10}$	8.34×10^{-11}	$\sim7.6\times10^{-11}$
红宝石 (0.6934μm)	6×10^{10}	1.66×10^{-11}	$\sim1.2\times10^{-11}$
Nd^{3+} : 玻璃	3×10^{12}	3.33×10^{-13}	$\sim3\times10^{-13}$
若丹明 6G 染料激光器 (0.6μm)	10^{13}	10^{-13}	3×10^{-14}
双极激光器	10^{13}	10^{-13}	4×10^{-13}

锁模理论

上面的讨论中已介绍了在激光振荡器中引入随时间呈周期性变化的损耗或增益会导致共振腔中纵模的相位锁定。其必要条件是调制频率等于共振腔纵模频率间隔（自由频谱范围）的整数倍。上述可从图 6.14 的讨论或等效地由位于 $\omega_0\pm\omega_m$，由对光学模式 ω_0 的损耗调制而形成的光学边带在频率上与共振频率 ω_q 模式一致的必要条件而推得。上述问题的理论处理方法是解引入了增益(由于反转)和时间周期性变化的损耗的光学共振腔产生振荡时的麦克斯韦

方程组。周期性的损耗调制导致模式间的耦合，从而导致模式的相位锁定。文献[7,20]中有详细的推导。其中关键的结论是当调制频率 ω_m 等于模间频率间隔 $\Omega=\pi c/l$ 时，所有模式同相。这对应于本节开始时讨论的锁模中超短脉冲的形式。

下面，借助周期性的损耗机制描述锁模的基本理论。将损耗单元看做随时间变化的振幅调制的透射单元。损耗调制的往返振幅透射系数可写为

$$T(t)=\sigma_0+2\sigma_1\cos(\Omega t)=\sigma_0+2\sigma_1\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right) \tag{6.6-11}$$

式中，σ_0 和 σ_1 是常数，τ 是共振腔中一次往返的时间，$\Omega=2\pi/\tau$ 是纵模模式间隔的频率。为简化讨论，假设 $T(t)$ 是具有实常数 σ_0 和 σ_1 的一次往返的透射调制函数。损耗调制在输入处的场振幅可写为

$$E_{输入}(t)=\sum_{n=1}^{N}C_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\Omega t} \tag{6.6-12}$$

式中，C_n（模式振幅）是任意常数，N 是模式数。为简化问题，忽略恒为常数的参考频率 ω_0。N 是共振腔内所有能发生振荡的模式的总数。经过透射单元输出场的振幅可写为

$$E_{输出}(t)=T(t)E_{输出}(t)=\sum_{n=1}^{N}C_n'\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\Omega t} \tag{6.6-13}$$

式中，C_n' 是常数。将公式（6.6-11）中 $T(t)$ 代入公式（6.6-12），可得

$$E_{输出}(t)=T(t)E_{输入}(t)=\sum_{n=1}^{N}(\sigma_0C_n+\sigma_1C_{n+1}+\sigma_1C_{n-1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\Omega t} \tag{6.6-14}$$

注意到当调制频率等于共振腔的纵模间隔时每一个模式与相邻模式之间发生耦合。这种耦合机理示于图 6.17。对每一个透过周期损耗调制器的模式将产生两个边带。

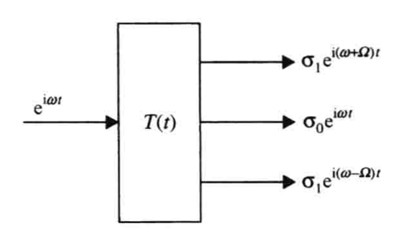


图 6.17　单一频率（ω）入射到调制器，产生的输出有三个频率成分组成（$\omega,\omega+\Omega,\omega-\Omega$）

当光波在共振腔内被反射并继续向前传播时，所有模式都相互耦合。现在证明耦合导致模式间具有常数相位关系。这就是锁模的根本。

如果以常数 C_n 的列矢量的形式表示场振幅，那么输入–输出关系式（式（6.6-13）和式（6.6-14））可写为

$$\begin{bmatrix}\sigma_0 & \sigma_1 & 0 & \cdots & 0\\ \sigma_1 & \sigma_0 & \sigma_1 & \cdots & 0\\ 0 & \sigma_1 & \sigma_0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\\ C_3\\ \vdots\\ C_N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_1'\\ C_2'\\ C_3'\\ \vdots\\ C_N'\end{bmatrix} \tag{6.6-15}$$

注意到除了对角和紧邻对角的矩阵元外都为零。这是特殊调制函数导致的只有一个上和下边带，与最近邻耦合对应。在非均匀增宽激光器系统，可假设所有振荡模式的增益都相

同。令 g 为场振幅的一次往返的净的增益系数；那么一次往返后的输入–输出关系为

$$\begin{bmatrix} \sigma_0 & \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \sigma_1 & \sigma_0 & \sigma_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_1 & \sigma_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & g & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \\ C_3' \\ \vdots \\ C_N' \end{bmatrix}$$

或等价为

$$\begin{bmatrix} g\sigma_0 & g\sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ g\sigma_1 & g\sigma_0 & g\sigma_1 & \cdots & 0 \\ 0 & g\sigma_1 & g\sigma_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g\sigma_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \\ C_3' \\ \vdots \\ C_N' \end{bmatrix} \tag{6.6-16}$$

在稳态，场经过一次往返必须自再现。换句话说，输出场正比于输入场。可写出

$$E_{输出}(t) = \eta E_{输入}(t) \tag{6.6-17}$$

式中，η 是常数，是共振腔内一次往返的振幅透射系数。现在矩阵方程可写为

$$\begin{bmatrix} g\sigma_0 & g\sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ g\sigma_1 & g\sigma_0 & g\sigma_1 & \cdots & 0 \\ 0 & g\sigma_1 & g\sigma_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g\sigma_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_N \end{bmatrix} = \eta \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_N \end{bmatrix} \tag{6.6-18}$$

注意到稳态振荡对应矩阵方程的特征矢量，η 是矩阵方程的特征值。特征矢量代表了共振腔内 N 个模式的叠加态，可看做“超模”。这个矩阵问题可由下列再现方程改写从而等价为

$$g\sigma_0 C_n + g\sigma_1 C_{n+1} + g\sigma_1 C_{n-1} = \eta C_n \tag{6.6-19}$$

或等价为

$$g\sigma_1 C_{n+1} + (g\sigma_0 - \eta) C_n + g\sigma_1 C_{n-1} = 0 \tag{6.6-20}$$

边界条件为

$$C_0 = C_{N+1} = 0 \tag{6.6-21}$$

按前面选择的边界条件模式振幅的解可写为

$$C_n = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin\left(\frac{ns\pi}{N+1}\right) \tag{6.6-22}$$

式中，s 是整数（s=1，2，3，⋯，N），平方根 $\sqrt{2/(N+1)}$ 是归一化因子。特征值可表示为

$$\eta = g\sigma_0 + 2g\sigma_1 \cos\left(\frac{s\pi}{N+1}\right), \quad s = 1, 2, 3, \cdots, N \tag{6.6-23}$$

很有趣地发现由式（6.6-22）给出的特征矢量与 (g, σ_0, σ_1) 的绝对量值无关。这就意味着锁模可由任意的振幅调制深度获得。由于 η 是一次往返对应的等效振幅透射系数，注意到基

态解（$s=1$）对应最大的等效透射（假设正的σ_0和σ_1）。对于这个解，模式振幅可表示为

$$C_n = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin\left(\frac{n\pi}{N+1}\right), \quad n = 1, 2, 3, \cdots, N \tag{6.6-24}$$

注意到振幅都是实数。换句话说，所有模式振幅的相位都锁定在零，也被说成所有模式被相位锁定。

现在对这个解在共振腔内构建稳态场的瞬态分布。按照式（6.6-24）场可写为

$$E(t) = \sum_{n=1}^{N} C_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\Omega t} = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{n\pi}{N+1}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\Omega t} \tag{6.6-25}$$

在分几步累加后，可得到

$$E(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{N+1}} \left(\frac{\sin\frac{N}{2}(\Omega t + \alpha)}{\sin\frac{1}{2}(\Omega t + \alpha)} + \frac{\sin\frac{N}{2}(\Omega t - \alpha)}{\sin\frac{1}{2}(\Omega t - \alpha)} \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}[(N+1)/2]\Omega t} \tag{6.6-26}$$

式中，α可表示为

$$\alpha = \frac{\pi}{N+1} \tag{6.6-27}$$

式（6.6-26）与前面的表示式（6.6-7）有些不一样，式（6.6-7）中假设模式振幅是常数。场由两个脉冲组成，每一个脉冲宽度是τ / N，中心分别位于$\Omega t = \alpha, -\alpha$。这样，锁模脉冲比较宽同时边带峰值较低。场（6.6-26）具有周期τ的周期性。在$t = 0, \tau, 2\tau, 3\tau, 4\tau, \cdots$处出现强度的峰值。如果定义主峰的脉冲宽度是从峰值到第一个零处的间距，可以很容易地证明，对大 N，锁模脉冲（6.6-26）的宽度为

$$\tau_0 = \frac{3}{2}\frac{\tau}{N} \tag{6.6-28}$$

式中，τ是腔内一次往返所需时间。这近似为脉冲的半高宽（见习题 6.18）。注意到由于式（6.6-24）给出的模式振幅的改变使得脉冲宽度展宽了近 50%。图 6.18 是共振腔内稳态场的振幅分布图。

严格的说，只有$\eta = 1$的超模能稳定振荡。一般地，只存在一个超模其一次往返振幅透射系数等于 1。在不同的泵浦水平和增益系数下，任一超模都能振荡。图 6.19 表示了$N = 5$超模的场振幅（绝对值）分布图。超模的场振幅可写为

$$E(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{N+1}} \left(\frac{\sin\frac{N}{2}(\Omega t + s\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(\Omega t + s\alpha)} + \frac{\sin\frac{N}{2}(\Omega t - s\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(\Omega t - s\alpha)} \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}[(N+1)/2]\Omega t} \tag{6.6-29}$$

注意到$s = 1$的超模的主峰符合振幅调制器的最大透射窗口。这与最大平均透射率相一致。$s = 5$的超模的主峰符合振幅调制器的最小透射窗口。图 6.20 表示了$s = 1$和$s = 5$的超模的场振幅的绝对值。注意到这些模式的珠峰的瞬时位置与振幅调制器的最大透射窗口相关。

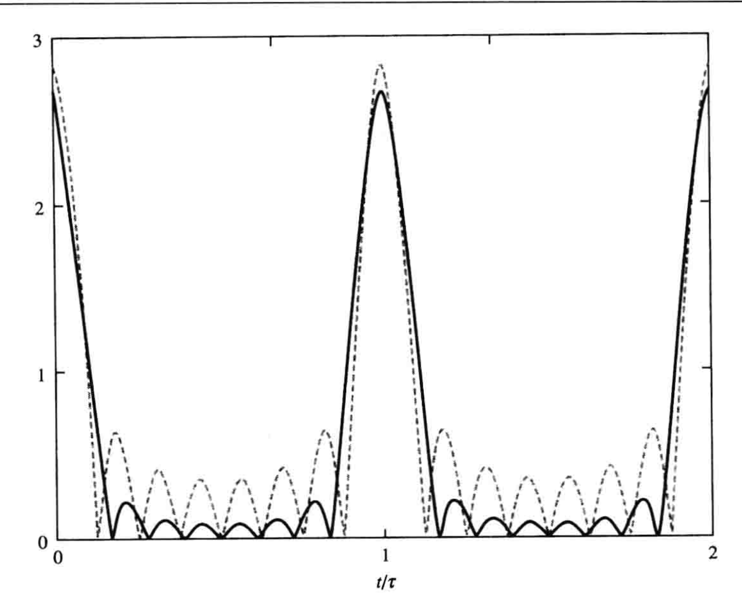


图 6.18　锁模激光束（N=8）的归一化的场振幅（绝对值）分布图。实曲线对应式（6.6-25），有小点构成的曲线对应式（6.6-7）。场振幅是归一的，因此 $\sum|C_n|^2=1$

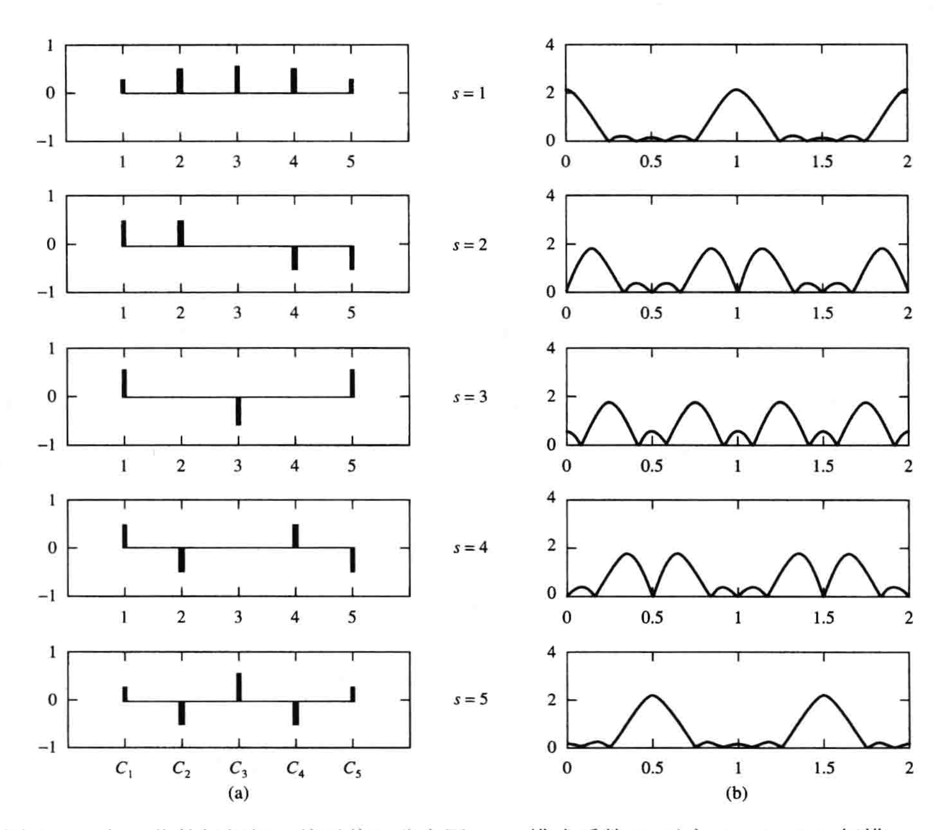


图 6.19　归一化的场振幅（绝对值）分布图（a）模式系数 C_n 对应 $N=5$（b）超模。场振幅是归一的，因此 $\sum|C_n|^2=1$。顶端的超模对应 $s=1$，底端的超模对应 $s=5$

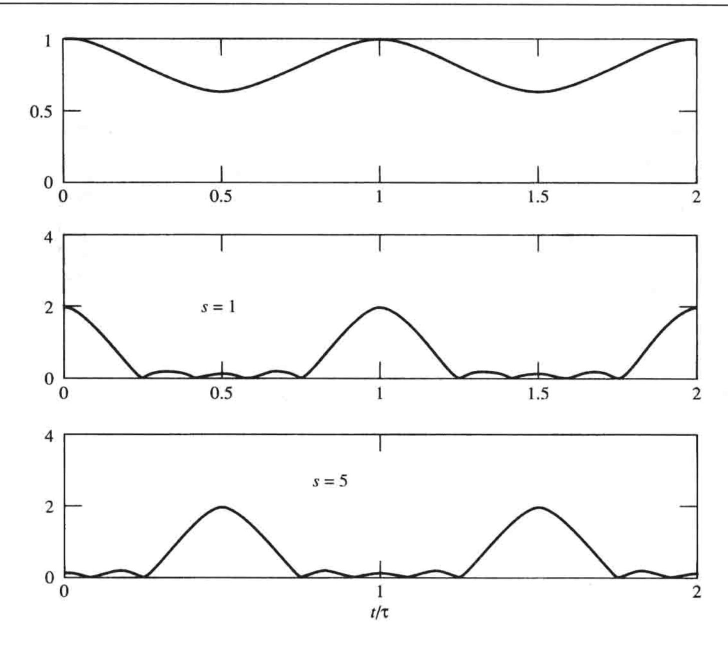


图 6.20　$s=1$ 和 $s=5$ 的超模的场振幅的绝对值的理论曲线图。最上面的曲线是振幅透射率与时间（以 τ 为单位）的函数。下面两幅图是 $s=1$ 和 $s=5$ 的超模的场振幅的绝对值

6.7　在均匀增宽激光系统中的锁模

6.6 节中分析非均匀增宽激光的锁模时，假设了内调制的作用就是将没有调制时具有无规则相位的模式锁定相位，对均匀增宽情形，只有一种模式能正常振荡。尽管如此，实验发现锁模产生的短脉冲，在形式上与 6.6 节中描述的很相似，因此会涉及多模振荡。存在内调制时，功率连续地从高增益模传输给低增益模（即那些在一般情况下不会产生振荡的模），由此可将上面的观点和实验结果统一。这种功率可简单地看做是对模式 ω_0 作 Ω 调制时位于 $(\omega_0 \pm n\Omega)$ 边带的功率。按照这样理解，剖析物理现象，不仅是一个模被锁定，而是一个模的产生。其结果是大量的具有相等频率间隔和固定相位关系的振荡模被激发了，与非均匀情形类似，将产生超短脉冲。

这个问题的解析解[21~23]的求解与应用于行波微振荡器[24]中分析短脉冲的方法相似。参照图 6.21，考虑端面反射率为 R_1 和 R_2 的光学共振腔，除了包含增益介质外，还引入周期性损耗单元。为简化讨论，假设一次往返的场振幅增益为 $g(\omega)$，损耗单元的一次往返的振幅透射调制函数为 $T(t)$。

在前面的小节中描述锁模的基本理论必须能说明均匀增宽增益谱中不同的增益值。现在又假设损耗单元一次往返的振幅透射函数为

$$T(t) = \sigma_0 + 2\sigma_1 \cos(\Omega t) = \sigma_0 + 2\sigma_1 \cos\left(\frac{2\pi}{\tau} t\right) \tag{6.7-1}$$

式中，σ_0 和 σ_1 是常数，τ 是共振腔中一次往返的时间，$\Omega = 2\pi/\tau$ 是纵模模式间隔的频率。为简化讨论，假设 σ_0 和 σ_1 为实常数。常数 σ_1 被称为调制深度。一次往返的第 n 个模式的振幅增益可写为

$$g_n = g(\omega_0 + n\Omega) \tag{6.7-2}$$

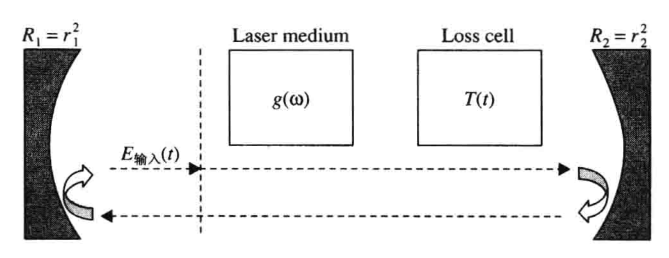


图 6.21　均匀增宽激光器锁模理论分析中假定的实验装置。在任意参考位置输入的场 $E_{输入}(t)$ 经过一次往返后对应振幅增益 $g(\omega)$ 和振幅损耗调制 $T(t)$，用公式表示为 $E_{输出}(t) = g(\omega)T(t)\ E_{输入}(t)$

式中，ω_0 是为常数的参考频率。共振腔内在任意参考位置的场振幅可写为

$$E_{输入}(t) = \sum_{n=1}^{N} C_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\Omega t} \tag{6.7-3}$$

式中，C_n 是第 n 个模式的振幅，N 是所涉及的模式的总数。这里再次忽略恒为常数的参考频率 ω_0。共振腔内经过一次往返的场振幅可写为

$$E_{输出}(t) = g(\omega)T(t)E_{输入}(t) = \sum_{n=1}^{N} C_n' \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\Omega t} \tag{6.7-4}$$

式中，将端面反射计入净增益 $g(\omega)$，C_n 是常数。

利用式（6.7-1）和式（6.7-2），可得

$$E_{输出}(t) = g(\omega)T(t)E_{输入}(t) = \sum_{n=1}^{N} (g_n\sigma_0 C_n + \sigma_1 g_{n+1} C_{n+1} + \sigma_1 g_{n-1} C_{n-1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\Omega t} \tag{6.7-5}$$

又注意到当调制频率等于共振腔的纵模间隔时每一个模式与相邻模式之间发生耦合。当光波在共振腔内被反射并继续向前传播时，所有模式都相互耦合。因此时间调制是导致所有模式耦合的内在机理。耦合的结果是能量在模式间交换。将证明耦合导致模式间具有常数相位关系，这就是锁模的根本。

如果以常数 C_n 的列矢量的形式表示场振幅，那么输入/输出关系式可写为

$$\begin{bmatrix} \sigma_0 & \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \sigma_1 & \sigma_0 & \sigma_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_1 & \sigma_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & g_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \\ C_3' \\ \vdots \\ C_N' \end{bmatrix} \tag{6.7-6}$$

这里第二个对角矩阵对应均匀增宽介质中每个模式不同的增益。将两个矩阵相乘，可得

$$\begin{bmatrix} g_1\sigma_0 & g_2\sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ g_1\sigma_1 & g_2\sigma_0 & g_3\sigma_1 & \cdots & 0 \\ 0 & g_2\sigma_1 & g_3\sigma_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g_N\sigma_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \\ C_3' \\ \vdots \\ C_N' \end{bmatrix} \tag{6.7-7}$$

在稳态，场经过一次往返必须自再现。输出场正比于输入场。可写出

$$E_{输出}(t) = \eta E_{输入}(t) \tag{6.7-8}$$

式中，η 是常数，是共振腔内包含了增益介质、反射镜和损耗单元的一次往返后净的振幅透射系数。现在矩阵方程可写为

$$\begin{bmatrix} g_1\sigma_0 & g_2\sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ g_1\sigma_1 & g_2\sigma_0 & g_3\sigma_1 & \cdots & 0 \\ 0 & g_2\sigma_1 & g_3\sigma_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g_N\sigma_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_N \end{bmatrix} = \eta \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_N \end{bmatrix} \tag{6.7-9}$$

注意到稳态振荡对应矩阵方程的特征矢量，η 是矩阵方程的特征值。特征矢量代表了共振腔内 N 个模式的叠加态，可看做超模。这个矩阵问题可由下列再现方程改写从而等价为

$$g_n\sigma_0 C_n + g_{n+1}\sigma_1 C_{n+1} + g_{n-1}\sigma_1 C_{n-1} = \eta C_n \tag{6.7-10}$$

或等价为

$$g_{n+1}\sigma_1 C_{n+1} + (g_n\sigma_0 - \eta)C_n + g_{n-1}\sigma_1 C_{n-1} = 0 \tag{6.7-11}$$

边界条件为

$$C_0 = C_{N+1} = 0 \tag{6.7-12}$$

满足上述边界条件求方程式（6.7-10）的解一般不易直接得出。既然方程式（6.7-9）中的矩阵式是一个对称矩阵和一个对角矩阵的乘积，所有特征值和特征矢量都是实数形式。可以证明对应最大的特征值（基超模）的特征矢量中的每一个量都被锁定在相同的相位。增益谱的均匀增宽使得模式振幅 C_n 进一步递减（见图 6.22），这导致主峰增宽旁瓣受到抑制。图 6.22 表示了三个不同的锁模脉冲的比较，相应的模式振幅对应 N=8。

均匀增宽的锁模激光器的脉冲宽度可由下面方法估算。按照式（6.7-5），可写出脉冲的第 n 个傅里叶分量为

$$C'_n = g_n\sigma_0 C_n + g_{n+1}\sigma_1 C_{n+1} + g_{n-1}\sigma_1 C_{n-1} \tag{6.7-13}$$

一次往返后振幅的改变量为

$$\Delta C_n = C'_n - C_n = (g_n\sigma_0 + 2g_n\sigma_1 - 1)C_n + \sigma_1(g_{n+1}C_{n+1} - 2g_n C_n + g_{n-1}C_{n-1}) \tag{6.7-14}$$

其中 g_n 是第 n 个频率分量的一次往返的增益。考虑洛伦兹增益谱的情形

$$g_n = 1 + \frac{g_0}{1 + \left(\dfrac{n\Omega}{\Omega_g}\right)^2} - L = 1 + g_0 - L - g_0\left(\frac{n\Omega}{\Omega_g}\right)^2 \tag{6.7-15}$$

式中，g_0 是常数（峰值往返分段增益），L 是往返分段损耗，Ω_g 是增益带宽。引入三个近似条件式（6.7-14）可改写为微分方程：（1）增益谱的频率依赖关系和表示成 $(\omega-\omega_0)=n\Omega$；（2）离散的频率谱用连续谱代替，函数表示为 $(\omega-\omega_0)=n\Omega$；（3）当频率谱很密集（通常锁模涉及到上千个模式）$(g_{n+1}C_{n+1}-2g_nC_n+g_{n-1}C_{n-1})$ 可用二阶微分代替。因此可得

$$\Delta C(\omega) = (g_0 - L)C - g_0\left(\frac{\omega-\omega_0}{\Omega_g}\right)^2 C + \sigma_1\Omega^2\frac{\mathrm{d}^2 gC}{\mathrm{d}\omega^2} \tag{6.7-16}$$

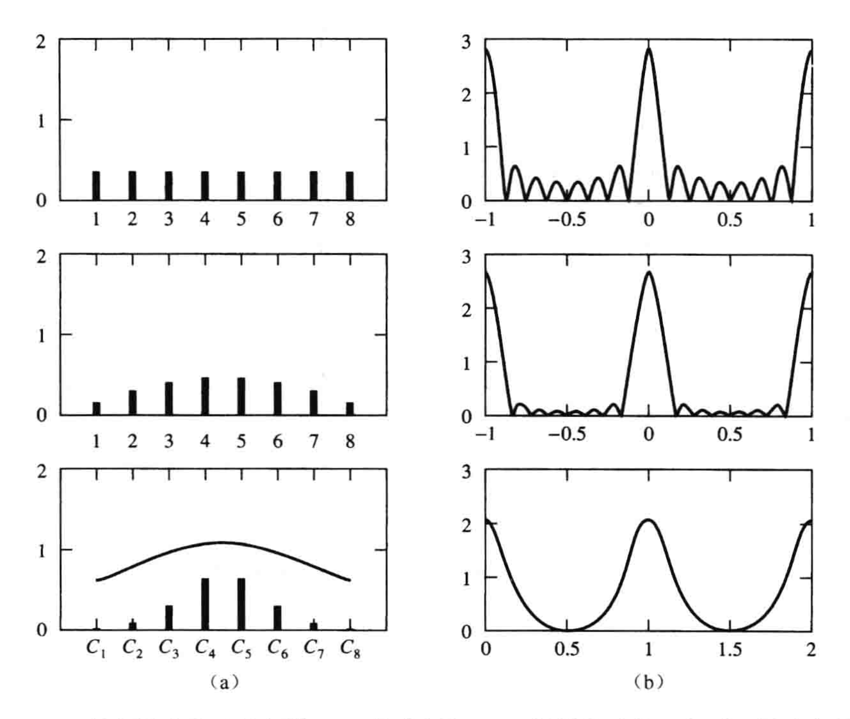


图 6.22　锁模激光脉冲基超模（a）模式振幅（b）场的绝对值。上面一行对应所有模式的振幅都相同的情形。中间一行对应非均匀增宽 $C_n \propto \sin[n\pi/(N+1)]$。底下一行对应均匀增宽。下左图中的曲线对应均匀增宽的增益谱

式中，假设了 $\sigma_0 + 2\sigma_1 = 1$（按照式（6.7-1）对应损耗单元的峰值透射率为 100%），Ω 是调制频率也是模式频率间隔。在稳态，一次往返的振幅增量是零。因此锁模脉冲必然是微分方程

$$(g_0 - L)C - g_0\left(\frac{\omega - \omega_0}{\Omega_g}\right)^2 C + \sigma_1\Omega^2\frac{\mathrm{d}^2 gC}{\mathrm{d}\omega^2} = 0 \tag{6.7-17}$$

的解。其中 C 是锁模场 $E_{输入}(t)$（见式（6.7-3））的傅里叶变换。

方程式（6.7-17）的解是高斯脉冲（见习题 6.16）

$$C(\omega - \omega_0) = C_0 \exp[-(\omega - \omega_0)^2\tau^2] \tag{6.7-18}$$

式中，常数 τ（脉冲宽度）必须满足下列方程

$$\left(1 + \frac{2g_0}{\Omega_g^2\tau^2}\right)\tau^4 = \frac{g_0}{4\sigma_1\left(\Omega\Omega_g\right)^2} \text{ 和 } g_0 - L = 2\sigma_1\Omega^2\tau^2\left(1 + \frac{g_0}{\Omega_g^2\tau^2}\right) \tag{6.7-19}$$

对于 $g_0 \ll \Omega_g^2\tau^2$ 的锁模激光器，上述方程变为

$$\tau^4 = \frac{g_0}{4\sigma_1\left(\Omega\Omega_g\right)^2} \text{ 和 } g_0 - L = 2\sigma_1\Omega^2\tau^2 \tag{6.7-20}$$

式（6.7-20）中的第一个等式被称为脉冲宽度的 K-S 公式[26]，表示脉冲宽度反比于增益带宽和调制频率的几何平均数。第二个等式给出了一次往返的净增益

$$g_0 - L = 2\sigma_1 \Omega^2 \tau^2 \tag{6.7-21}$$

峰值增益比损耗大得多。这是正常的，不会造成不稳定，因为调制会导致损耗的增加。瞬态脉冲 $E(t)$ 可表示为

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{C_0}{\tau} \sqrt{\pi} e^{i\omega_0 t} \exp\left(-\frac{t^2}{4\tau^2}\right) \tag{6.7-22}$$

得出强度的半高宽为

$$\tau_p = 2\tau\sqrt{2 \ln 2} = 2\sqrt{\ln 2}\left(\frac{g_0}{\sigma_1}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{\Omega\Omega_g}} \tag{6.7-23}$$

式中，Ω 是纵模间角频率间隔，Ω_g 是增益带宽。

加压增宽型 CO_2 激光器实现锁模的实验装置示于图 6.23。图 6.24 表示出 τ_p 与 $\Delta\nu$ 成平方根反比关系，图 6.25 表示出 τ_p 与调制参数 σ_1 的依赖关系。

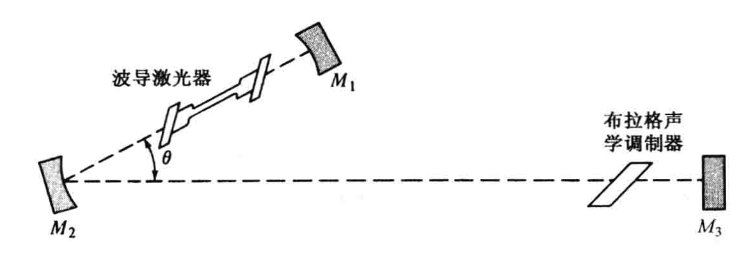


图 6.23　高压 CO_2 激光器锁模实验的示意图（引自文献[27]）

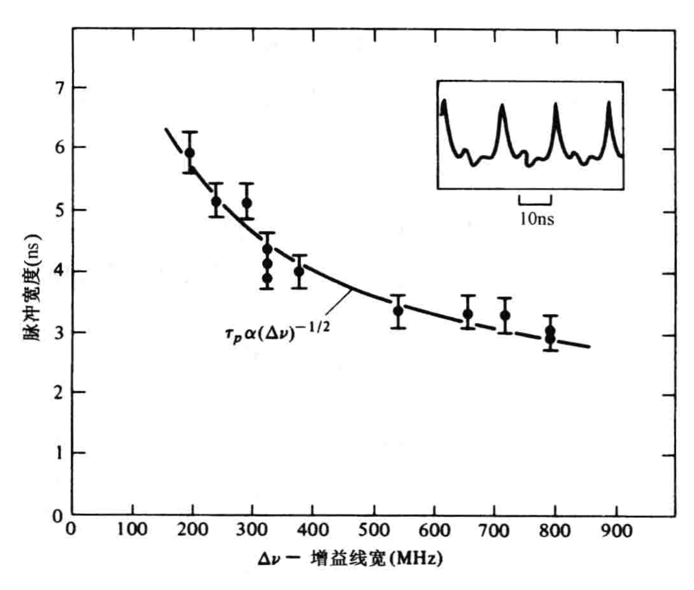


图 6.24　脉冲宽度随增益线宽 $\Delta\nu = \Omega_g / 2\pi$ 的变化曲线，其中 $\Delta\nu$ 的变化受压强的控制（在 150T 时 $\Delta\nu = 8\times10^8$ ）（引自文献[27]）

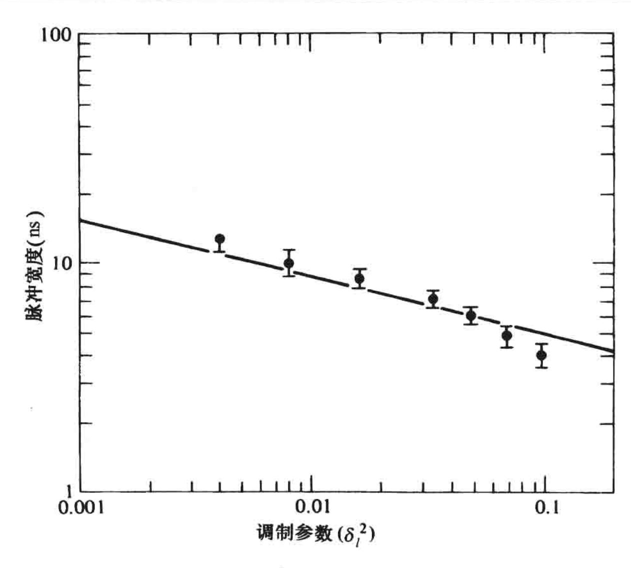


图 6.25　锁模脉冲宽度与调制参数 $\delta_l^2 = 2\sigma_1$ 的函数关系曲线（引自参考文献[27]）

相位调制实现锁模

除了损耗调制，内相位调制也能实现锁模。相位调制通常通过如图 9-7 中的基本方式实现，在共振腔的光轴上放置电光晶体，这样传输的波产生一个正比于穿过晶体瞬时变化的电场的相位延迟。调制信号的频率等于一次往返的延迟时间的倒数，即纵模频率的间距，这与损耗调制中相同。

将相位调制的透射函数写为

$$T(t) = \exp(-\mathrm{i}\delta \sin \Omega t) = \exp\left(-\mathrm{i}\delta \sin 2\pi\Delta\nu_{轴} t\right) \tag{6.7-24}$$

式中，δ 是常数，称为调制深度。振幅透射函数以傅里叶分量的形式可写为

$$T(t) = \exp(-\mathrm{i}\delta \sin \Omega t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\delta)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\Omega t} \tag{6.7-25}$$

式中，$J_n(\delta)$ 是贝赛尔函数。注意到相位调制产生无限级次的边带。这些边带组成了共振腔的模式。因此周期性调制的相位调制器与共振腔的所有模式耦合使得调制频率与纵模间距相等。

根据前面的矩阵分析，通过解下面方程的本征值可得到锁模激光器振荡的超模

$$g\begin{bmatrix} J_0(\delta) & J_1(\delta) & J_2(\delta) & \cdots & J_{N-1}(\delta) \\ J_{-1}(\delta) & J_0(\delta) & J_1(\delta) & \cdots & J_{N-2}(\delta) \\ J_{-2}(\delta) & J_{-1}(\delta) & J_0(\delta) & \cdots & J_{N-3}(\delta) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ J_{-N+1}(\delta) & J_{-N+2}(\delta) & J_{-N+3}(\delta) & \ldots & J_0(\delta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_N \end{bmatrix} = \eta \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_N \end{bmatrix} \tag{6.7-26}$$

式中，g 是一次往返的净增益。模式振幅 C_n 可通过解本征值问题而得到。由反对称的矩阵可推出本征矢量和本征值一般都为复数值。尽管模式被锁定，复振幅导致“被锁定”的相位延迟。延迟的相位又导致锁模脉冲存在频率啁啾。

由饱和吸收剂产生被动锁模

在 6.6 节中提到，饱和吸收剂对高强度的光束吸收弱而对低强度的光束吸收强。这样的吸收剂就适用于对激光共振腔内高峰值强度的短脉冲的透射。下面，假设利用一个快速响应的饱和吸收剂[25]来说明被动锁模的基本原理。在被动锁模中，损耗调制器用饱和吸收剂代替。在穿透吸收剂时，饱和吸收剂的损耗调制 $s(t)$ 可表示为

$$s(t)=\frac{s_0}{1+I(t)/I_{饱和}} \tag{6.7-27}$$

式中，s_0 是饱和损耗（即低光强时的损耗），$I(t)$ 是脉冲的瞬时强度，$I_{饱和}$ 是饱和强度。如果饱和相对较弱，式（6.7-27）可写为

$$s(t)=s_0-s_0 I(t)/I_{饱和} \tag{6.7-28}$$

如果进行模式振幅归一化，使得 $|E(t)|^2=$ 功率，则吸收剂的透射率可写为

$$T(t)=1-s(t)=1-s_0+s_0\frac{|E(t)|^2}{I_{饱和}A_{有效}}=1-s_0+\gamma|E(t)|^2 \tag{6.7-29}$$

式中，$A_{有效}$ 是模式的有效面积，γ 是自振幅调制（SAM）系数。自振幅调制是吸收饱和行为的直接结果。按照式（6.7-29），透射率是随场强的增加而增加的函数。改写式（6.7-16）可得到被动锁模中的一次往返的振幅变量。利用傅里叶变换关系式（6.7-22），将式（6.7-16）变换到时域，这样就可导出

$$\Delta E(t)=(g_0-L)E(t)+\frac{g_0}{\Omega_g^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E(t)-\sigma_1\Omega^2t^2\int gC\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{6.7-30}$$

将主动锁模项 $\sigma_1\Omega^2t^2\int gC\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$ 替换为自振幅调制（这里没有主动调制）

$$\Delta E(t)=(g_0-L)E(t)+\frac{g_0}{\Omega_g^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E(t)+\gamma|E(t)|^2E(t) \tag{6.7-31}$$

在稳态，$\Delta E(t)=0$，上式的解是双曲正割曲线（见习题 6.17）

$$E(t)=E_0\,\mathrm{sech}(t/\tau)$$

式中，E_0 和 τ 是常数，并有

$$\tau^2=\frac{2g_0}{\gamma E_0^2\Omega_g^2} \tag{6.7-32}$$

和

$$L-g_0=\frac{g_0}{\Omega_g^2\tau^2} \tag{6.7-33}$$

强度谱的半高宽可表示为

$$\tau_p=1.67\tau=1.67\sqrt{\frac{2g_0}{\gamma}}\frac{1}{E_0\Omega_g} \tag{6.7-34}$$

很有趣地注意到表示被动锁模的脉冲宽度的公式（6.7-32）与主动锁模的公式（6.7-19）相关。在主动锁模中，$\sigma_1\Omega^2$ 正比于振幅调制的空间曲率（透射的二阶微分）。在被动锁模的自相位调制中，曲率正比于 $\gamma E_0^2/\tau^2$。因此式（6.7-32）和式（6.7-19）相关。两者的比较也

可解释为什么在相同的增益带宽 Ω_g 下被动锁模能产生更窄的脉冲宽度。由于脉冲更短，自调制的曲率随 $\gamma E_0^2/\tau^2$ 而增加，而主动锁模保持不变（$\sigma_1\Omega^2$）。在共振腔中，净增益为负（如，按照式（6.7-33）在低光强下）。在脉冲的峰值，由于饱和吸收剂净增益是正的。

6.8 脉冲宽度的测量和啁啾脉冲的收缩

测量锁模超短脉冲的宽度问题，在实际应用和理论分析中是引人注目的。由于传统的最快的光学探测器的响应时间约为 2×10^{-11} s，因此不可能应用于直接测量（$\tau<10^{-11}$ s）的锁模短脉冲。很多的测量方法都利用了一些非线性过程以获取光强脉冲的空间自相关图形。因此测量一个脉冲宽度（如 $\tau_0=10^{-12}$ s）就变为测量一个长度为 $c\tau_0=0.3$mm 自相关图形的空间范围，这相对来说较为简单。

下面将阐述这样的一种广泛被应用的方法，该方法基于光学二次谐波现象。二次谐波产生的过程将在第 8 章中详细讨论。为了满足目前讨论的需要，从一个如下的光脉冲入手

$$e_1(t)=\mathrm{Re}[\mathscr{E}_1(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}] \tag{6.8-1}$$

入射在非线性光学晶体时，产生一个倍频的光脉冲输出 $e_2(t)$

$$e_2(t)=\mathrm{Re}[\mathscr{E}_2(t)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega t}]\propto\mathrm{Re}[\mathscr{E}_1^2(t)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega t}] \tag{6.8-2}$$

图 6.26 表示测量脉冲宽度的二次谐波系统的示意图。激光器发射一连续的锁模脉冲，每个脉冲 $\mathscr{E}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 被分束器分成两个强度相等的脉冲。其中一个脉冲相对另一个超前（或落后）τs，然后两个脉冲在非线性光学晶体中再次汇合。由晶体产生的二次谐波（2ω）脉冲入射到一个“慢”探测器，其输出电流在时间轴上的宽度长于光脉冲宽度。

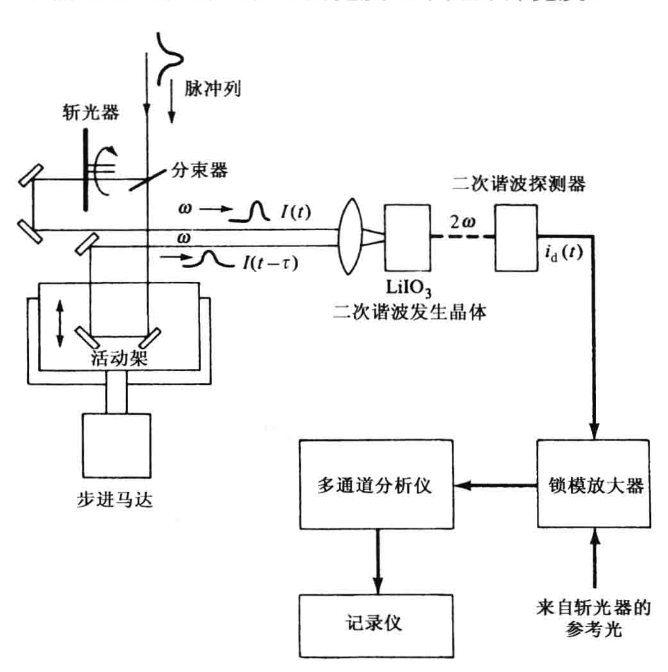


图 6.26　测量锁模超短脉冲的二次谐波发生——自相关装置

入射到非线性晶体上的总光场是直接入射场与延迟场之和

$$e_{\text{tot}}(t)=\text{Re}\{[\mathscr{E}_1(t)+\mathscr{E}_1(t-\tau)\text{e}^{-\text{i}\omega\tau}]\text{e}^{\text{i}\omega t}\}=\text{Re}[\mathscr{E}(t)\text{e}^{\text{i}\omega t}]$$
$$\mathscr{E}(t)=\mathscr{E}_1(t)+\mathscr{E}_1(t-\tau)\text{e}^{-\text{i}\omega\tau} \tag{6.8-3}$$

按照式（6.8-2），由非线性晶体辐射的二次谐波场的复振幅正比于入射基波场的复振幅的平方成正比，即

$$\mathscr{E}_2(t)\propto[\mathscr{E}_1(t)+\mathscr{E}_1(t-\tau)\text{e}^{-\text{i}\omega\tau}]^2$$
$$=\mathscr{E}_1^2(t)+\mathscr{E}_1^2(t-\tau)\text{e}^{-2\text{i}\omega\tau}+2\mathscr{E}_1(t)\mathscr{E}_1(t-\tau)\text{e}^{-\text{i}\omega\tau} \tag{6.8-4}$$

然后，二次谐波场 $e_2(t)=\text{Re}[\mathscr{E}_2(t)\exp(\text{i}2\omega t)]$ 再入射到光学探测器（光电倍增管或光电二极管等），其输出电流 i_d（见 11.1 节）正比于入射光的强度。由式（6.8-4）得到

$$i_d(t)\propto\mathscr{E}_2(t)\mathscr{E}_2^*(t)=[\mathscr{E}_1(t)\mathscr{E}_1^*(t)]^2+[\mathscr{E}_1(t-\tau)\mathscr{E}_1^*(t-\tau)]^2$$
$$+4\mathscr{E}_1(t)\mathscr{E}_1^*(t)\mathscr{E}_1(t-\tau)\mathscr{E}_1^*(t-\tau)+s(\tau) \tag{6.8-5}$$

式中，$s(\tau)$ 由包含 $\cos\omega\tau$ 和 $\cos2\omega\tau$ 相关的项组成。由于这些涨落项的延迟周期为 $\Delta\tau\sim10^{-15}\,\text{s}$，在延迟时间 τ 上求积的平均趋于 0，因此 $s(\tau)$ 可忽略不计。

式（6.8-5）中瞬时变化的前三项，在皮秒（或小于皮秒）的量级，相对很慢的光学探测器不可避免地对 $i_d(t)$ 求积，从光学探测器实际输出的是延迟时间 τ 的函数

$$i_d(\tau)\propto\langle I^2(t)\rangle+\langle I^2(t-\tau)\rangle+4\langle I(t)I(t-\tau)\rangle \tag{6.8-6}$$

式中，角括号表示对时间的平均，强度 $I(t)$ 定义为 $I(t)=\mathscr{E}_1(t)\mathscr{E}_1^*(t)$。将式（6.8-6）两边除以 $\langle I^2(t)\rangle$，且有 $\langle I^2(t)\rangle=\langle I^2(t-\tau)\rangle$，归一化的探测器的输出电流为

$$i_d(\tau)=1+2G^{(2)}(\tau) \tag{6.8-7}$$

式中，$G^{(2)}(\tau)$ 是光强脉冲二阶的自相关函数，它由下式定义

$$G^{(2)}(\tau)\equiv\frac{\langle I(t)I(t-\tau)\rangle}{\langle I^2(t)\rangle} \tag{6.8-8}$$

对于宽度为 τ_0 的超短相干光脉冲，由于 $G^{(2)}(0)=1$ 和 $G^2(\tau\gg\tau_0)=0$，则有

$$i_d(0)=3\qquad i_d(\tau\gg\tau_0)=1$$

上述情形，$i_d(\tau)$ 与 τ 的关系将由一个（归一化）高度为 3 、背景高度为 1 宽度约为 τ_0 的波峰所构成。

区分刚刚讨论过的情形（相干）和非相干入射光（如激光振荡激发大量独立的模式）在实际中很重要。在非相干情形中，仍在 $i_d(0)=3$（因为即使是非相干光在零延迟时与自身相关）。当 $\tau>0$ 或更精确地，τ 比光的相干时间长时，有

$$G^{(2)}(\tau)=\frac{\langle I(t)I(t-\tau)\rangle}{\langle I^2(t)\rangle}=\frac{\langle I(t)\rangle^2}{\langle I^2(t)\rangle} \tag{6.8-9}$$

因为 $I(t)$ 与 $I(t-\tau)$ 完全不相关。这里考虑的完全非相干光的情形中，式（6.8-9）时间平均可由系综平均代替，因此有

$$\langle I^2(t)\rangle=\int_0^\infty p(I)I^2\,\text{d}I \tag{6.8-10}$$

式中，$P(I)$ 是强度分布函数，$P(I)\text{d}I$ 是为 I 的测量值在 I 到 $I+dI$ 之间的概率。对非相干光

$$P(I)=\frac{1}{\langle I\rangle}\mathrm{e}^{-I/\langle I\rangle}$$

将上式代入式（6.8-10），可得

$$\langle I^2(t)\rangle=2\langle I\rangle^2$$

再代回式（6.8-7），于是得

$$i_d(\tau>0)\propto 1+2\frac{\langle I(t)\rangle^2}{\langle I^2(t)\rangle}=2$$

上述非相干情形 $i_d(\tau)$ 与 τ 的关系应由高度为 2 的背景和高度为 3 的很窄的波峰所构成。相干锁模脉冲和非相干光的一般特性如图 6.27 所示。

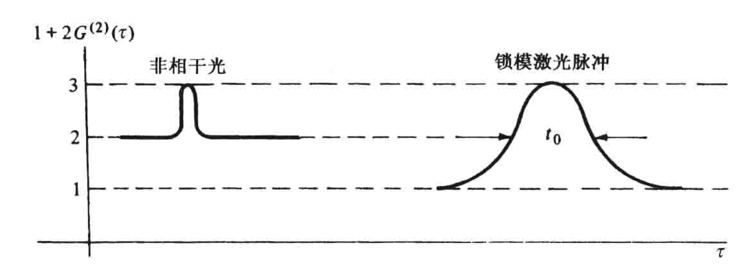


图 6.27　二次谐波（平均）积分强度，由于两个光脉冲是它们之间时间延迟的函数。左边曲线代表非相干光源的情形，右边曲线代表相干锁模光脉冲的情形

从二次谐波相关图形决定原始脉冲宽度有些模棱两可。可以由式（6.8-8）中的积分证明，$G^2(\tau)$ 的半高宽 t_0 与 $I(t)$的半高宽 τ_0 相关,一些常见波的参数列在表 6.2 中。

表 6.2　一些简单脉冲的宽度

$I(t)$	t_0/τ_0
$1\ (0\leqslant t\leqslant t_0)$, 0(其他值)	1
$\exp\{-\frac{(4\ln 2)t^2}{\tau_0^{\ 2}}\}$	$\sqrt{2}$
$\mathrm{sech}^2(\frac{1.76t}{\tau_0^{\ 2}})$	1.55
$\exp(-\frac{(\ln 2)t}{\tau_0})(t\geqslant 0)$	2

用图 6.28 中所示的至今为止能产生的最短光脉冲（$\tau_0\sim 30\times10^{-15}$ s）的自相关图形来归纳本节。在这样一个脉冲中光的上升和下降仅占 15fs，这是令人感兴趣的。

要提高一个数量级，必须分离出一个单一的脉冲周期，尽管如此，为什么上述进展并不是很快，必定存在一些原因（鼓励读者去思考一下）。

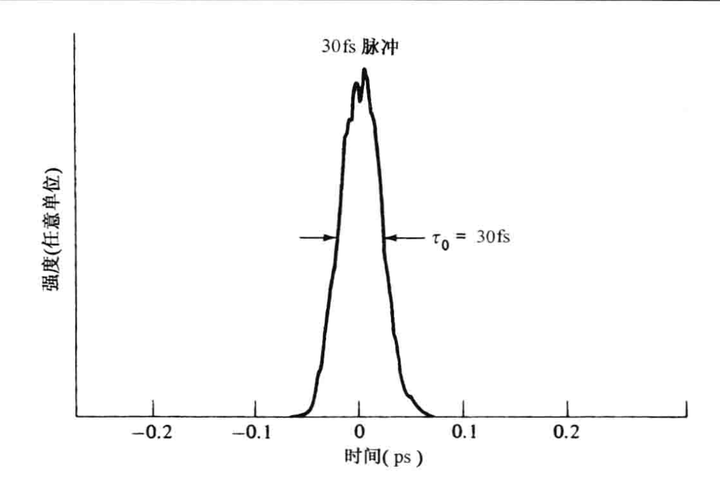


图 6.28　染料激光器（λ为6100Å）锁模脉冲的自相关图形

啁啾和压缩效应引起的脉冲收缩

6.6 节中描述的激光振荡器的模式锁定导致振荡模式由一系列连续超短脉冲组成。每一个脉冲的宽度 τ_p 约为 $\dfrac{1}{(\Delta\omega)_{增益}}$，$(\Delta\omega)_{增益}$ 是能维持振荡的增益值在增益频率谱中的宽度。应用非线性光学技术有可能进一步减小脉冲宽度超出极限值 $(\Delta\omega)^{-1}_{增益}$。对将引入的新思路增加一些合理性，回顾一下 3.6 节中涉及的类比，在自由均匀空间中的光束的衍射与色散通道（光纤）中的光脉冲传输可进行严格类比。

光脉冲 $f_1(t)\exp(\mathrm{i}\omega_0 t)$ 穿过长为 L 的色散光纤，其分布由式（7.2-5）描述为

$$\tilde{f}_2(\Omega)=\tilde{f}_1(\Omega)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\beta''}{2}L\Omega^2\right) \tag{6.8-11}$$

式中，$\tilde{f}_1(\Omega)$ 和 $\tilde{f}_2(\Omega)$ 分别是输入脉冲 $f_1(t)$ 和输出脉冲 $f_2(t)$ 的傅里叶变换式，$\beta''=\mathrm{d}^2\beta/\mathrm{d}\omega^2$。

在 2.12 节中（见式（2.12-8））的横向分布为 $u_1(x)$ 的传导光束，服从下式

$$\tilde{u}_2(K)=\tilde{u}_1(K)\exp\left(\mathrm{i}\frac{LK^2}{2k}\right) \tag{6.8-12}$$

式中，（6.8-11）和式（6.8-12）形式上极其类似，揭示出存在构建时间模拟模型的可能性，如图 6.29 所示，可用人们熟知的透镜对空间光的会聚作用来模拟，要实现上述思路必须利用时间透镜，一种对入射光场乘上 $\exp(\mathrm{i}at^2)$ 因子的仪器，是对入射光乘上 $\exp(\mathrm{i}kx^2/2f)$ 因子的空间透镜的精确模拟。

时间脉冲的收缩如图 6.29（a）所示，在收缩之前，输入脉冲的包络为高斯型

$$f_1(t)=\exp(-t^2/\tau_p^2) \tag{6.8-13}$$

其强度的半高宽 $\Delta\tau=\sqrt{2\ln 2}\tau_p$。该脉冲通过时间透镜，即将 $f_1(t)$ 乘上相位因子 $\exp(\mathrm{i}At^2/\tau_p^2)$，则

$$f_2(t)=\exp[-(1-\mathrm{i}A)(t/\tau_p)^2] \tag{6.8-14}$$

在平面 2 上总场强为

$$E_2(t) = f_2(t)\exp(i\omega_0 t) = \exp[-(t/\tau_p)^2]\exp\mathrm{i}\left[\omega_0 t + A\left(\frac{t}{\tau_p}\right)^2\right] \tag{6.8-15}$$

若将 $E_2(t)$ 表示为 $E_2(t) = \exp[-(t/\tau_p)^2 + i\phi(t)]$，瞬时频率为 $\omega(t)^2 = \mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$

$$\omega(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\omega_0 t + A\left(\frac{t}{\tau_p}\right)^2\right] = \omega_0 + 2A\frac{t}{\tau_p^2} \tag{6.8-16}$$

对应于线性“啁啾”。尽管脉冲宽度不受透镜影响，但透镜改变了脉冲谱。为分析脉冲谱，将 $f_2(t)$ 作傅里叶变换

$$\tilde{f}_2(\Omega) = \sqrt{\frac{\tau_p^2}{4\pi(1-\mathrm{i}A)}}\exp\left(-\frac{1+\mathrm{i}A}{4(1+A^2)}(\Omega\tau_p)^2\right) \tag{6.8-17}$$

啁啾效应使谱宽（FWHM）增加了 $\sqrt{1+A^2}$ 倍。

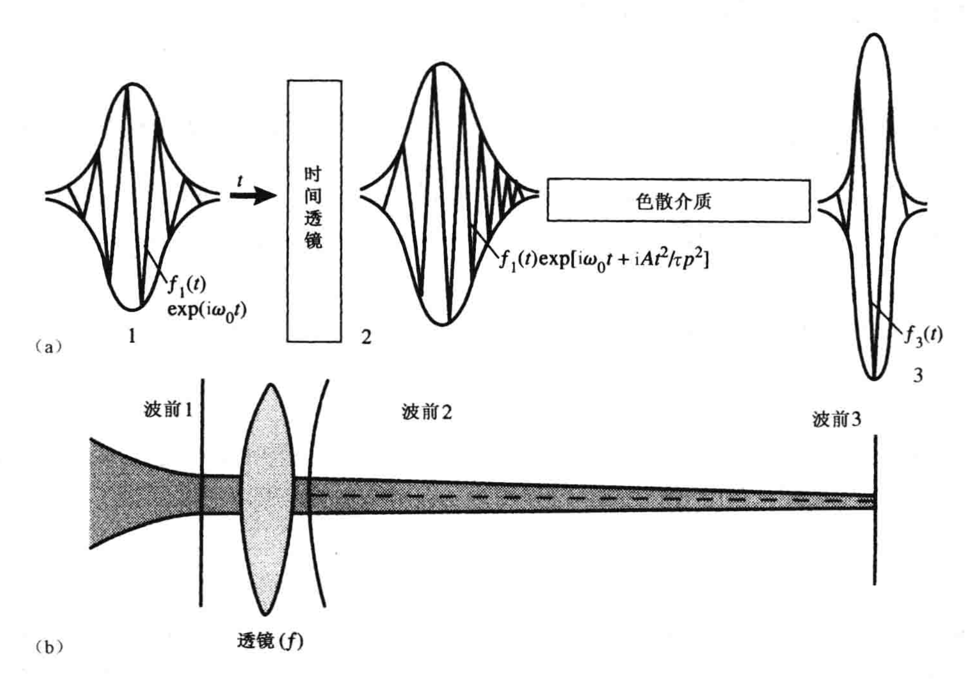


图 6.29　（a）时间聚焦（脉冲收缩）和（b）普通透镜的空间聚焦的等价性。注意到图中啁啾光脉冲对应于波前为曲面的高斯空间光束

时间透镜

时间透镜增加了谱宽同时保留了全部脉冲的能量，说明功率在谱的各成分间重新分配。考虑分辨率，时间透镜不能由线性的无源器件实现。事实上，实际选择作为时间透镜的都是非线性的。其中之一是应用特殊介质的自相位调制，这种介质的克尔（Kerr）系数很大，即介质的折射率与光强有关，$n = n_0 + n_2 I$（克尔效应），I 为光强（$\mathrm{W/m^2}$），n_2 是材料的常数。例如，考虑一个高斯强度分布的脉冲

$$I = I_0 \exp(-2\alpha t^2)$$

入射到非线性介质，具有特征参量n_2，折射率为$n = n_0 + n_2 I(t)$

$$E_{输入} = E_0 \exp(-\alpha t^2)$$

$$I_{输入} = I_0 \exp(-2\alpha t^2)$$

在$z = L$处脉冲产生相位延迟因子$\exp[i\frac{\omega}{c}(n_0 + n_2 I(t))L]$。

如果将高斯脉冲展开为$I(t) = I_0(1 - 2\alpha t^2 + \cdots)$ 并仅保留前两项，相位延迟因子变为

$$E_{输出} = E_{输入} \times 相位延迟因子$$

$$= E_0 \exp(-\alpha t^2)\exp[i\frac{2\omega n_2 \alpha I_0 L}{c} t^2] \qquad (6.8\text{-}18)$$

对照式（6.8-15），上式中对应的啁啾可作为时间透镜。忽略了无关紧要的固定相位和群延迟。

这样，脉冲$f_2(t)$不再是变换–限制的，因为其时间–带宽积

$$\Delta\nu\ \Delta\tau = \frac{2\ln 2}{\pi}(1 + A^2)^{1/2} = 0.4413(1 + A^2)^{1/2} \qquad (6.8\text{-}19)$$

超出高阶脉冲最小值$(1 + A^2)^{1/2}$倍。上述超出的带宽原则上使减小脉冲宽度成为可能，应用无源的方式，由因子$(1 + A^2)^{1/2}$使上述脉冲又产生一个被压缩的变换–限制的脉冲。

在图 6-29（a）空间例子中，通过脉冲在空间传输一个合适的距离 L，实现空间“啁啾”脉冲的收缩，时间等价为啁啾脉冲穿过传递特征如式（6.8-11）的色散器件。这导致

$$\tilde{f}_3(\Omega) = \tilde{f}_2(\Omega)\exp\left(-i\frac{\beta''}{2}L\Omega^2\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\tau_p^2}{4\pi(1 - iA)}}\exp\left[-\frac{\Omega^2\tau_p^2}{4(1 + A^2)} - i\left(\frac{A\tau_p^2}{4(1 + A^2)} + \frac{\beta'' L}{2}\right)\Omega^2\right] \qquad (6.8\text{-}20)$$

式中，L是色散通道的长度，当条件

$$\beta'' L = -\frac{A\tau_p^2}{2(1 + A^2)} \qquad (6.8\text{-}21)$$

得到了满足，输出由下式给出

$$\tilde{f}_3(\Omega) = \sqrt{\frac{\tau_p^2}{4\pi(1 - iA)}}\exp\left(-\frac{(\Omega\tau_p)^2}{4(1 + A^2)}\right) \qquad (6.8\text{-}22)$$

上式在时间域中对应于

$$f_3(t) = F^{-1}\{\tilde{f}_3(\Omega)\} = \sqrt{1 + iA}\exp\left(-(1 + A^2)\frac{t^2}{\tau_p^2}\right) \qquad (6.8\text{-}23)$$

输出脉冲宽度被压缩为

$$(\Delta\tau)_{压缩} = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 + A^2}} \qquad (6.8\text{-}24)$$

当$A \gg 1$时，压缩比约为 A，这个压缩比正好是啁啾引起的谱宽增加的因子。通过简单积分得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |f_3(t)|^2 \, \mathrm{d}t \tag{6.8-25}$$

这样脉冲能量是守恒的。

光栅对压缩器

在上面的例子中，利用具有群速度色散 $(\beta'' \neq 0)$ 的光纤压缩啁啾脉冲。这种光纤的基本特征是它的传递函数，由式（6.8-20）给定为

$$\text{光纤的传递函数（长度}\ L\text{）} = \exp\left[-\frac{\mathrm{i}\beta''}{2}L\Omega^2\right]$$

任一传递函数具有 $\exp(\mathrm{i}b\Omega^2)$ 形式的其他器件，都可作为压缩器，其中 b 为实常数，其大小和符号都可改变。一种常用的压缩脉冲的装置是双光栅望远镜压缩器[16,28,29]，如图 6.30 所示。具有不同的傅里叶分量 Ω 的入射光沿不同方向被光栅衍射，这样沿不同路径的输入和输出光之间的光程差各不相同，形成不同的相位 $b\Omega^2$（见习题 6.19）。

图 6.30 的实验中由二次谐波自相关系统得到的啁啾脉冲和压缩脉冲的强度分布曲线见图 6.31。输入脉冲由原始宽度 5.2ps 被压缩到 0.32ps。根据式（6.8-24），这相当于压缩比 A 约为 16。$\Delta\nu(\Delta\tau)_{\text{压缩}}$积约为 0.45，接近理论极限 0.44，说明脉冲已经窄到允许值的极限，即它是变换限制的。

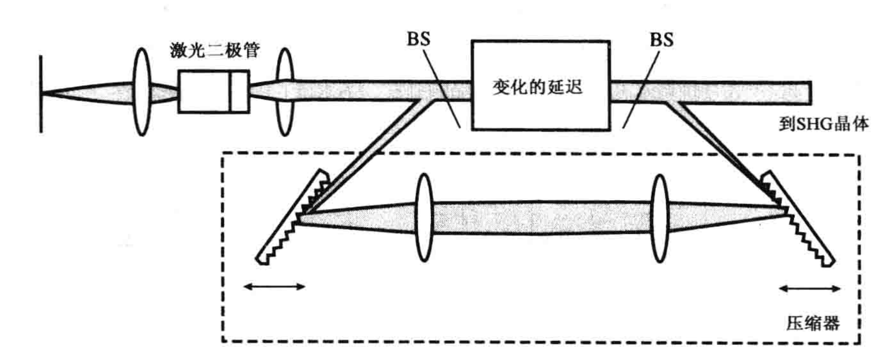


图 6.30　双光栅望远镜脉冲压缩器（引自参考文献[43]）

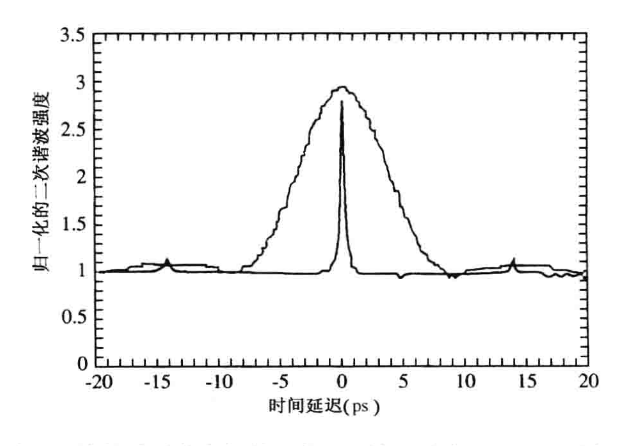


图 6.31　未压缩和压缩的脉冲的自相关强度。压缩比约为 $A=16$（引自参考文献[16]）

由电流脉冲或锁模脉冲激励的半导体激光器常会发生啁啾现象，原因是有源区中载流子浓度变化导致瞬变的折射率，这样半导体激光器的输出脉冲自然就得到压缩。半导体激光中的啁啾现象将在第 15 章讨论。

6.9　巨脉冲(调 Q)激光器

“调 Q ”技术被用来从激光器中获得强而短的激光脉冲[30]，见参考文献[31～33]。在泵浦过程中可以采用一些办法使光学共振腔的品质因数 Q 降低，以致于其增益（即反转浓度 N_2-N_1，）达到十分高的值而不会发生振荡（ Q 的降低使反转浓度阈值增高到超过泵浦）。当反转浓度达到其峰值时，Q 很快地恢复到原来的数值。这时激光介质中（单程）增益则会大大超过阈值，这就会引发极其快速的振荡，同时从 $2\rightarrow1$ 的受激跃迁使反转浓度耗尽。上述过程使处在较高激光能级的原子的大部分能量转换成光子，存于光学共振腔内，它们会在两个反射面之间来回反射，每一次反射都会有（ $1-R$ ）部分光子逃逸，从而造成了脉冲衰减，其特征时间常数（“光子寿命”）由式（4.7-3）给出

$$t_c \simeq \frac{n_0 l}{c(1-R)}$$

式中，n_0 是介质的折射率。

实验和理论都表明，放出上述完整的巨激光脉冲总共需要约 2×10^{-8} s 的时间，可以忽略在脉冲期间发生的粒子数弛豫和泵浦效应。还可以假设 Q 开关从低值到高值的过程是瞬时完成的。

激光器的特性由下列变量表征：共振腔内的光子总数 ϕ；总反转粒子数 $n\equiv(N_2-N_1)V$；以及无源共振腔中光子的衰减时间常数 t_c —指数增益常数 γ 与 n 成正比，辐射强度 I 随距离增加而增强，其变化关系为 $I(z)=I_0\exp(\gamma z)$ 以及 $\mathrm{d}I/\mathrm{d}z=\gamma I$ 。一个以波速运动的观察者观察到强度的增长率是

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\gamma\left[\frac{c}{n}\right]I$$

所以时间的指数增长常数是 $\gamma(c/n_0)$。如果激光棒长为 L，共振腔长为 l，那么在任一时刻只有 L/l 部分光子会被放大，并且平均增长常数为 $\gamma c(L/n_0 l)$，因此有

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=\phi\left(\frac{\gamma cL}{n_0 l}-\frac{1}{t_c}\right) \tag{6.9-1}$$

式中，$-\phi/t_c$ 代表单位时间内由共振腔损耗和输出耦合造成的共振腔光子数的减少。定义一个无量纲的归一化的时间参量 $\tau=t/t_c$，将式（6.9-1）乘以 t_c 可得

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau}=\phi[(\frac{\gamma}{nl/cLt_c})-1]=\phi[\frac{\gamma}{\gamma_i}-1]$$

式中，$\gamma_t=(n_0 l/cLt_c)$ 是能维持振荡（亦即 $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\tau=0$ ）情形下增益常数的极小值。由式（5.6-19）可知，γ 与反转粒子数 n 成正比，上面最后的一个方程式也可写成

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau}=\phi\left(\frac{n}{n_t}-1\right) \tag{6.9-2}$$

式中，$n_t = N_t V$ 为阈值下的总反转粒子数，见式（6.1-15）。

式（6.9-2）中的 $\phi(n/n_t)$ 项代表由于受激辐射每单位归一化时间内产生的光子数。因为发射的每一个光子都来自一个单一的跃迁，它相当于总反转粒子数减少为 $\Delta n = -2$，所以可直接得到

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\tau} = -2\phi\frac{n}{n_t} \tag{6.9-3}$$

式（6.9-2）和式（6.9-3）两个方程式描述了 ϕ 和 n 的演变情形，它可由数值方法简单地解出。在给出这一计算结果之前，先考虑一些解析推理的结果。将式（6.9-2）除以式（6.9-3），得

$$\frac{d\phi}{dn} = \frac{n_t}{2n} - \frac{1}{2}$$

积分后可得

$$\phi - \phi_i = \frac{1}{2}[n_t \ln\frac{n}{n_i} - (n - n_i)]\ 。$$

式中，n_i 是初始反转粒子束，ϕ_i 是初始光子数。假设在共振腔中开始时的光子数 ϕ_i 可以忽略不计，得

$$\phi = \frac{1}{2}\left(n_t \ln\frac{n}{n_i} - (n - n_i)\right) \tag{6.9-4}$$

上式为任意时刻光子数 ϕ 和反转粒子数 n 之间的关系式。当 $t \gg t_c$ 时，光子数 ϕ 将为零，所以在式（6.9-4）中令 $\phi = 0$ 可得到最后反转粒子数 n_f 的表达式

$$\frac{n_f}{n_i} = \exp\left(\frac{n_f - n_i}{n_t}\right) \tag{6.9-5}$$

这个方程式实际具有 $(x/a) = \exp(x - a)$ 的形式，其中 $x = n_f/n_t, a = n_i/n_t$。所以，它可用图解法（或数值法）求解 n_f/n_i 作为 n_i/n_t 的函数关系，结果如图 6.32 所示。

注意到原来储存在反转分布的能量后来又转换成激光振荡的能量的分值为 $(n_i - n_f)/n_i$，它随着 n_i/n_t 的增加而趋于 1。

激光器的瞬时功率输出为 $P = \phi h\nu/t_c$，或，应用式（6.9-4）可得

$$P = \frac{h\nu}{2t_c}\left(n_t \ln\frac{n}{n_i} - (n - n_i)\right) \tag{6.9-6}$$

特别感兴趣的是峰值功率输出。若令 $\partial P/\partial n = 0$，会发现，当 $n = n_t$ 时，功率达到极大值。把 $n = n_t$ 代入式（6.9-6），则得到峰值功率为

$$P_p = \frac{h\nu}{2t_c}\left(n_t \ln\frac{n_t}{n_i} - (n_t - n_i)\right) \tag{6.9-7}$$

如果初始反转粒子数远远超过（高 Q 情形）阈值（即 $n_i \gg n_t$），由式（6.9-7）得

$$(P_p)_{n_i \gg n_t} \simeq \frac{n_i h\nu}{2t_c} \tag{6.9-8}$$

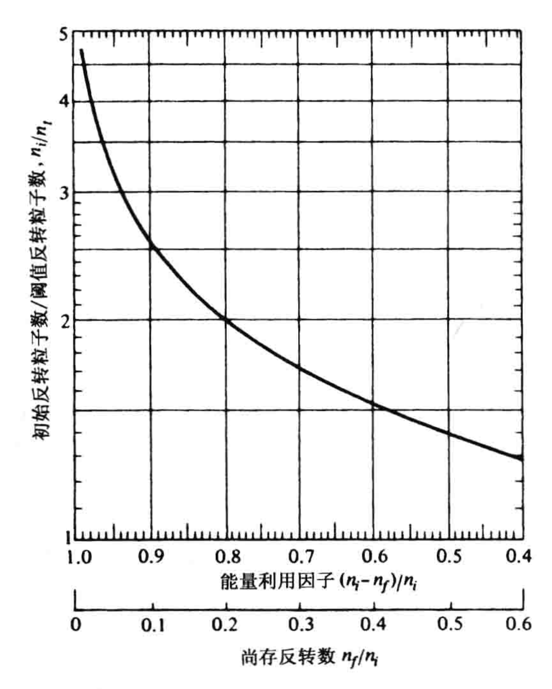


图 6.32　巨脉冲后的能量利用因子 $(n_i - n_f)/n_i$ 和尚存的反转粒子数（引自参考文献[30]）

因为在任意时刻的功率 P 与光子数 ϕ 的关系式是 $P = \phi h\nu / t_c$ ，所以由式（6.9-8）可知，共振腔内存储的光子数极大值是 $n_i/2$。这可以通过下列事实加以解释：如果 $n_i >> n_t$，脉冲在一个短于 t_c 时间内达到其峰值，因此在脉冲峰值 $n = n_t$ 时，由受激辐射产生的大部分光子依然存在于共振腔内。此外，因为 $n_i >> n_t$，所以这些光子数 $(n_i - n_t)/2$ 非常接近于 $n_i/2$。

方程式（6.9-2）和式（6.9-3）的典型数值解见图 6.33。

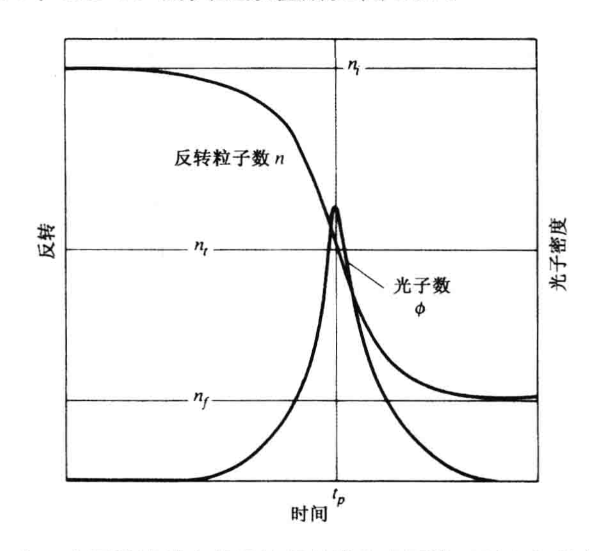


图 6.33　在一个巨脉冲期内的反粒子转数和光子数（引自参考文献[30]）

根据式（6.9-2）和式（6.9-3），脉冲开始时必须要使 $\phi_i \neq 0$ ，否则就会得到无意义的解

（$\phi=0$， $n=n_i$）。根据 t=0 时激光模接受立体角内自发发射的光子数目，不难估计出 ϕ_i 的适当值。从上面的讨论中还注意到，当 $n=n_t$ 时光子浓度达到峰值，也就是功率达到峰值。此时储存在共振腔内的能量（$\propto\phi$）为极大值，于是从较高到较低激光能级的受激跃迁使反转数继续不断减少最终达到 $n_f<n_t$。

式（6.9-2）和式（6.9-3）对应于不同初始反转值 n_i/n_t 时的数值解见图 6.34。注意到，当 $n_i>>n_t$ 时，脉冲的上升时间比 t_c 短，但是下降时间几乎与 t_c 相等。原因在于，在脉冲峰值处（图中坐标τ=0），受激辐射的过程基本上已经结束，此时所看到的输出是共振腔中光子自由衰减的结果。

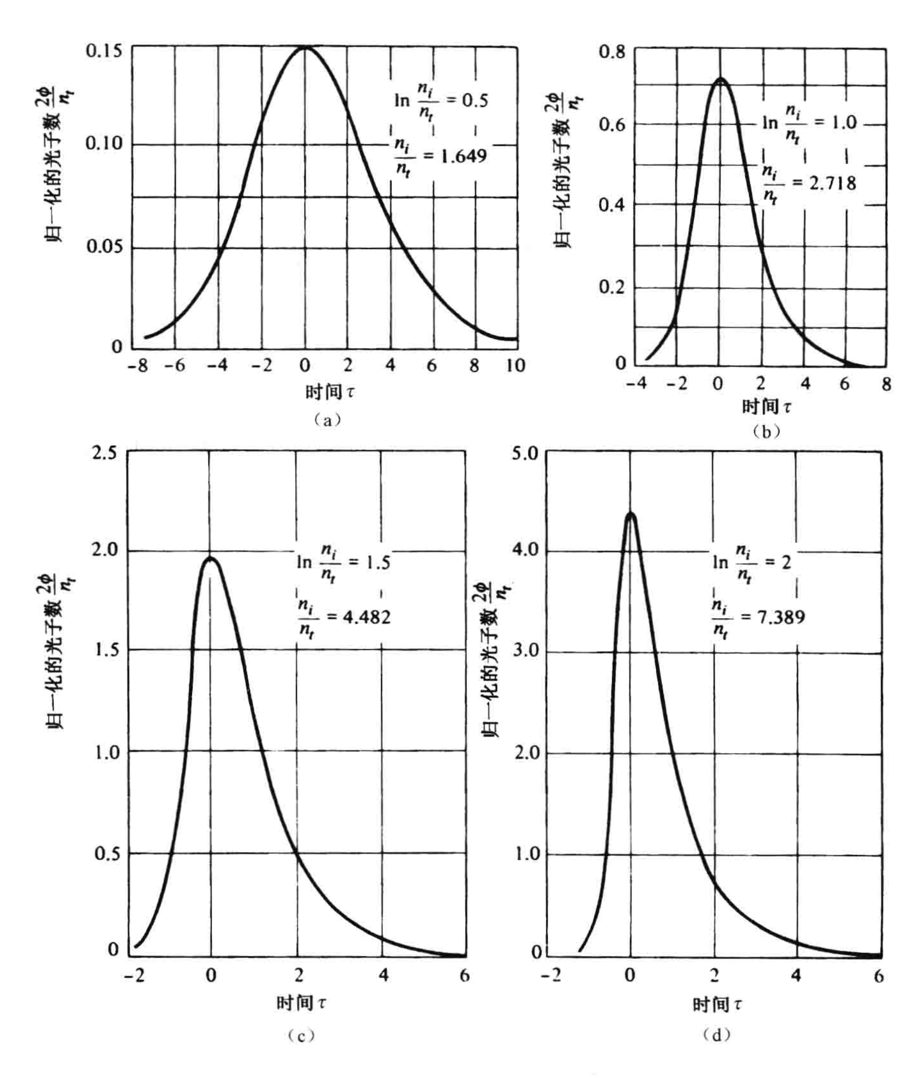


图 6.34　在巨脉冲的中心区光子数随时间的变化曲线，时间的量度单位为光子寿命（引自参考文献[30]）

图 6.35 所示为一巨脉冲的真实示波器图形。巨激光脉冲广泛应用于需要高功率和短脉冲宽度的场合，这些应用包括在下列方面的实验：非线性光学、测距、材料加工和钻孔、化学

反应的触发和等离子体诊断学。

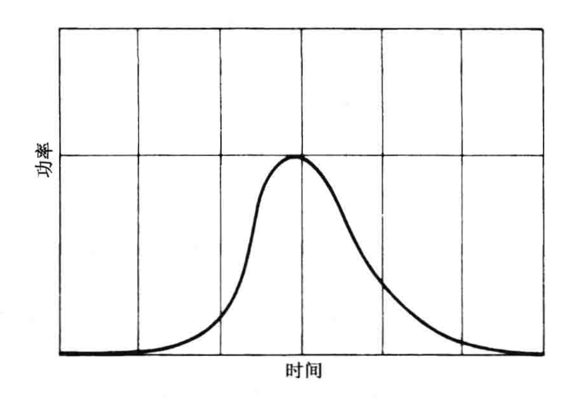


图 6.35　巨脉冲强度的示波器图形，时标为 20ns/div

例：巨脉冲红宝石激光器。

考虑一个含铬离子浓度 $N=1.58\times10^{19}\text{cm}^{-3}$ 的粉色红宝石的情况，其吸收系数取自图 6.24，与图中 R_1 线相应的 6943Å 处的值是 $\alpha\simeq0.2\text{cm}^{-1}$（在 300K 时），假设其他的特性参数如下：

$$l=\text{红宝石棒长}=10\text{cm}$$

$$A=\text{模的横截面积}=1\text{cm}^2$$

$$(1-R)=\text{单程强度损耗率}=20\%$$

$$n_0=1.78$$

根据式（5.6-19）指数损耗常数与（N_1-N_2）成正比，于是有

$$\alpha(\text{cm}^{-1})=0.2\frac{N_1-N_2}{1.58\times10^{19}} \tag{6.9-9}$$

在室温下，由于 $N_2\ll N_1, N_1-N_2\cong1.58\times10^{19}\text{cm}^{-3}$，则由式（6.9-9）给出的值是 $\alpha=0.2\text{cm}^{-1}$。增益系数可以直接由式（6.9-9）获得

$$\gamma(\text{cm}^{-1})=0.2\frac{N_2-N_1}{1.58\times10^{9}}$$

$$=0.2\frac{n}{1.58\times10^{9}V} \tag{6.9-10}$$

式中，n 为总反转粒子数，$V=AL$ 是以 cm^3 为单位的晶体体积。

当单程净增益等于 1 时达到阈值，它在下列情形下发生：

$$e^{\gamma_t l}R=1,\quad \text{或}\quad \gamma_t=-\frac{1}{l}\ln R \tag{6.9-11}$$

式中，下标 t 表示阈值条件。

将式（6.9-10）代入阈值条件式（6.9-11），再结合前面给出的数据可得

$$n_t=1.8\times10^{19} \tag{6.9-12}$$

假设初始反转粒子数是 $n_i=5n_t=9\times10^{19}$，可从式（6.9-8）求得峰值功率的近似值

$$P_p=\frac{n_i h\nu}{2t_c}=5.1\times10^{9}\text{W} \tag{6.9-13}$$

式中，$t_c=n_0 l/c(1-R)\simeq2.5\times10^{-9}\text{s}$。

总脉冲能量是

$$\mathscr{E} \sim \frac{n_i h\nu}{2} \sim 13\,\text{J}$$

而脉冲宽度（见图 6.34）$\simeq 3t_c \simeq 7.5\times10^{-9}$ s。

调 Q 的方法

下面介绍几种常用的调 Q 方法：

1. 将共振腔两个端面反射镜中的一个安装在旋转轴上，使每个旋转周期中仅有当两个反射镜面近乎平行时的瞬时损耗较小，而在其他时间损耗极高。

2. 在光学共振腔内放上一个饱和吸收剂（例如可漂白的染料）（见参考文献[10,11,34]），吸收剂的不透明度随光强的增加而降低（饱和）的特性避免了由于振荡的加强而产生快速的反转粒子数耗尽，这是因为在振荡初期缓慢增加的光强不足以使吸收达到饱和，吸收剂相当于一个高损耗，而在此期间内，随着光强的增加，损耗会下降。此效应就如同 Q 值增加一样，但不是那么突然。

3. 在光学共振腔内将一个电光晶体（或液态克尔盒）当成电压控制快门使用，它对损耗（Q）的控制比 1 和 2 中的方法更精确，其工作原理见图 6.36，下面将对它做更详细的讨论。而在电光晶体上加电压使其达到相位延迟控制的详细讨论见第 9 章。

在闪光灯对激光器进行泵浦的期间，在电光晶体上加一个电压，使其大小恰能在两个互相正交的分量（x' 和 y'）之间引起一个 $\pi/2$ 的相移（延迟），这两个分量正好组成线性偏振的激光场。在图中 f 点光离开电光晶体向右传播时是圆偏振的，经过右边的镜面反射后，光再一次穿过晶体，附加的相位延迟 $\pi/2$ 与前一次的相加形成一个总相位延迟 π，因而使 d 处射出的光束沿 y 方向偏振，因此受到偏振片的阻挡。

由此可见，加上电压时，损耗增大，从而避免了振荡。Q 开关的时间要同反转粒子数到达峰值的时间相重合，只要取消加在电光晶体上的电压，这个要求就可以实现。此时相位延迟为零，因此通过晶体时光波的偏振态不受影响，于是 Q 值又回复到与系统正常损耗有关的高数值。

6.10　多普勒增宽气体激光器中的烧孔效应和兰姆凹陷

本节讨论低压气体激光器中多普勒加宽造成的影响。

考虑一个原子，其跃迁频率为 $\nu_0 = (E_2 - E_1)/h$，其中 2 和 1 分别为激光器的高能级和低能级。平行于光传播方向的原子速度分量为 v，该分量值为

$$v = \frac{\boldsymbol{v}_{\text{原子}} \cdot \boldsymbol{k}}{k} \tag{6.10-1}$$

这里，电磁波的表达式是

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi\nu t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} \tag{6.10-2}$$

一个以匀速 $\boldsymbol{v}$ 运动的原子的位移是 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}t+\boldsymbol{r}_0$，它会遇到电场

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{\text{原子}} &= \boldsymbol{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[2\pi\nu t - \boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}t)]} \\ &= \boldsymbol{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(2\pi\nu - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_0]}\end{aligned} \tag{6.10-3}$$

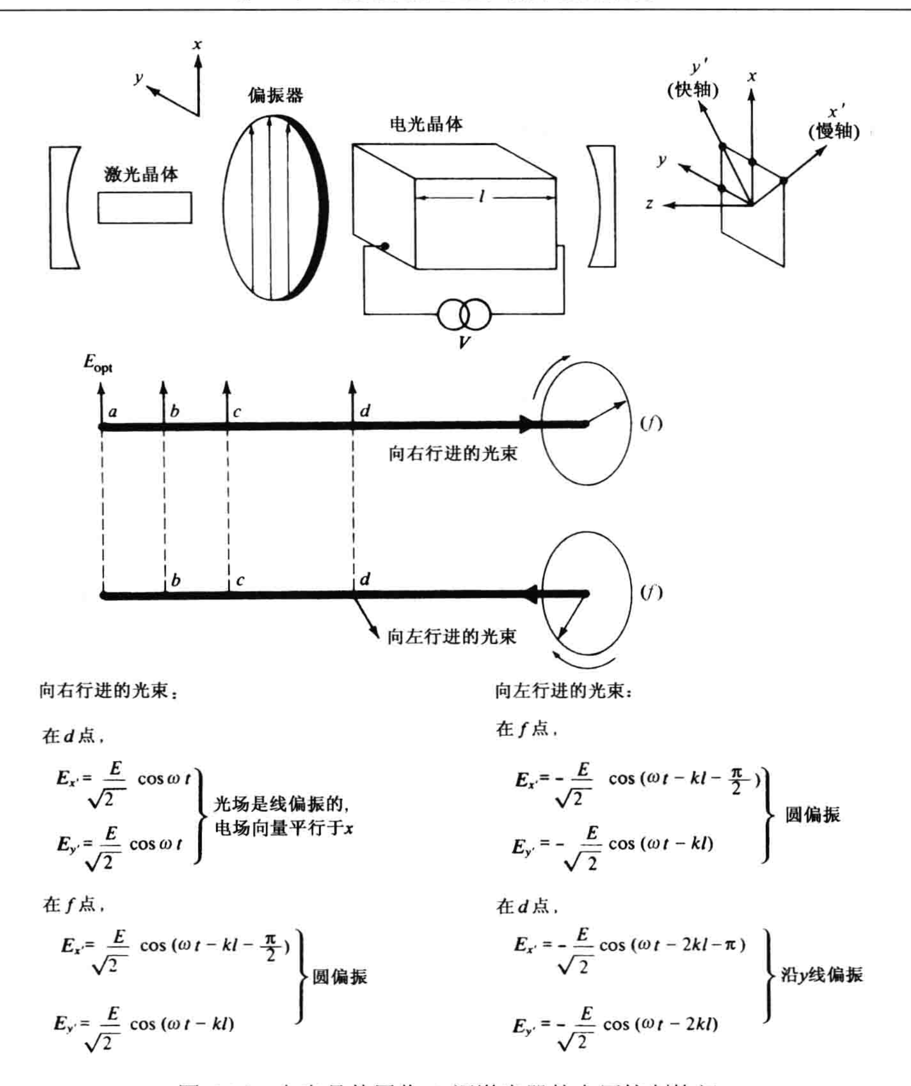


图6.36　电光晶体用作Q调激光器的电压控制快门

因而它将“观察到”多普勒频移

$$\nu_D = \nu - \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k}}{2\pi} = \nu - \frac{v}{c}\nu \tag{6.10-4}$$

在上面第二个等式中，令$n=1$，所以$k=2\pi\nu/c$，并应用了式（6.10-1）。

运动原子和电磁波之间相互作用（如发射或吸收）强度达到极大值的条件是原子“观察”的表观（多普勒）频率ν_D等于原子共振频率ν_0

$$\nu_0 = \nu - \frac{v}{c}\nu \tag{6.10-5}$$

或者也可以反过来说，波在传播过程中遇到一群原子、频率为ν的波将会“挑出”那些速度分量v满足下式的原子，并与他们发生最强的相互作用

$$\nu = \frac{\nu_0}{1-\frac{v}{c}} \approx \nu_0\left(1+\frac{v}{c}\right) \tag{6.10-6}$$

式中，近似是在 $v \ll c$ 时成立。

现在考虑一个在单一频率 ν 处振荡的气体激光器。为了明确起见，令 $\nu > \nu_0$。在激光器共振腔内频率为 ν 的驻波电磁场由两个向相反方向传播的波组成。首先考虑向正 x 方向传播的波（共振腔的轴沿 x 方向）。因为 $\nu > \nu_0$，由式（6.10-6），波会与 $v > 0$ 的原子相互作用，即这些原子的速度分量为

$$v_x = +\frac{c}{\nu}(\nu - \nu_0) \tag{6.10-7}$$

其次，相反方向传播（$-x$）的波也必须与朝同方向运动的原子发生作用，因此多普勒频移使 ν 降低到 ν_0，这些原子的速度分量为

$$v_x = -\frac{c}{\nu}(\nu - \nu_0) \tag{6.10-8}$$

由此可得到结论，在通常的双镜面激光振荡器中，由于场的驻波特性，一个给定的振荡频率只与两种速度类别的原子发生作用。

下面考虑一个在频率 $\nu > \nu_0$ 振荡的四能级气体激光器。在可忽略的低强度振荡情形和低气压下，根据式（5.5-11），激光器高能级处的原子速率分布函数为

$$f(v_x) \propto \mathrm{e}^{-Mv_x^2/2kT} \tag{6.10-9}$$

这里 $f(v_x)dv_x$ 表示与 x 速度分量处于 v_x 和 $v_x + dv_x$ 之间的原子数（在高能级处）成正比，随着振荡强度的增强，例如降低激光器的损耗，可预计 x 速度分量接近于 $v_x = \pm(c/\nu)(\nu - \nu_0)$，在高能级处的原子数会小于式（6.10-9）所给定的平衡值，这是因为这些原子发生了从能级 2 到 1 的向下跃迁，从而减少了能级 2 上的原子数目。结果在振荡条件下速度分布函数具有如图 6.37 所示的两个凹陷。

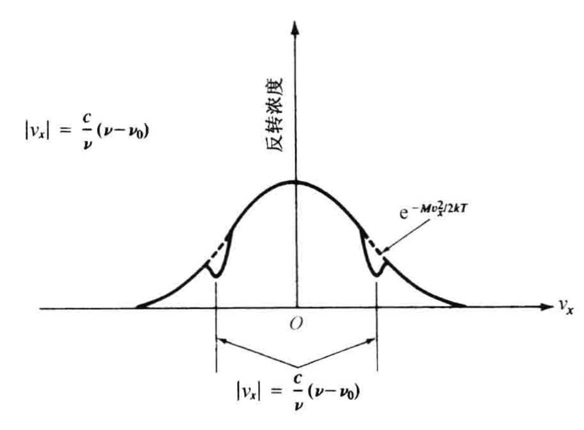


图 6.37　反转原子作为 v_x 函数的分布曲线。虚线与 $\exp(-Mv_x^2/2kT)$ 成正比，相当于场强为零时的情形。实线相当于有驻波场的情形，其中 $\nu = \nu_0/(1-v_x/c)$，或是 $\nu = \nu_0/(1+v_x/c)$

如果振荡频率 ν 等于 ν_0，只有一个“孔”位于反转原子的速率分布函数上，此“孔”位于 $v_x = 0$ 的中心处，因此可以预期激光振荡在 $\nu = \nu_0$ 处的功率输出比在 ν_0 左右两边略微偏离 ν_0 的频率处低（频率调节可以由移动激光器的镜面之一来实现）。这种功率的凹陷首先是由兰姆[20]预言的，后来在气体激光器中的被观察到[21]。He-Ne1.15 微米激光器的功率随频率变

化的实验曲线如图 6.38 所示。该现象称为“兰姆凹陷”，它在气体激光器的稳频操作中得到了应用[22]。

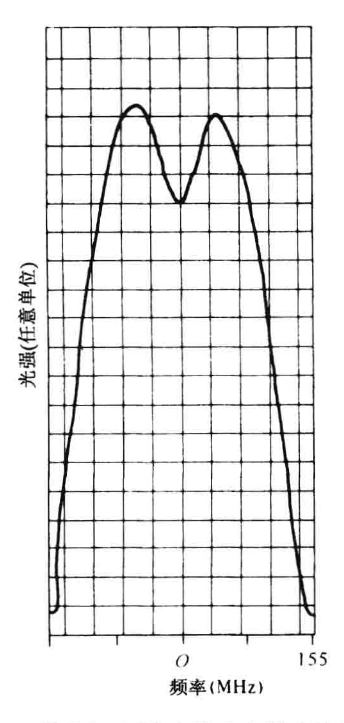


图 6.38　采用氖同位素的单模 1.15 微米氦-氖激光器功率输出随频率的变化曲线（引自文献[36]）

6.11　一些特殊激光器系统

在这一节中，讨论一些特殊激光器系统。不同类型的激光器，可用各种不同的方法将原子泵浦到较高的激光能级。将讨论一些较常见的激光系统，同时分析它们的泵浦机制。将涉及的激光系统包括 $Cr^{3+}:Al_2O_3$（红宝石），$Nd^{3+}:YAG$，Nd^{3+}：玻璃和 Er^{3+}：硅基激光器。半导体电流泵浦（或载流子注入）激光器，因其独特的科学技术上的重要性，留待第 15，16 章阐述。图 6.39 表示一个（假设的）具有代表性的激光器的泵浦—振荡过程。泵浦源把原子激发到激发态 3，然后原子再从该态弛豫到激光上能级 2。在能级 2 和能级 1 之间产生激光的受激跃迁，引起频率为 ν_{21} 的光子的发射。从图中可明显看出，对每一个放出的光子来说，最低的输入能量是 $h\nu_{30}$，所以该激光器的功率效率不能超过

$$\eta_{原子}=\frac{\nu_{21}}{\nu_{30}} \tag{6.11-1}$$

这个量称之为“原子的量子效率”。激光器的总效率取决于以下两个因素，其一是有效地将原子送入能级 3 的功率占总泵浦功率的比值；其二是泵浦的量子效率，即从能级 3 跃迁到能级 2 的原子数与原来处于能级 3 上原子数的比值。上述两个因子的乘积构成了光学泵浦的激光器效率的上限，其范围由固体激光器 Nd^{3+}:YAG 的 1%，到二氧化碳激光器的 30%，甚至对于 GaAs 结型激光器的近百分之百。在下面具体讨论激光器系统时再来考虑这些因素。不过，应当注意，根据式（6.11-1），在一个高效率的激光系统中 ν_{21} 和 ν_{30} 的数量级应该相同，

因此应该有低能级参与激光跃迁。

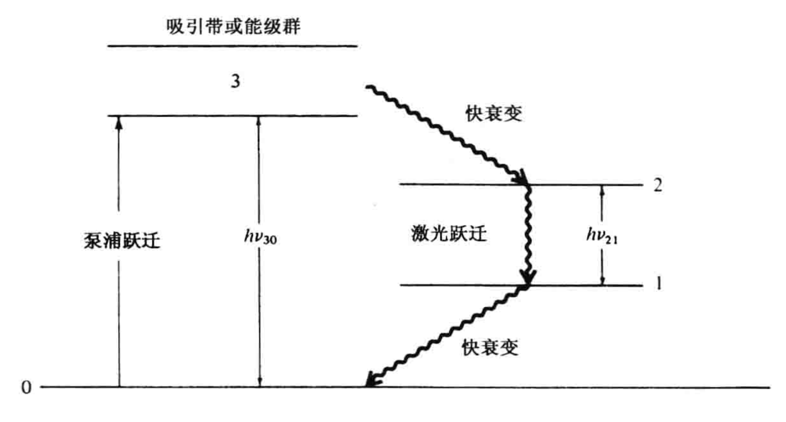


图 6.39　典型激光器的泵浦–振荡过程

这一节讨论到的激光器包括在透明的寄主材料如玻璃（SiO_2）或蓝宝石晶体（Al_2O_3）掺入微量的Cr、Nd或Er离子。在玻璃或晶体寄主中，这些有源的原子（离化的）的量子态被局域电场影响形成斯塔克分离或改变。为做进一步讨论，简要回顾一下量子态的标示法。对具有多个电子的原子，其量子态用量子数 L，S，J 表示。它们分别是电子的总的轨道角动量、总的自旋角动量和总的角动量。态可表示为

$$^{2S+1}L_J$$

其中，$2S+1$ 是给定一组（L,S）值时不同的 J 值的总数，假设了 $S \leqslant L$，一般情形下成立。总的角动量是总的轨道角动量与总的自旋角动量的矢量和。因此量子数 J 总限制在 $L-S$ 和 $L+S$ 之间。符号 L 表示轨道角动量，在表 6.3 中给出了相应的符号表示。对于每一个态 $^{2S+1}L_J$，相同的能量对应 $2J+1$ 个相互正交的子能级。例如，Er^{3+} 离子的基态表示为 $^4I_{15/2}$，对应于 $S=3/2$，$L=6$，$J=15/2$。$2S+1=4$ 表示相同的 L 和 S 对应 4 个态。这 4 个态是 $^4I_{9/2}$，$^4I_{11/2}$，$^4I_{13/2}$ 和 $^4I_{15/2}$。这些属于相同的多重态具有不同的总角动量 J，由于自旋-轨道互作用造成能量也不同。

表 6.3　电子态的符号表示

字母	$L=$
S	0
P	1
D	2
F	3
G	4
H	5
I	6
⋮	⋮

红宝石激光器

红宝石被证实是第一种[17]具有激光作用的材料，并且仍然是最有用的激光材料之一，其输出波长为 $\lambda_0 = 0.6943\mu m$。激光的激活粒子是掺在 Al_2O_3 晶体中的 Cr^{3+} 离子。典型的铬离子

的浓度大约是 0.05%（重量比）。三重离化的Cr 离子在 3d 态上有 3 个电子。这些没有配对的 d 电子形成高自旋的基态 $^4F(S=3/2)$。自由离子的第一激发态是 $^2G(S=1/2)$ 态，能量上比基态高 2eV。F 和 G 能级都具有高度轨道简并。F（L=3）能级对应 7 个轨道子能级，G（L=4）能级对应 9 个轨道子能级。在蓝宝石晶体（Al_2O_3）中的电场作用下，^4F 分离为三个态（$^4A_2, ^4T_2, ^4T_1$），^2G 分离为四个态（$^2E, ^2T_1, ^2T_2, ^2A_1$）。这样 $^4A_2$ 变为基态。在符号表示中，A 能级是一重简并，E 能级是二重简并，T 能级是三重简并。相应的能级图如图 6.40 所示。

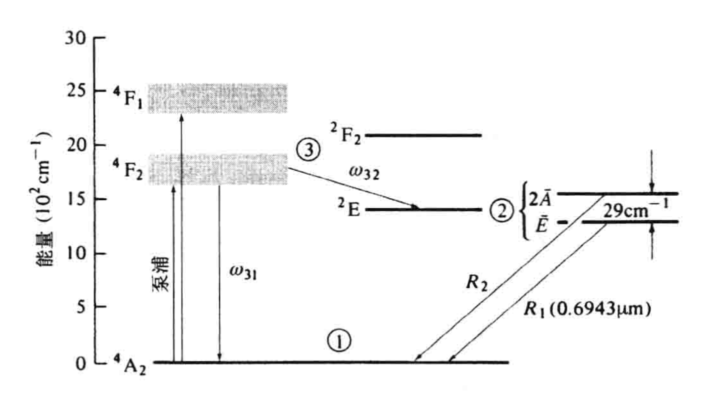


图 6.40　与红宝石激光器运行相关的能级图。单位 $1cm^{-1}$ 对应 $\nu=30GHz$ 或 $h\nu=1.24\times10^{-4}eV$（引自参考文献[38]）

红宝石激光器的泵浦通常采用强闪光灯（与摄影中所用的闪光灯类似）。频率相应于两个吸收带 $^4F_2(^4T_2)$ 和 $^4F_1(^4T_1)$ 的那部分光被吸收，从而使铬离子跃迁到这些能级中，接着离子就会在平均时间 $\omega_{32}^{-1}\cong5\times10^{-8}s$[38]内衰减到激光上能级 ^2E。能级 ^2E 由两个分离的能级 $2\bar{A}$ 和 $\bar{E}$ 组成，其间隔为 $29cm^{-1}$（由于自旋-轨道互作用）。这里的单位 $1cm^{-1}$（波数）等价为 $\nu=30GHz$ 或 $h\nu=1.24\times10^{-4}eV$。它亦可以用来作为能量来度量，$1cm^{-1}$ 相当于 $\nu=30GHz$ 的光子的能量 $h\nu$。这两个较低的能级中，$\bar{E}$ 是激光上能级。激光下能级是基态，所以按照本节前面的讨论，红宝石激光器是三能级激光器。原子在激光上能级 $\bar{E}$ 处的寿命是 $t_2=3\times10^{-3}s$，每一个衰变都导致一个光子的自发发射，所以 $t_2=t_{自发}$。

光场相对于（光）轴 c 有两种典型取向的红宝石的吸收光谱，如图 6.41 所示。两个主波峰相应于有用能带 $^4F_2$和 $^4F_1$ 的吸收，这是引起红宝石激光器特征颜色的原因。纵坐标用吸收系数 α 和跃迁截面 σ 来表示，跃迁截面被定义为单位体积中单位反转的吸收系数，因此它具有面积的量纲。根据这个定义，$\alpha(\nu)$ 由下式给出

$$\alpha(\nu)=(N_1-N_2)\sigma(\nu) \tag{6.11-2}$$

图 6.42 所示为靠近激光器发射波长处较详细的吸收曲线。图 6.43 所示为激光跃迁宽度 $\Delta\nu$ 随温度而变化的函数关系曲线。室温下 $\Delta\nu=11cm^{-1}$（或 $3.3\times10^{11}Hz$）。可用红宝石为例对固体激光器所用的光学泵浦的一些考虑因素做些说明。图 6.44 表示红宝石等光学泵浦的激光器的典型装置。螺旋闪光灯围绕着红宝石棒，通过储存在灯管两端的电容器组中的电荷放电对闪光灯提供激励。

闪光灯的典型输出脉冲宽度 $t_{闪光}=5\times10^{-4}s$。为了简单起见，假设闪光灯脉冲随时间呈矩形变化，脉冲宽度为 $t_{闪光}$。它在晶体表面上单位面积、单位频率（频率为 ν 处）产生的光通

量为 $s(\nu)$ W。如果晶体的吸收系数是 $\alpha(\nu)$，那么晶体单位体积内吸收的总能量是

$$t_{闪光}\int_0^{\infty} s(\nu)\alpha(\nu)\mathrm{d}\nu$$

其中，假设穿过晶体的总吸收量很小，所以 $s(\nu)$ 可以看成与晶体的距离无关。

如果吸收量子效率（吸收一个频率为 ν 的泵浦光子引起一个原子跃迁到激光上能级的几率）是 $\eta(\nu)$，则泵浦到能级 2 的单位体积内的原子数为

$$N_2 = t_{闪光}\int_0^{\infty} \frac{s(\nu)\alpha(\nu)\eta(\nu)}{h\nu}\mathrm{d}\nu \tag{6.11-3}$$

因为处于能级 2 上的原子寿命 $t_2 = 3\times10^{-3}$ s，比闪光脉冲持续时间（约 5×10^{-4} s）长得多，所以可以忽略在闪光脉冲时间内能级 2 的自发衰减数目，故 N_2 就代表闪光后能级 2 上的粒子数。

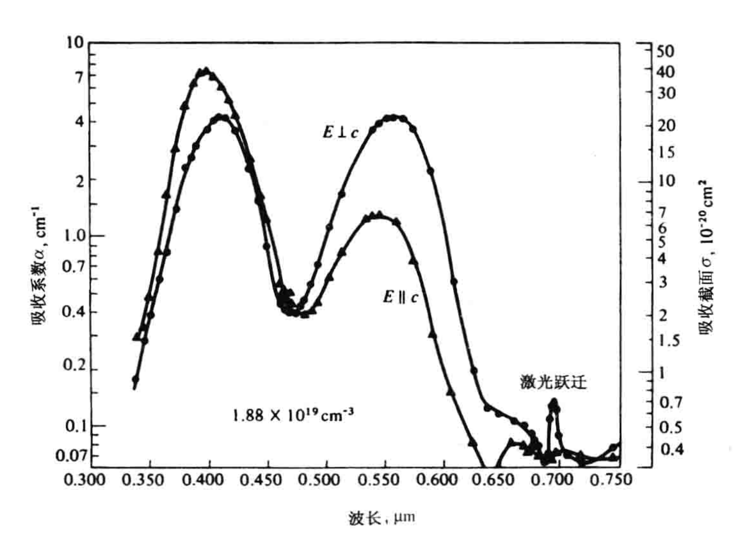


图 6.41　对于 $E//c$ 和 $E\perp c$ 两种情形，吸收系数和吸收截面随波长的变化。数据是在 300K 时对铬离子平均浓度为 $1.88\times10^{19}\mathrm{cm}^{-3}$ 的粉色红宝石的透射率测量而得出的（引自文献[39]）

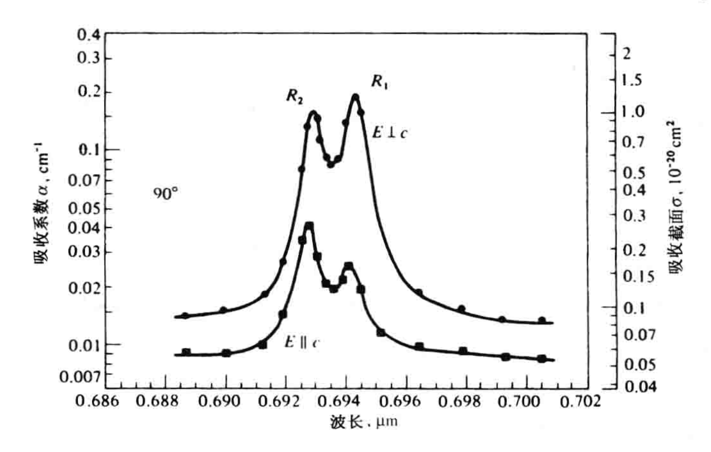


图 6.42　对于 $E//c$ 和 $E\perp c$ 两种情况，吸收系数和吸收截面随波长的变化曲线。被测样品为粉色红宝石棒，其 c 轴相对于棒轴成 90° 取向，铬的浓度为 $1.58\times10^{19}\mathrm{cm}^{-3}$（引自参考文献[39]）

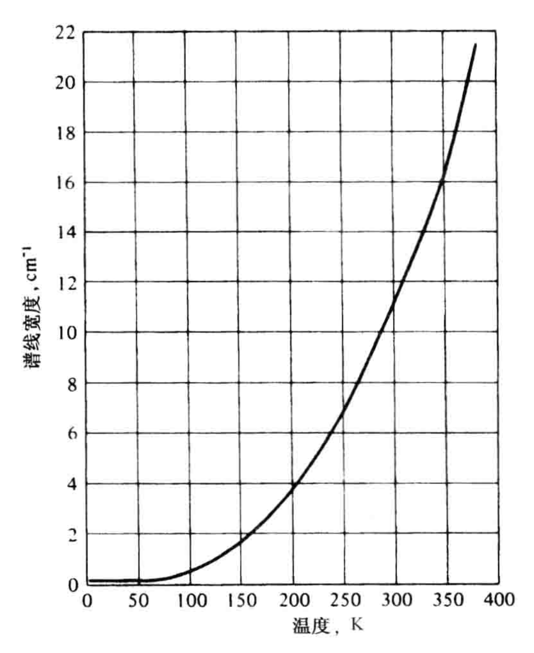


图 6.43　红宝石 R_1 线的谱线宽度随温度而变化的关系曲线（引自文献[40]）

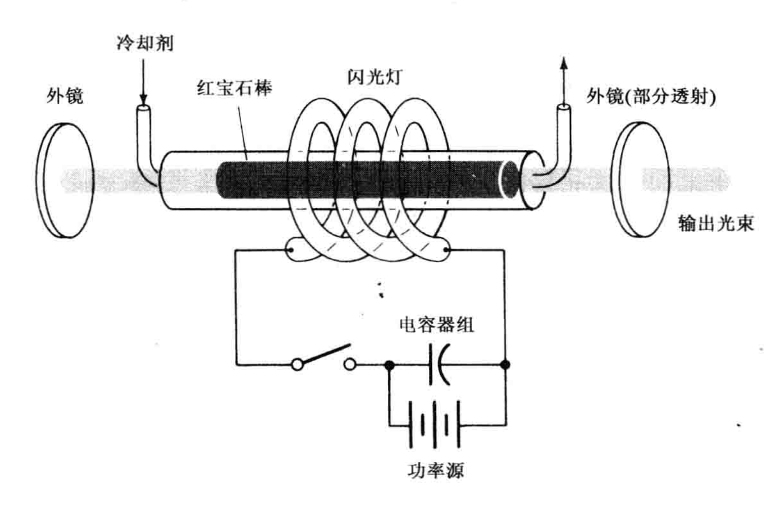


图 6.44　用闪光灯泵浦并具有外反射镜的脉冲红宝石激光器的典型装置

例：闪光灯泵浦的脉冲红宝石激光器。

考虑一个具有以下参量的红宝石激光器：

$$N_0 = 2\times10^{19}\,\text{atoms/cm}^3 \quad（铬离子）$$

$$t_2 = t_{自发} = 3\times10^{-3}\,\text{s}$$

$$t_{闪光} = 5\times10^{-4}\,\text{s}$$

如果将有用的吸收限定在比较窄的光谱范围内，将式（6.11-3）近似写成

$$N_2 = \frac{t_{闪光}\,\overline{s(\nu)}\,\overline{\alpha(\nu)}\,\overline{\eta(\nu)}\,\overline{\Delta\nu}}{h\overline{\nu}} \qquad (6.11\text{-}4)$$

其中，的横线代表在有用的吸收区域内的平均值，该区域的宽度是 $\overline{\Delta\nu}$。

由图 6.41 得到两个中心峰值之间的平均吸收系数 $\overline{\alpha(\nu)} \cong 2\text{cm}^{-1}$。因为红宝石为三能级激光器，根据式（6.3-2）高能级的浓度是 $N_2 \sim N_0/2 = 10^{19}\,\text{cm}^{-3}$。用 $\bar{\nu} \cong 5\times10^{14}\,\text{Hz}$，$\overline{\eta(\nu)} \cong 1$，由式（6.11-4）得

$$\bar{s}\,\overline{\Delta\nu}t_{\text{闪光}} \cong 1.5\text{J/cm}^2$$

这就是为了达到阈值反转，在有效吸收区域中晶体表面每平方厘米所必须入射的泵浦能量。为了计算入射到晶体上的闪光灯总能量，还必须了解闪光灯输出的光谱特性，这种光谱输出特性的典型数据如图 6.45 所示。放电汞灯的大部分输出是在红宝石的有效吸收区（4000 Å 和 5500 Å 附近）内。假设有效吸收占闪光输出的 10%来估算，实际照射到晶体上的灯光占输出的 20%，而且由电光能量的转换效率为 50%，那么在激光器表面，每平方厘米输入闪光灯所需的阈值电能为

$$\frac{1.5}{0.1\times0.2\times0.5} = 150\text{J}/\text{cm}^2$$

以上只是一个极其粗略的估计，其目的不仅是为了告诉如何对激光器泵浦做数量级的估计，而且能作为一个例子来说明用快捷的估算可区分一些切实可行的概念和不合实际的空想。

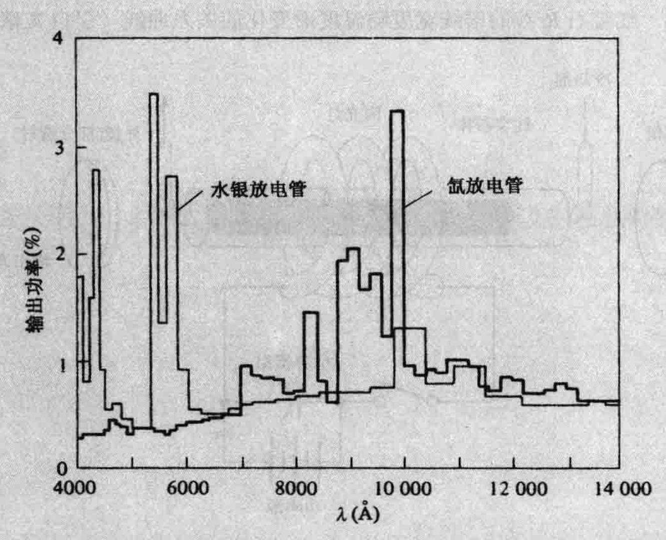


图 6.45　两种常用高气压放电灯的光谱特性。曲线表示在 0.4 μm 到 1.4 μm 的波长范围内，每一波长间隔（大约为 200 Å）内的闪光灯输出功率与输入电功率之比。（引自文献[41]）

Nd^{3+}:YAG 激光器

利用三价钕离子（Nd^{3+}）作为杂质掺入钇铝石榴石（$YAG = Y_3Al_5O_{12}$）中的激光器是最重要的激光系统之一，见参考文献[42，43]。在室温下激光发射波长为 $\lambda_0 = 1.064\ \mu\text{m}$，其相应的能级如图 6.46 所示。激光下能级在基态上面 $E_2 = 2111\text{cm}^{-1}(0.026\text{eV})$ 处，所以室温下处于这一能级上的浓度为基态的 $\exp(-E_2/kT) = \text{e}^{-10}$ 倍，这是可以忽略的。因而 $Nd^{3+}:YAG$ 符合对四能级激光器的定义。

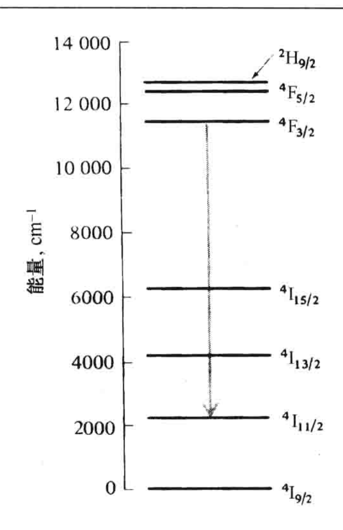


图 6.46　在钇铝石榴石中，钕离子 Nd^{3+} 的能级图（引自文献[42]）。这里的单位 $1cm^{-1}$（波数）等价为 $\nu = 30GHz$ 或 $h\nu = 1.24\times10^{-4}eV$

图 6.47 表示激光器跃迁的自发辐射光谱。室温下增益谱线宽度是 $\Delta\nu = 6cm^{-1}(180GHz)$，测量所得的激光器跃迁的自发辐射寿命[43]为 $t_{自发}=5.5\times10^{-4}$ s。室温下激光跃迁中心处的截面为 $\sigma = 9\times10^{-19}cm^2$，将这个数值与红宝石的 $\sigma = 1.22\times10^{-20}cm^2$（见图 6.42）进行比较，可以预料到，在给定的反转条件下，Nd^{3+} : YAG 的光学增益常数 γ 约是红宝石的 75 倍，这致使它的振荡阈值十分低，并且可以解释这种激光器比红宝石激光器容易连续（CW）工作的原因。

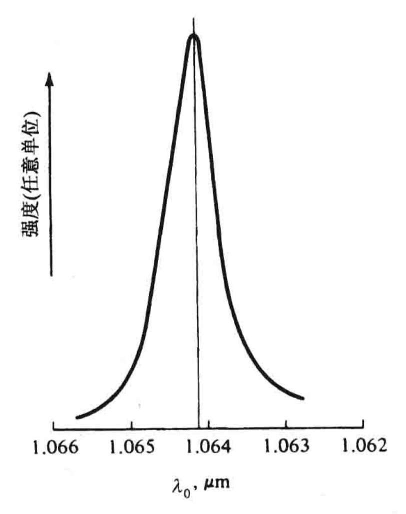


图 6.47　在 YAG 中 Nd^{3+} 在激光跃迁波长 $\lambda_0 = 1.064\mu m$ 附近的自发辐射谱（引自文献[43]）

造成激光上能级上粒子数增加的吸收发生在 13 000 到 25 000 cm^{-1} 之间的几个的吸收带中。这里的单位 $1cm^{-1}$（波数）对应 $\nu = 30GHz$ 或 $h\nu = 1.24\times10^{-4}eV$。

例：$Nd^{3+}:YAG$ 激光器的阈值。

脉冲工作的阈值

首先估计激励 $Nd^{3+}:YAG$ 激光器发出的激光脉冲所需的能量，以便与红宝石的情形相比较。引用下列数据

$$\left.\begin{aligned} &l = 20\text{cm}(\text{光学谐振腔长度}) \\ &L = 4 = (\text{单程损耗}) \end{aligned}\right\} \quad t_c = \frac{nl}{Lc} = 2.5\times10^{-8}\text{s}$$

$$n = 1.8$$

$$\Delta v = 6\text{cm}^{-1}(= 6\times3\times10^{10}\text{Hz})(1\text{cm}^{-1} = 30\text{GHz})$$

$$t_{\text{自发}} = 5.5\times10^{-4}\text{s}$$

$$\lambda = 1.06\mu\text{m}$$

将这些数据代入式（6.1-18）得

$$N_t = \frac{8\pi n^3 t_{\text{自发}}\Delta v}{ct_c\lambda^2} \cong 1.7\times10^{15}\text{cm}^{-3}$$

假设 5%的激励光能位于有用的吸收带内，并且其中百分之五的光真正能被晶体吸收，激光频率与泵浦频率之比平均为 0.5，闪光灯的效率（光学输出/电学输入）是 0.5，那么可以得

$$E_{\text{灯}} = \frac{N_t h v_{\text{激光}}}{5\times10^{-2}\times5\times10^{-2}\times0.5\times0.5} \cong 0.3\text{J}/\text{cm}^3$$

这个值就是在阈值时闪光灯的输入能量。将这个值与红宝石表面上每平方厘米需要 150J 的能量相比是很有趣的。对于适当尺寸的晶体（例如长= 5cm，半径= 2mm），求得 $E_{\text{灯}} = 0.19\text{J}$。曾估计红宝石的阈值比 $Nd^{3+}:YAG$ 大三个数量级，上述结果符合此估计。

连续工作的阈值

临界荧光功率——即稍低于阈值时自发辐射所实际发出的功率——由式（6.3-4）得出

$$\left(\frac{P_s}{V}\right) = \frac{N_t h v}{t_{\text{自发}}} \cong 0.34\text{W}/\text{cm}^3$$

取晶体的直径为 0.25cm，长度是 3cm，并采用与第一部分中相同的效率因子，就可以估算出闪光灯的阈值输入功率为

$$P_{\text{灯}} = \frac{0.34\times(\pi/4)\times(0.25)^2\times3}{5\times10^{-2}\times5\times10^{-2}\times0.5\times0.5} \cong 81\text{W}$$

该值与实验值基本一致[42]。图 6.48 表示一个连续工作的固体激光器的典型装置。高度抛光的椭圆柱面聚光腔将放在椭圆柱面聚光腔的一个焦轴上的灯所发出的光会聚到放在它另一个焦轴上的激光棒上。这种结构能保证大部分灯光通过激光棒。反射镜（对于激光共振腔）置于聚光腔外面。

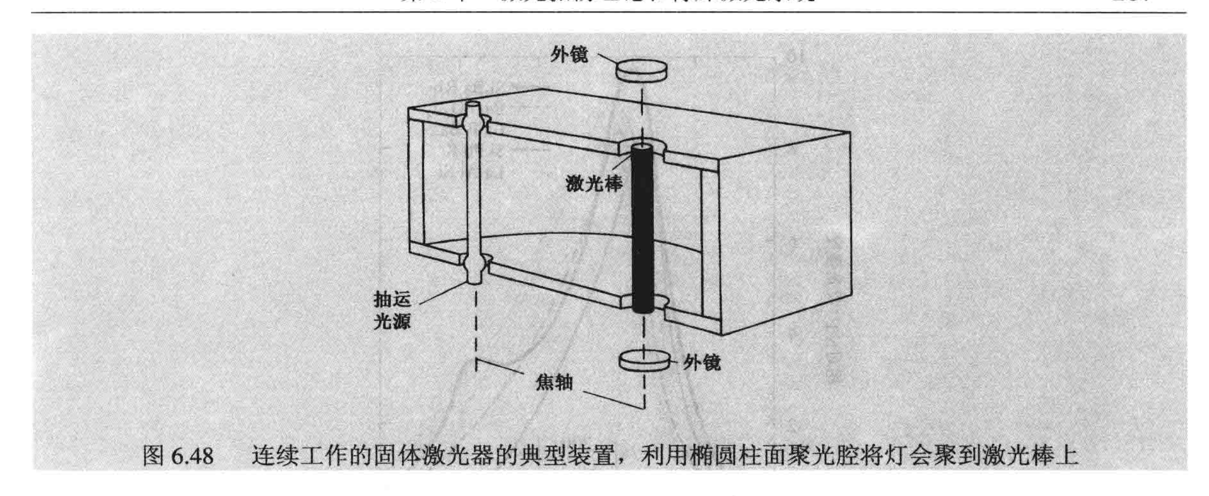


图 6.48　连续工作的固体激光器的典型装置，利用椭圆柱面聚光腔将灯会聚到激光棒上

掺钕玻璃激光器

另一种重要的激光器系统是由 Nd^{3+}离子作为杂质掺入玻璃中而形成[44]的。图 6.49 表示在一个典型的玻璃激光器中激光跃迁的能级图。激光器的发射波长是 λ =1.059 μm，其下能级大约位于基态上面 1950 cm^{-1}（0.24eV）之处。与上面提到 Nd^{3+} : YAG 的情形一样，这也是一个四能级激光器，因此在激光下能级上的热平衡粒子数是可以忽略不计的。图 6.50 表示在 λ_0 =1.06 μm 附近的荧光发射，可以直接测量出荧光谱线宽度，图中所示几种玻璃的谱线宽度约为 300 cm^{-1}(9THz)，该宽度约为 Nd^{3+} : YAG 的 50 倍，这是因为玻璃的非晶态结构使得不同的 Nd^{3+} 离子“看”到的四周环境略微不同，所以能量也会有少许差别。结果，不同离子以略微不同的频率辐射，就形成了自发辐射光谱的增宽。这是非均匀增宽的一个很好的例子。图 6.51 所示为激励该激光能级的吸收能带。其中，在任意一个能带上，吸收光子将激励原子进入激光上能级的概率（即吸收量子效率）估计[44]为 0.4。

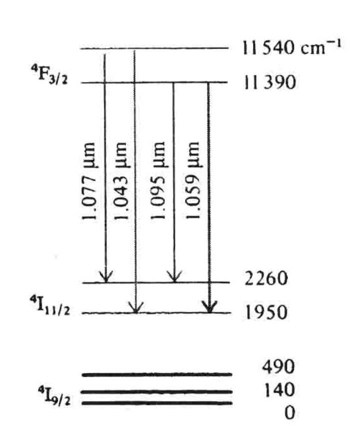


图 6.49　掺钕的硅酸铷，钾，钡玻璃的基态及与 1.059 μm 附近参与激光发射的能态的能级图。这里的单位 1cm^{-1}（波数）对应 ν = 30GHz 或 $h\nu = 1.24\times10^{-4}$eV（引自文献[44]）

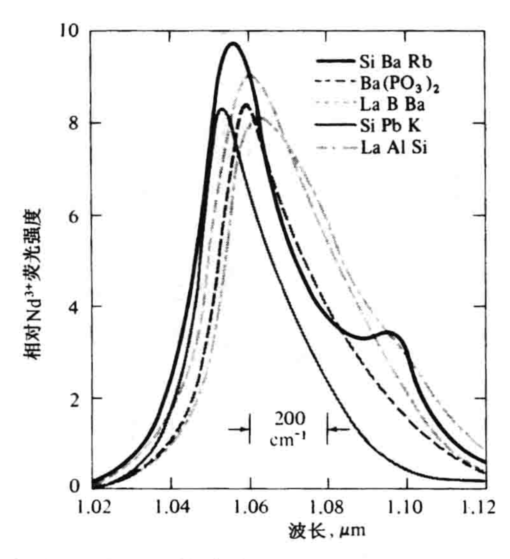


图 6.50　在 300K 时，各种不同组成的掺钕玻璃 1.06 μm 处的荧光发射光谱（引自文献[44]）

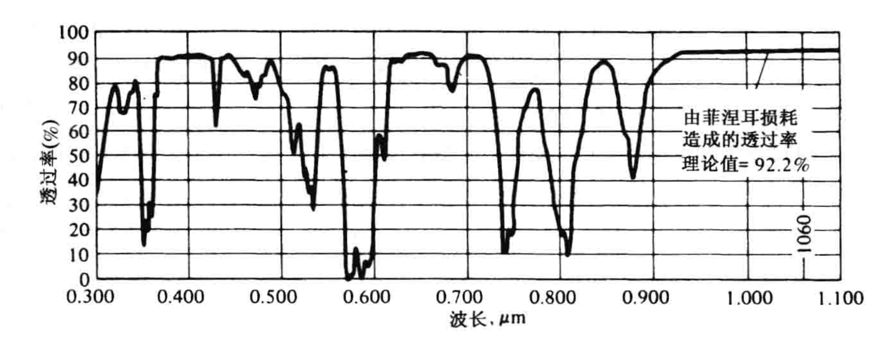


图 6.51　掺钕玻璃的吸收光谱，玻璃厚度为 6.4mm，其组成成分为：66% SiO_2（重量比，下同）；5%Nd_2O_3；16%Na_2O；5%BaO；2%Al_2O_3 和 1%Sb_2O_3（引自文献[44]）

激光上能级的寿命 t_2 与玻璃以及 Nd^{3+} 的浓度有关。图 6.52 表示在两种玻璃中它随浓度变化的曲线。

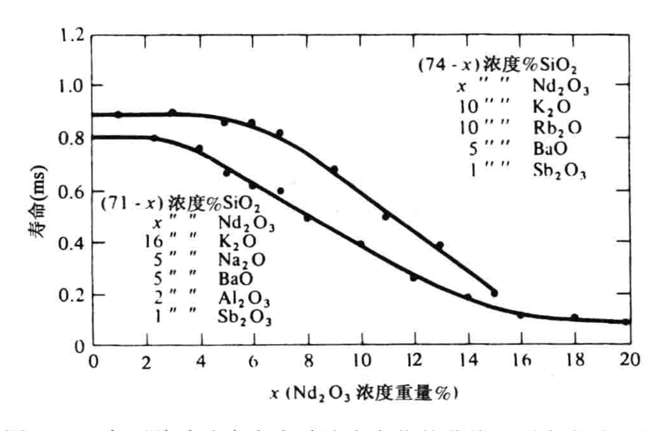


图 6.52　在两种玻璃中寿命随浓度变化的曲线（引自文献[8]）

例：连续工作和脉冲工作的 Nd^{3+} 玻璃激光器的阈值。

首先用下列数据来估计连续工作（CW）的掺钕玻璃激光器的阈值：

$$\Delta\nu = 200\text{cm}^{-1}\text{（或}\Delta\nu = 6\text{THz 见图6.50）}$$

$$n = 1.5$$

$$t_{\text{自发}} \sim t_2 = 3\times10^{-4}\text{s}$$

$$\left.\begin{aligned} l &= \text{谐振腔长} = 20\text{cm} \\ L &= \text{单程损耗} = 4\% \end{aligned}\right\} \; t_c \cong \frac{nl}{Lc} = 5\times10^{-8}\text{s}$$

用式（6.1-18）可得临界反转浓度

$$N_t = \frac{8\pi n^3 t_{\text{自发}}\Delta\nu}{ct_c\lambda^2} = 9.05\times10^{15}\ \text{atoms/cm}^3$$

因此，工作物质体积 $V = 1\text{cm}^3$ 晶体中，阈值时的荧光功率 P_s [见式（6.3-5）]为

$$P_s = \frac{N_t h\nu V}{t_{\text{自发}}} = 5.65\text{W}$$

假设：（a）只有百分之十的泵浦光处于有效吸收带内；（b）由于光学耦合的效率低以及晶体相对来说是透明的，在吸收能带中只有 10%的光源能量真正被吸收；（c）吸收量子效率是 40%；（d）平均泵浦光频率是激光辐射频率的两倍。于是，在阈值时泵浦灯的输出功率为

$$\frac{2\times5.65}{0.1\times0.1\times0.4} = 2825\text{W}$$

如果灯源的电光能量转换效率是百分之五十，则求得连续工作激光器所需要的输入功率约为 5kW。这一功率数值与 Nd:YAG 激光器约 100W 的阈值功率相差很大，因此解释了为什么掺钕玻璃激光器不能连续工作的原因。

若考虑受闪光灯激励的掺钕玻璃激光器在脉冲条件下工作，必须估计在阈值下激励该激光器所需的最低能量。假设损耗（大部分来自输出镜面的透射率）为 $L = 20\%$（因为闪光灯可以提供较高的泵浦率，最佳耦合条件要求比连续工作情形下有更大的镜面透射率）。则对 N_t 的重新计算得

$$N_t = 9.05\times10^{16}\text{atoms/cm}^3$$

将 N_t 个原子激励进入能级 2 所需的最低能量是

$$\frac{E_{\text{最小}}}{V} = N_t(h\nu) = 1.7\times10^{-2}\text{J/cm}^3$$

假设晶体体积 $V = 10\text{cm}^3$，引用上述与连续条件相同的效率因子，则在阈值时闪光灯的输入能量是约 $2\times1.7\times10^{-2}\times10/(0.1\times0.1\times0.4) = 85\text{J}$，具有上述类似特性的典型的掺钕玻璃激光器所需的阈值输入能量约为 $150 \sim 300\text{J}$。

Er^{3+}：硅基激光器

除了钕原子，许多地球上稀有元素的原子可作为掺杂剂掺入玻璃或晶体。这些激活成分可在外光源的泵浦下形成粒子数反转。这些地球上稀有元素的原子能态分别对应了不同的应用范围。在光纤通信领域，主要光谱范围在波长为 $\lambda = 1550\text{nm}$，其中最重要的一种激光系统是掺铒硅基光纤[45~50]，工作在 $\lambda = 1.54\text{~}1.55\mu\text{m}$ 波段。上述光纤在 $\lambda = 0.98\mu\text{m}$ 或 $\lambda = 1.48\mu\text{m}$ 被

激励，在光纤通信系统中用做内嵌式的光放大器，具有大多数激光系统的基本特征[47]。如果掺铒硅基光纤放置在光学共振腔内就可得到振荡。通常在上述光纤的两端采用光纤布拉格光栅（FBGs）从而获得上述功能。光纤布拉格光栅用做激光共振腔的端面反射镜。光纤布拉格光栅的光学性质将在第 12 章中讨论。

典型的掺铒硅基光纤激光器中涉及激光跃迁的能级如图 6.53 所示。Er^{3+} 是稀有的镧系元素。铒离子 Er^{3+} 在 4f 轨道上有 11 个电子。由于 $^4I_{15/2}$ 态和 $^4I_{13/2}$ 态之间的跃迁对应非常宽的增益带宽，利用 Er^{3+} 的跃迁是在 1.5μm 的谱范围的激射和放大的基本选择。在寄主介质中，铒离子的所有多重结构的 2J+1 个分量都是分立的，并由于周围受硅基玻璃（SiO_2）中相邻的氧离子的扰动作用（斯塔克效应等），各分立的分量均匀展宽。每一个铒离子周围随机的分布造成上述这些分量对应的子能级由于非均匀增宽因素进一步展宽。这就导致非常宽的增益带宽，这在宽带光通信中是必须的。在掺铒光纤的吸收谱中有两个强吸收峰，分别由 $^4I_{15/2} \to {}^4I_{11/2}$ 和 $^4I_{15/2} \to {}^4I_{13/2}$ 跃迁对应 1480nm 和 980nm。在激光上能级 $^4I_{13/2}$ 的原子寿命是 $t_2 = 10.2 \times 10^{-3}\text{s}$。每一次衰减产生光子（自发）辐射，所以 $t_2 = t_{自发}$。因为激光出射涉及的激光下能级时基态，所以掺铒硅基光纤激光器属三能级系统（类似于红宝石激光器）。这样，这种光纤激光器要得到增益需要相对高的泵浦。这个问题可通过光纤几何结构的设计得到改善，其中泵浦光在纤芯终于激射光耦合传输。

没有光纤布拉格光栅的掺铒光纤在通信网中可作为在线光放大器。在 17 章中将对掺铒光纤放大器（EDFA）作较详细的讨论。

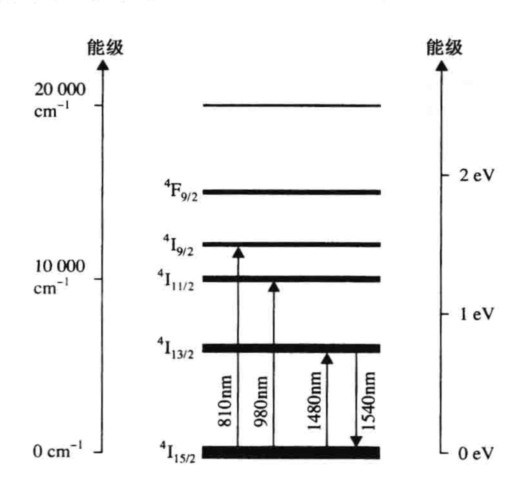


图 6.53　Er^{3+} 离子的能级和主要的跃迁。这里的单位 1cm^{-1}（波数）等价为 $\nu = 30\text{GHz}$ 或 $h\nu = 1.24 \times 10^{-4}\text{eV}$

6.12　频率谱和光频的计量

在 6.6 节讨论的锁模激光器能产生超短光脉冲序列。这些光脉冲形状相同在时间（或空间）间隔相同。这些周期脉冲是激光共振腔通过有源或无源的锁模方式模式振荡耦合的结果。可证明锁模激光器的输出光束可表示为

$$E(t)=\sum_{m} C_m e^{i[(\Omega_0+m\Omega)t+\phi_m]} \tag{6.12-1}$$

式中，Ω 是纵模的角频率间隔，C_m 是第 m 个模式的振幅，ϕ_m 是第 m 个模式的相位（m=整数）。求和包括所有振荡模式，Ω_0 是参考频率。在式（6.12-1）中假设共振腔的振荡频率为

$$\omega_m=\Omega_0+m\Omega \tag{6.12-2}$$

式中，m 是整数，纵模间隔 Ω 表示为

$$\Omega=2\pi\frac{c}{2n_g l} \tag{6.12-3}$$

式中，l 是共振腔的长度，n_g 是群折射率。在有源锁模中，选择调制频率等于 Ω。在这个频率上调制导致振荡模式间的耦合。

当存在群速度色散（n_g 与 ω 有关）时，模式间隔略随 ω 变化。在这样的情形下，选择调制频率等于整个增益谱范围内的模式间隔的平均值。当锁模发生时，振荡模式间的耦合导致振荡的"实际频率"被锁定在式（6.12-2）给定的频率。换句话说，频率仍精确地等间隔，即使共振腔内的模式分布不等间隔。这样，场的包络在时间上是周期分布的，其周期为 $\tau\equiv 2\pi/\Omega=2l/v_g=2n_g l/c$，这个周期值是共振腔内锁模脉冲一次往返的渡越时间值。按照式（6.6-5），可写为

$$\begin{aligned}E(t+\tau)&=\sum_{m} C_m \exp\left\{i\left[(\Omega_0+m\Omega)\left(t+\frac{2\pi}{\Omega}\right)+\phi_m\right]\right\}\\&=E(t)\exp(i2\pi\Omega_0/\Omega)\end{aligned} \tag{6.12-4}$$

注意到 $E(t+\tau)$ 与 $E(t)$ 相等，除非常数相位因子为 $\Delta\phi=2\pi\Omega_0/\Omega$。既然一般情形下 Ω_0 不是 Ω 的整数倍，在 $t=\tau$ 时的相移不是 2π 的整数倍。这样，实际电场的峰值不与包络的峰值重合。图 6.54 表示了周期脉冲序列和相应的频率谱。

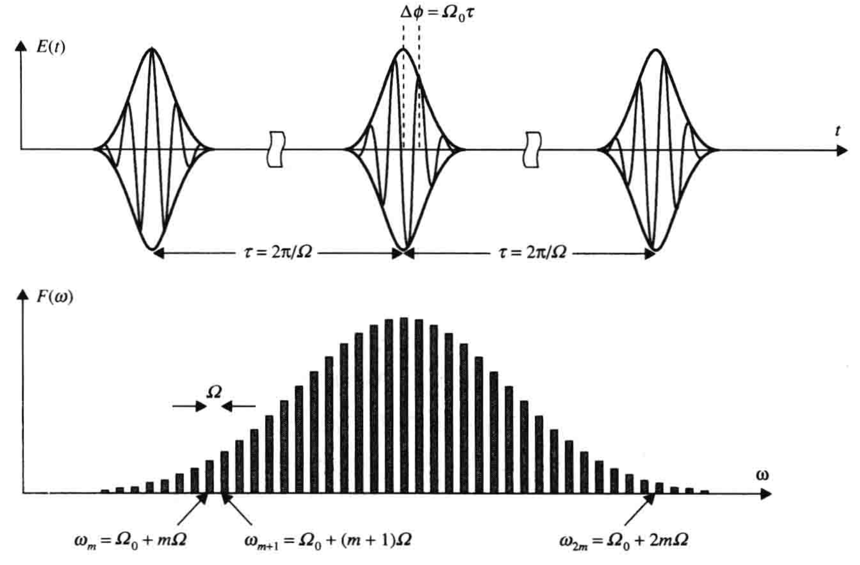


图 6.54　周期脉冲序列及其频率谱。频率谱由一系列分立的频率组成，这些频率等间距分布；相应地，脉冲序列在时间上具有精确的周期性

在本章前面讨论过，脉冲宽度反比于增益带宽。在光谱中，载流子频率在几百 THz 的范围（如 $\lambda = 500\text{nm}$ 的绿光相应的频率为 $\nu = 600\text{THz}$ ）。瞬时间隔为几个飞秒的脉冲对应大约几百 THz 的增益带宽。这些超短脉冲在脉冲包络中组成几个光学周期。飞秒量级的锁模脉冲可应用于频率计量，通常以时间单位为标准。这里讨论的内容与参考文献[51]有关。在微波范围，能准确地对电磁波的周期计数。在 SI 单位制中，一秒定义为铯钟振动 9 192 631 770 次的时间间隔。调解铯钟与铯原子的基态的超低温下的超精细分立发生共振。在光波范围内，大多数分光方法有赖于光波的测量，而不是频率。光谱分辨率受到一些实际因素的限制，包括光束的横向尺寸和仪器的物理尺寸。举个例子，光栅的分辨率与光栅周期数 1/*N* 的倒数同量级。当分辨率达到 $\Delta\lambda/\lambda \approx 10^{-12}$ 时需要光栅的周期数达到 10^{12} ，这是不可能的。如果能对光束的周期数计数，光谱分辨率至少能达到 $\Delta\nu/\nu \approx 10^{-15}$ 。

由于周期性的特点，锁模激光器的频率谱可表示为

$$\omega_m = \Omega_0 + m\Omega \tag{6.12-5}$$

将其视为“光尺”用于测量光波频率，设定 Ω_0 和 Ω 是常数。在上式中的整数 m 在 10^5~10^6 范围，相应频率 Ω_0 小于 Ω 。这样，Ω_0 可以不是振荡模式的频率。公式（6.12-5）将频率 Ω_0 和 Ω 组合成光波频率 ω 。调制频率 Ω 恒为常数，例如可以利用锁定在铯钟的调制器，每秒运行 9 192 631 770 次振动周期。这种被动锁模（如借助饱和吸收剂），其重复频率 Ω 介于几十 MHz 到几 GHz 之间，易于被光检测器测量到。频率 Ω_0 不易测量，除非频率谱包含多个光学倍频程。这里频率 Ω_0 的测量涉及从频率谱中选择的频率和同一谱中不同频率的二次谐波的拍频。这将在下面讨论。

参照图 6.54 中的频率谱，考虑谱中低频部分的振动模式，这部分的频率按照式（6.12-5）表示为 $\omega_m = \Omega_0 + m\Omega$ 。利用非线性晶体中产生的二次谐波，得到频率为 $2\omega_m = 2\Omega_0 + 2m\Omega$ 的光束。如果频率谱包括了完全的光学倍频程，那么模式数为 $2m$ 的模式将振荡于 $\omega_{2m} = \Omega_0 + 2m\Omega$ 。倍频模式（m）和 $2m$ 的模式的混合将产生拍频

$$2\omega_m - \omega_{2m} = (2\Omega_0 + 2m\Omega) - (\Omega_0 + 2m\Omega) = \Omega_0 \tag{6.12-6}$$

这正是频率 Ω_0 。利用这一方法，Ω_0 和 Ω 都确定了。在第 4 章中已讨论，Ω 和 ω_0 都与腔长有关。稳频需要一个稳定的频率谱。这可通过将 Ω_0 和 Ω 锁定在准确的参考频率（如铯钟）的方法而得到。一旦 Ω_0 和 Ω 准确确定，频率谱中的每一个频率都准确确定。将 Ω_0 锁定在 0（ Ω_0=0）。这样，频率谱中的频率是 Ω 的整数倍，电场是一个周期为 $2\pi/\Omega$ 的周期函数。

为了进行光波频率计量，需要增益谱涵盖整个光学倍频程的锁模激光器。下面讨论 Ti:蓝宝石激光器，该激光器能提供用于光波频率计量的较宽的带宽。下面接着的讨论与参考文献[52]有关。Ti:蓝宝石激光器中的激光激活粒子是 Al_2O_3 晶体中的 Ti^{3+} 离子。典型的密度值约为 10^{19}~10^{20}cm^{-3} [53]。图 6.55 表示了蓝宝石晶体中 Ti^{3+} 离子的能级图。

Ti^{3+} 离子的电子结构等价为封闭的球壳（氩）加上一个（3d）电子。自由的 Ti^{3+} 离子的能态（3d）具有简并度为 5，原因是自由空间的球对称性。在寄主晶体（ Al_2O_3 ）中，Ti^{3+} 离子被 6 个位于略有形变的八面体的顶角的氧原子包围。这些氧原子在 Ti^{3+} 周围形成非球对称的电势。晶体场的低的对称性导致简并的消除，这样能级分裂，晶体场可看做正方晶系和三

角晶系（球对称晶体具有 $\bar{3}m$ 点群的对称性）的结合。正方晶系对应的场占优势，使能态分裂成三度简并的基态 $^2T_{2g}$ 和二度简并的激发态 ^2E_g [54]。三角晶系对应的场进一步将基态 $^2T_{2g}$ 分裂为两个能级：^2E 和 $^2A_1$，较低的能级由于自旋–轨道互作用进一步分解为两个能级。图 6.56 表示了由于 $^2T_2 \rightarrow {}^2E$ 的跃迁对应的 Ti^{3+} 离子的吸收截面。Ti:蓝宝石激光器可由高亮度的闪光灯泵浦（见图 6.44）。吸收谱的主峰位于 $\lambda = 500\text{nm}$。在 $\lambda = 500\text{nm}$ 附近较宽的吸收峰正好与氩离子激光器的 514.5nm 的谱线或 YAG 双波长激光器位于 532nm 相对应，可作为激光的光泵浦源。当 Ti^{3+} 离子被激发到 ^2E_g，很快（约 10^{-12}s）弛豫到最低能态并发射光子。系统可通过发射一个光子和一个或多个声子弛豫到基态。声子和电子跃迁的本质导致 Ti：蓝宝石激光器较宽的增益带宽。

吸收谱中的双峰是由于 ^2E 态的简-泰勒分裂效应[54]。更由于晶体场的作用，电子的状态进一步受到电子和晶格振动（声子）间的互作用影响。这样，二度简并的激发态分裂成两个能级（被称为简-泰勒分裂效应[55]）。在有限的温度下，Ti 离子的振动和晶格的振动造成大量的振动态。对均匀增宽和非均匀增宽，这些态相互交叠形成连续能谱。由于受晶体温度和晶体中声子密度的影响，这两个较高能级变化范围达到几千 cm^{-1}（这里的单位 1cm^{-1}（波数）对应 $\nu = 30\text{GHz}$ 或 $h\nu = 1.24\times10^{-4}\text{eV}$。）结果是，Ti:蓝宝石激光器形成了一个较宽发光谱，从 600 到 1100nm（见图 6.57）。在前面讨论过，宽的增益带宽是产生超短脉冲的先决条件。为保证整个频率谱涵盖光学倍频程，可应用本章前面提到的脉冲压缩。这样可导致频率谱比激光器介质的增益带宽宽。

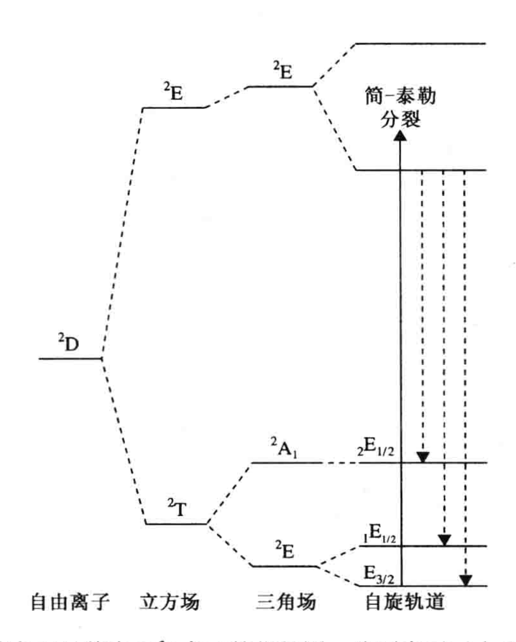


图 6.55　蓝宝石晶体中 Ti^{3+} 离子的能级图，分别表示了由于晶体场、自旋–轨道和简–泰勒分裂效应

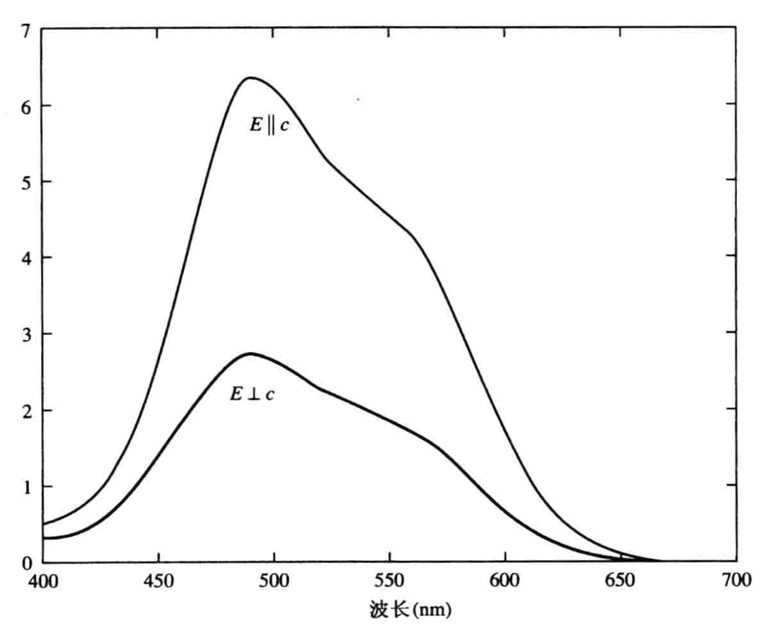


图 6.56　在 Ti：蓝宝石激光器中 $^2T_2 \rightarrow ^2E$ 的跃迁对应的吸收截面（以 $10^{-20}cm^2$ 为单位）关于波长（以 nm 为单位）的函数曲线图。E=电场的偏振；c=晶体对称轴（数据来自参考文献[52]）。

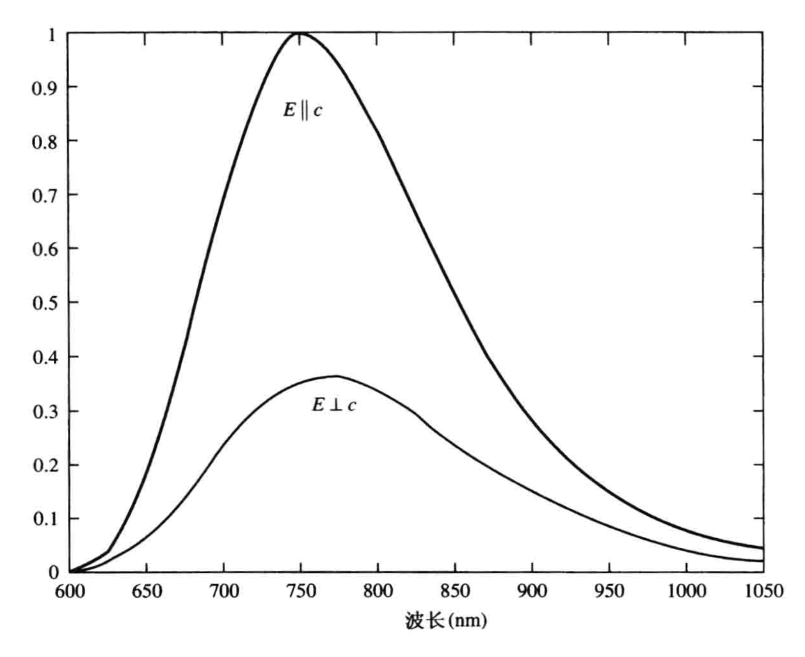


图 6.57　Ti：蓝宝石激光器的辐射谱。E=电场的偏振；c=晶体对称轴（数据来自参考文献[52]）

习题

6.1　证明由原子介质引起的频率牵引现象会使模间频率间隔由 $c/2l$ 减小到

$$\frac{c}{2l}(1-\frac{\gamma_c}{2\pi\Delta\nu})$$

式中，符号的定义见第 6.2 节。计算下列激光器的减小量：$\Delta\nu = 10^9\,\text{Hz}$，$\gamma = 4\times10^{-2}\,\text{m}^{-1}$，$l = 100\text{cm}$。

6.2　推导方程式（6.4-3）。

6.3　推导最佳耦合条件（方程式 6.5-11）。

6.4　计算在 $6328\,\text{Å}$ 工作的 He-Ne 激光器的饱和功率 P_s，假设 $V = 2\text{cm}^3$，$L = 1\%$（单程），$l = 30\text{cm}$ 以及 $\Delta\nu = 1.5\times10^9\,\text{Hz}$。

6.5　计算 6.4 题中所述的 He-Ne 激光器的临界反转浓度 N_t。

6.6　推导含有粒子数反转介质的法布里–珀罗标准具细度的表达式，假设 $r_1^2 = r_2^2 \cong 1$，并且粒子数反转不足以引起振荡。将其细度与无源法布里–珀罗标准具的细度相比较。

6.7　推导法布里–珀罗再生放大器（即具有放大介质）的最高增益–带宽积的表达式。带宽的定义是强度增益 $(E_tE_t^*)/(E_iE_i^*)$ 超过峰值一半时的频率区域，假设 $\nu_0 = \nu_m$。

6.8

（a）推导方程式（6.6-7），并证明光强是时间的周期函数。

（b）推导方程式（6.6-26）。

6.9

（a）定性描述在图 6-14 所示的锁模实验中的 A,B,C,D 各处预期看到的情形（预先阅读第 11 章的第一节中的有关光电倍增管也许会对读者有益）。

（b）锁模对由 RF（射频）频谱分析仪在 B 处显示的拍频信号（当 $\Omega = \pi c/l$）强度的影响是什么？假设在锁模前相位为无规则的 N 个相等振幅的模，它们之间的频率间距是 Ω。（答案：锁模使拍频信号功率增加了 N 倍。）

（c）证明在具有多普勒增宽的线型函数的气体激光器中，中心频率为 $\nu_0 + \delta\nu_0$ 的驻波在速度分布函数（见图 6.37）烧出两个相同的孔，此时场位于 $\nu_0 - \delta$。

（d）频率为 $\nu_0 + \delta$ 和 $\nu_0 - \delta$ 的两个行波能与同类原子互相作用吗？如果答案是肯定的，在什么条件下成立？

6.10　根据兰姆凹陷效应（见图 6.38）对气体激光器设计一个稳频装置。[提示：如果不能发明一个新装置的话，不妨考虑在兰姆凹陷的谷部对共振腔长进行正弦式调制时，功率输出的相位会受到什么样的调制？你能从这个相位导出一个控制腔长的误差修正信号吗？]

6.11　验证表 6-2 中的关系式。

6.12　一个 He-Ne 激光器（$\lambda = 0.63\mu\text{m}$）工作在基横模状态，反射镜间距 $l = 30\text{cm}$。多普勒增宽度 $\Delta\nu_D = 1.5\text{GHz}$，有效折射率 $n = 1$。输出镜为平面镜，另一个镜面为曲率半径为 16m 的球面。

（a）在共振腔中纵模的频率间距是多少？

（b）证明共振腔处于稳态。

（c）若激光介质的温度加倍，则多普勒增宽度变为多少？

（d）在平面镜处光斑尺寸为多少？

（e）若激光由平面镜输出，距离平面镜 16km 处的光斑尺寸为多少？

（f）给定光腔内部损耗为 $L_i = 10^{-1}$，小信号增益系数为 $\gamma_0 = 10^{-3}\text{cm}^{-1}$，球面镜的反射系数 1.0，若输出功率达到极大值时输出镜面的反射系数（R）为多少？

（g）焦距为 f 的薄透镜靠近输出镜面放置。计算距离透镜 $d = f$ 处的高斯光束的曲率半径。

6.13　推导将频率 v 处一个给定的 $a \to b$ 跃迁的吸收截面与 $b \to a$ 自发跃迁寿命关系的表达式。

6.14　$E(t) = \sum_{n=1}^{N} C_n \exp(i\omega_0 t + in\Omega t)$，取 $N = 5$，作图范围 $\Omega t(-4\pi, 4\pi)$。

（a）生成 N 的一系列随机相位 (ϕ_n)，作出 $|E(t)|$ 关于 Ωt 的关系图，取 $C_n = \exp(\mathrm{i}\phi_n)/\sqrt{N}$。

（b）令 $C_n = 1/\sqrt{N}$，作出 $|E(t)|$ 关于 Ωt 的关系图。

（c）令 $C_n = \sin\{[s\pi/(N+1)]n\}/\sqrt{(N+1)/2}$，作出 $|E(t)|$ 关于 Ωt 的关系图，$s = 1,2,3,4,5$。

（d）对（b）和（c），推导电场的解析表达式。[提示：对（c），利用 $\sin x = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)/2i$，并将几何级数累加。]

6.15　考虑一个非对称的法布里–珀罗标准具，反射镜的反射率为 R_1 和 R_2。光腔内介质的线性衰减系数为 α。

（a）推出正常入射时标准具透射率关于频率的函数关系。

（b）推出透射峰的半高宽 $(\Delta v_{1/2})_e$。

（c）外来激光束与标准具共振。推出当去除激光束时储存在标准具内呈指数衰减的能量常数。这是标准具内的光子寿命 t_c。

（d）写出当去除激光束后从标准具电磁辐射出的电场 E 的表达式。推出电场 E 的傅里叶变换。推出傅里叶谱的半高宽 $(\Delta v_{1/2})_s$。

（e）假设 $\left|1 - \sqrt{R_1 R_2}\exp(-\alpha l)\right| \ll 1$。比较 $(\Delta v_{1/2})_e$ 和 $(\Delta v_{1/2})_s$，用 t_c 表示出它们间的关系。

（f）假设 $\left|1 - \sqrt{R_1 R_2}\exp(-\alpha l)\right| \ll 1$。推出腔的 Q 因子和细度 F 间的关系。

6.16

（a）将式（6.7-18）代入式（6.7-17）并证明

$$\left(1 + \frac{2g_0}{\Omega_g^2 \tau^2}\right)\tau^4 = \frac{g_0}{4\sigma_1 (\Omega\Omega_g)^2} \text{ 和 } g_0 - L = 2\sigma_1 \Omega^2 \tau^2 \left(1 + \frac{g_0}{\Omega_g^2 \tau^2}\right)$$

（b）对锁模激光器有 $g_0 << \Omega_g^2 \tau^2$，上述公式变为

$$\tau^4 = \frac{g_0}{4\sigma_1 (\Omega\Omega_g)^2} \text{ 和 } g_0 - L = 2\sigma_1 \Omega^2 \tau^2$$

证明条件 $g_0 \ll \Omega_g^2 \tau^2$ 等价于 $4\sigma_1 \Omega^2 \tau^2 \ll 1$。

6.17　用 $E(t) = E_0 \operatorname{sech}(t/\tau)$ 代入式（6.7-31）。证明 $\Delta E(t) = 0$ 满足

$$\tau^2 = \frac{2g_0}{\gamma E_0^2 \Omega_g^2} \text{ 和 } L - g_0 = \frac{g_0}{\Omega_g^2 \tau^2}$$

6.18

（a）证明当 $N(N \to \infty)$，脉冲的半高宽（FWHM）可由式（6.6-8）给出

$$\Delta t_{1/2} = 0.886\frac{\tau}{N}$$

其中，$\tau = 2\pi/\Omega$。

（b）证明当 $N(N \to \infty)$，脉冲强度的半高宽（FWHM）可由式（6.6-26）给出

$$\Delta t_{1/2} = 1.19\frac{\tau}{N}$$

注意到脉冲强度的半高宽要宽 34%。

6.19　考虑一对相同的衍射光栅，间隔为 d，周期为 Λ。这两个光栅平行。为简单计，假设它们都是透射光栅。令 τ 是群时延，推出群速度色散 $d\tau/d\lambda$ 关于入射角的函数关系。在双光栅中群时延色散可用于脉冲压缩。

参考文献

1. Schawlow, A. L., and C. H. Townes, Infrared and optical masers. *Phys. Rev.* **112**:1940 (1958).
2. Yariv, A., *Quantum Electronics*, 2nd ed. Wiley, New York, 1975.
3. Laures, P., Variation of the 6328 Å gas laser output power with mirror transmission. *Phys. Lett.* **10**:61 (1964).
4. Bennett, W. R., Jr., Gaseous optical masers. *Appl. Opt. Suppl. 1 Optical Masers*, 24 (1962).
5. Fork, R. L., D. R. Herriott, and H. Kogelnik, A scanning spherical mirror interferometer for spectral analysis of laser radiation. *Appl. Opt.* **3**:1471 (1964).
6. DiDomenico, M., Jr., Small signal analysis of internal modulation of lasers. *J. Appl. Phys.* **35**:2870 (1964).
7. Yariv, A., Internal modulation in multimode laser oscillators. *J. Appl. Phys.* **36**:388 (1965).
8. Hargrove, L. E., R. L. Fork, and M. A. Pollack, Locking of He–Ne laser modes induced by synchronous intracavity modulation. *Appl. Phys. Lett.* **5**:4 (1964).
9. DiDomenico, M., Jr., J. E. Geusic, H. M. Marcos, and R. G. Smith, Generation of ultrashort optical pulses by mode locking the Nd^{3+}:YAG laser. *Appl. Phys. Lett.* **8**:180 (1966).
10. Mocker, H., and R. J. Collins, Mode competition and self-locking effects in a *Q*-switched ruby laser. *Appl. Phys. Lett.* **7**:270 (1965).
11. DeMaria, A. J., Mode locking. *Electronics* Sept. 16:112 (1968).
12. Valdmanis, J. A., R. L. Ford, and J. P. Gordon, *Opt. Lett.* **10**:131 (1985).
13. Shapiro, S. L. (ed.), *Ultrashort Light Pulses* (Topics in Applied Physics, Vol. 18). Springer-Verlag, New York, 1977.
14. Hochstrasser, R. M., W. Kaiser, and C. V. Shank (eds.), *Picosecond Phenomena II* (Series in Chemical Physics, Vol. 14). Springer-Verlag, New York, 1980.
15. Eisenthal, K. B., R. M. Hochstrasser, W. Kaiser, and A. Laubereau (eds.), *Picosecond Phenomena III* (Series in Chemical Physics, Vol. 23). Springer-Verlag, New York, 1982.
16. Schrans, T., *Part I: Longitudinal Static and Dynamic Effects in Semiconductor Lasers; Part II: Spectral Characteristics of Passively Mode-Locked Quantum Well Lasers*. Ph.D. thesis, California Institute of Technology, 1994.
17. Maiman, T. H., Stimulated optical radiation in ruby masers. *Nature* **187**:493 (1960).
18. Sanders, S., L. Eng, J. Paslaski, and A. Yariv, 108 GHz passive mode locking of a multiple quantum well semiconductor laser with an intracavity absorber. *Appl. Phys. Lett.* **56**:310 (1990).

19. Koch, T. L., *Gigawatt Picosecond Dye Lasers and Ultrafast Processes in Semiconductor Lasers*. Ph.D. thesis, California Institute of Technology, 1982.
20. Yariv, A., *Quantum Electronics*, 3rd ed. Wiley, New York, 1989, p. 550.
21. Siegman, A. E., and D. J. Kuizenga, Simple analytic expressions for AM and FM mode locked pulses in homogeneous lasers. *Appl. Phys. Lett.* **14**:181 (1969).
22. Kuizenga, D. J., and A. E. Siegman, FM and AM mode locking of the homogeneous laser: Part I, Theory; Part II, Experiment. *J. Quantum Electron.* **QE- 6**:694 (1970).
23. Siegman, A. E., *Lasers*. University Science Books, Mill Valley, CA, 1986.
24. Tracy, E. B., *IEEE J. Quantum Electron.* **5**:454 (1969).
25. Haus, H. A., Mode-locking of lasers. *IEEE J. Selected Topics Quantum Electron.* **6**(6):1173 (2000).
26. Kuizenga, D. I., and A. E. Siegman, Modulator frequency detuning effects in the FM mode-locked lasers. *IEEE J. Quantum Electron.* **6**:803 (1970).
27. Smith, P. J., T. J. Bridges, and E. J. Burkhardt, Mode locked high pressure CO_2 laser. *Appl. Phys. Lett.* **21**:470 (1972).
28. Martinez, O. E., J. P. Gordon, and R. L. Fork, *J. Opt. Soc. Am. A* **1**:1003 (1984).
29. Martinez, O. E., *IEEE J. Quantum Electron.* **23**:59 (1987).
30. Wagner, W. G., and B. A. Lengyel, Evolution of the giant pulse in a laser. *J. Appl. Phys.* **34**:2042 (1963).
31. Hellwarth, R. W., Control of fluorescent pulsations. In: *Advances in Quantum Electronics*, J. R. Singer (ed.). Columbia University Press, New York, 1961, p. 334.
32. McClung, F. J., and R. W. Hellwarth, Giant Optical Pulsations from Ruby. *J. Appl. Phys.* **33**:828 (1962).
33. Hellwarth, R. W., *Q* modulation of lasers. In: *Lasers*, Vol. 1, A. K. Levine (ed.). Marcel Dekker, New York, 1966, p. 253.
34. DeMaria, A. J., Picosecond laser pulses. *Proc. IEEE* **57**:3 (1969).
35. Lamb, W. E., Jr., Theory of an optical maser. *Phys. Rev. A* **134**:1429 (1964).
36. Szöke, A., and A. Javan, Isotope shift and saturation behavior of the *1.15jL* transition of neon. *Phys. Rev. Lett.* **10**:512 (1963).
37. Bloom, A., *Gas Lasers*. Wiley, New York, 1963, p. 93.
38. Maiman, T. H., Optical and microwave-optical experiments in ruby. *Phys. Rev. Lett.* **4**:564 (1960).
39. Cronemeyer, D. C., Optical absorption characteristics of pink ruby. *J. Opt. Soc. Am.* **56**:1703 (1966).
40. Schawlow, A. L., Fine structure and properties of chromium fluorescence. In: *Advances in Quantum Electronics*, J. R. Singer (ed.). Columbia University Press, New York, 1961, p. 53.
41. Yariv, A., Energy and power considerations in injection and optically pumped lasers. *Proc. IEEE* **51**:1723 (1963).
42. Geusic, J. E., H. M. Marcos, and L. G. Van Uitert, Laser oscillations in Nd-doped yttrium aluminum, yttrium gallium and gadolinium garnets. *Appl. Phys. Lett.* **4**:182 (1964).
43. Kushida, T., H. M. Marcos, and J. E. Geusic, Laser transition cross section and fluorescence branching ratio for Nd^{3+} in yttrium aluminum garnet. *Phys. Rev.* **167**:1289 (1968).
44. Snitzer, E., and C. G. Young, Glass lasers. In: *Lasers*, Vol. 2, A. K. Levine (ed.). Marcel Dekker, New York, 1968, p. 191.
45. Simon, J. C., Semiconductor laser amplifier for single mode optical fiber communications. *J. Opt. Commun.* **4**:51 (1983).
46. Mears, R. J., L. Reekie, I. M. Jauncey, and D. N. Payne, Low noise erbium-doped fiber amplifier operating at 1.54 mm. *Electron. Lett.* **23**:1026 (1987).
47. Hagimoto, K., et al., A 212 km non-repeatered transmission experiment at 1.8 Gb/s using LD

pumped Er^{+}-doped fiber amplifiers in an 1m/direct-detection repeater system. In: *Proceedings of the Optical Fiber Conference, Houston, IX*. Postdeadline Paper PD15, 1989.

48. Olshansky, R., Noise figure for Er-doped optical fibre amplifiers. *Electron. Lett.* **24**:1363 (1988).
49. Payne, D. N., Tutorial session abstracts. In: *Optical Fiber Communication (OFC 1990) Conference*, San Francisco, 1990.
50. See, for example, G. Eisenstein, U. Koren, G. Raybon, T. L. Koch, M. Wiesenfeld, M. Wegener, R. S. Tucker, and B. I. Miller, Large-signal and small-signal gain characteristics of 1.5 μm quantum well optical amplifiers. *Appl. Phys. Lett.* **56**:201 (1990).
51. Udem, Th., R. Holzwarth, and T. W. Hänsch, Optical frequency metrology. *Nature* **416**:233 (14 Mar. 2002).
52. Moulton, P. F., Spectroscopic and laser characteristics of $Ti:Al_2O_3$. *J. Opt. Soc. Am. B* **3**(1):125 (1986).
53. McKinnie, I. T., A. L. Oien, D. M. Warrington, P. N. Tonga, L. A. W. Gloster, and T. A. King, Ti ion concentration and Ti:sapphire laser performance. *IEEE J. Quantum Electron.* **33**(7):1221 (1997).
54. In group theory, A_1 and A_2 stand for one-dimensional irreducible representations, E stands for a two-dimensional irreducible representation, and T_1 and T_2 stand for three-dimensional irreducible representation of point group O. The subscripts g and u, for gerade and ungerade, indicate even and odd representations under inversion. See, for example, M. Tinkham, *Group Theory and Quantum Mechanics*. McGraw-Hill, New York, 1964.
55. Jahn, H. A., and E. Teller, *Proc. Roy. Soc. London A* **161**:220 (1937).

第 7 章　光纤中的色散和偏振模色散

7.0　引言

色散实际上是所有光学材料的一个固有特性。这一现象主要表现为一束在透明介质中传输的光的相速度（和群速度）对其频率（或波长）的依赖性。类似地，色散也存在于由透明材料制作而成的光纤中。正是由于色散的存在，一束光脉冲沿着光纤传播时会发生展宽。这一展宽导致了相邻脉冲重叠时信号的衰减。随着传播距离和传输速率的增加，这个问题会逐渐地变得更加严重。除了常规的色散外，光纤还具有双折射的特性，即相速（群速）依赖于光束的偏振。双折射是由于光纤本身的不理想性和（或）外界的干扰造成的。因此，两个线性偏振模（如 LP_{01x} 和 LP_{01y} ）就不再简并了。换言之，这两个传播的主模之间存在一个时延差——传播速度慢的模式和传播速度快的模式。时延的存在导致光脉冲的展宽和光信号的衰减。在本章中我们定量地讨论在光纤中传播的光脉冲的色散和双折射效应。

7.1　光传输系统中的色散

在第 1 章中我们采用折射率对光频率（或波长）的依赖性来描述色散。这点对于讨论在同性介质中传播的光脉冲时是非常重要的。由于色散的存在，光的群速度依赖于频率（或波长）。这就是众所周知的群速度色散（GVD）。在光电子学中，我们经常要处理光波在各种光学系统中的传输，包括光纤，调制器，以及放大器。在这样一个普通光学系统中的群速度色散，可以通过相移是频率的函数来描述。

参见图 7.1，我们考虑一束单频光在光学系统中的传输情况。

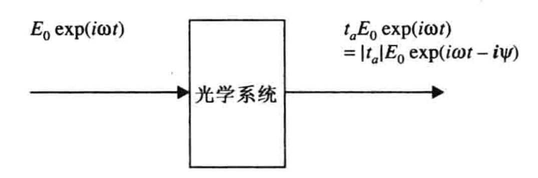


图 7.1　光学传输系统示意图，其中 t_a 是振幅传输系数。图中的方框可以表示光纤盘，法布里标准具，一个频谱滤波器等

振幅传输系数 t_a 可以由式（7.1-1）给出

$$t_a=\sqrt{T}\ \exp(-i\psi) \tag{7.1-1}$$

其中 T 是强度系数，ψ 是相移。在同性介质中，相移可以简单地写成

$$\psi=kL=\frac{\omega}{c}nL \tag{7.1-2}$$

其中 ω 是角频率，n 是折射率，L 是传输距离。

接下来我们考虑光脉冲的传输。假设输入光脉冲为光载体 $\exp(i\omega_0 t)$ 和包络函数 $s(t)$ 的乘积

$$E_{\rm in}(t) = s(t)e^{i\omega_0 t} = e^{i\omega_0 t}\int A(\Omega)e^{i\Omega t}d\Omega \tag{7.1-3}$$

其中 ω_0 是脉冲载流子的频率， $A(\Omega)$ 是包络的傅里叶变换谱。包络函数 $s(t)$ 可视为一个时变的振幅。经过如图 7.1 所示的光学系统后输出的脉冲为

$$E_{\rm out}(t) = s'(t)e^{i\omega_0 t} = e^{i\omega_0 t}\int A(\Omega)e^{i\Omega t}\sqrt{T}e^{-i\psi}d\Omega \tag{7.1-4}$$

考虑强度传输在输入脉冲的光谱范围是相同的情况。在这种情况下，输出脉冲可以写成

$$E_{\rm out}(t) = s'(t)e^{i\omega_0 t} = e^{i\omega_0 t}\sqrt{T}\int A(\Omega)e^{i\Omega t}e^{-i\psi}d\Omega \tag{7.1-5}$$

一般地，输出脉冲的形状 $s'(t)$ 不同于输入脉冲形状 $s(t)$ 。这是由于相移 $\psi(\Omega)$ 是频率函数的一个结果。

在光通信系统中，尤其是载流子是频率为 ω_0 的激光束，包络的傅里叶谱 $A(\Omega)$ 通常在 $\Omega=0$ 附近具有尖锐峰值。为了研究输出脉冲的形状，我们将 $\Psi(\Omega)$ 在 $\Omega=0$ 进行泰勒展开

$$\psi(\Omega) = \psi_0 + \left(\frac{d\psi}{d\Omega}\right)_0\Omega + \cdots \tag{7.1-6}$$

代入式（7.1-5），得到

$$E_{\rm out}(t)= s'(t)e^{i\omega_0 t} = e^{i\omega_0 t}\sqrt{T}e^{-i\psi_0}\int A(\Omega)e^{i\Omega t}e^{-i(d\psi/d\Omega)_0\Omega}d\Omega \tag{7.1-7}$$

这里我们忽略了 Ω 的高阶项。将式（7.1-7）的最后一部分和式（7.1-3）进行比较，可以重写为

$$E_{\rm out}(t) = s'(t)e^{i\omega_0 t} = e^{i\omega_0 t}\sqrt{T}\,e^{-i\psi_0}s(t-\tau_0) \tag{7.1-8}$$

其中

$$\tau_0 = \left(\frac{d\psi}{d\Omega}\right)_0 \tag{7.1-9}$$

是脉冲包络的传输时间。

以上表明，除了一个相位因子和一个振幅因子外，输出脉冲仍然跟输入脉冲很相似，仅仅是存在一个时延 $(d\psi/d\Omega)_0$ 。在假设 $A(\Omega)$ 在 $\Omega=0$ 附近具有尖锐峰值，并且相移随着 Ω 平缓变化的情况下这个近似是合乎情理的。因此在图 7.1 所示的光学系统中产生的传输时延，即群时延可以写成

$$\tau = \frac{d\psi}{d\omega} \tag{7.1-10}$$

它是频率的函数。在均匀介质中，$\psi = kL$ ，因此 7.1-10 变成

$$\tau = \frac{dk}{d\omega}L = \frac{L}{v_g} \tag{7.1-11}$$

其中 v_g 是群速度。

假如传输时间 τ 不依赖于频率，那么群时延就不存在色散了。这就是组成光脉冲的所有

频率都以同一群速传播的情况，这时传输时间τ也一样。在此种情况下，脉冲形状也不变。当群时延τ是频率的函数时，输出的脉冲就会发生展宽。在脉冲没有严重变形的情形下，脉冲展宽的宽度可以写成

$$\Delta\tau=\left(\frac{d\tau}{d\omega}\right)_0\Delta\omega=\left(\frac{d^2\psi}{d\omega^2}\right)_0\Delta\omega \tag{7.1-12}$$

式中$\Delta\omega$是输入脉冲的谱宽。可以看到，脉冲展宽正比于相移对频率的二阶导数和输入脉冲的谱宽的乘积。

在光通信系统中，脉冲展宽通常写成波长展宽的形式

$$\Delta\tau=\left(\frac{d\tau}{d\lambda}\right)_0\Delta\lambda \tag{7.1-13}$$

这里我们定义

$$\tau_\lambda=\left(\frac{d\tau}{d\lambda}\right)_0\quad (\text{ps/nm}) \tag{7.1-14}$$

为群时延色散，它的单位是ps/nm。对于单模光纤，相移可以简单地写成传播常数和光纤长度的乘积

$$\psi=\beta L \tag{7.1-15}$$

式中β是模式的传播常数。应用方程（7.1-12），（7.1-13），（7.1-14）和（7.1-15），可以得到

$$\tau_\lambda=-\frac{2\pi c}{\lambda^2}\left(\frac{d^2\psi}{d\omega^2}\right)_0=-\frac{2\pi c}{\lambda^2}\left(\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right)_0 L \tag{7.1-16}$$

我们注意到τ_λ正比于传播的长度L。在光学工程中，通常定义群速度色散D为

$$D=-\frac{2\pi c}{\lambda^2}\left(\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right)_0 \tag{7.1-17}$$

它的单位为ps/km – nm。因此τ_λ可以写成

$$\tau_\lambda=DL \tag{7.1-18}$$

式中L是光纤的长度。举个例子，考虑单模光纤，长度L=100km，D=17ps/nm • km；那么可以计算出群时延色散为τ_λ=1700 ps/nm。

当群时延τ依赖于频率时，那么输出的形状可以采用如下表达式和式（7.1-5）表示

$$\begin{aligned}\psi(\Omega)&=\psi_0+\tau_0\Omega+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\psi}{d\omega^2}\right)_0\Omega^2+\cdots\\&=\psi_0+\tau_0\Omega-\frac{\pi c}{\omega_0^2}\tau_\lambda\Omega^2+\cdots\end{aligned} \tag{7.1-19}$$

在7.2节中，我们将考虑高斯光脉冲在色散系统中的传输。

在光通信网络中，信号脉冲有时必须在各种光学元件或子系统中进行传输。总的群时延是各个子系统中的群时延之和。例如，在两个级联的光学系统中传输，总的相移可以写成

$$\psi=\psi_1+\psi_2 \tag{7.1-20}$$

其中ψ_1和ψ_2分别是子系统中的相移。那么总时延为

$$\tau = \frac{d\psi}{d\omega} = \frac{d\psi_1}{d\omega} + \frac{d\psi_2}{d\omega} = \tau_1 + \tau_2 \tag{7.1-21}$$

式中 τ_1 和 τ_2 是子系统的群时延。可以看出 τ_1 和 τ_2 都是正的。那么群时延（GVD）导致的脉冲展宽可以表示成

$$\Delta\tau = \left(\frac{d\tau_1}{d\lambda}\right)_0 \Delta\lambda + \left(\frac{d\tau_2}{d\lambda}\right)_0 \Delta\lambda \tag{7.1-22}$$

式中 $\Delta\lambda$ 是脉冲的谱宽（单位为 nm）。

如果两个子系统的群速度色散具有相反的符号，那么脉冲展宽可以表示成

$$\left(\frac{d\tau_1}{d\lambda}\right)_0 + \left(\frac{d\tau_2}{d\lambda}\right)_0 = 0 \tag{7.1-23}$$

这是色散补偿的基本原理。在两根光纤中传输，根据式（7.1-18），式（7.1-23）可以写成

$$D_1L_1 + D_2L_2 = 0 \tag{7.1-24}$$

式中 D_1 和 D_2 是光纤的色散，L_1 和 L_2 是光纤的长度。光通信中大部分的单模光纤都具有正色散（D_1>0）。因此特别设计的具有负色散（D_2<0）的光纤可以用来恢复脉冲形状。

7.2　色散介质中的光脉冲传播

事实上在现代通信中，光纤中所携带的载流子基本上都是以数字脉冲的形式存在的，每个脉冲代表一个比特的信息。因此，脉冲越窄，在一个给定的时隙中就能容纳更多的脉冲，更多的数据（比特）就能在时隙中传输。实际上，现代通信系统的脉冲宽度窄至 3×10^{-11}s，数据速率超过 10^{10} bit/s。在一个 10 Gb/s 的系统中，每秒钟就有 100 亿个比特。窄脉冲高速率的趋势一直不会衰减。进一步降低脉冲宽度的限制因素是群速度对频率的依赖导致的脉冲展宽。这一现象叫做群速度色散（GVD）。具体地讲，我们考虑一种实际中特定的情形：单模光纤，通常的最低阶基模，在 z=0 处被一个时间高斯脉冲

$$E(x, y, z = 0, t) = u_0(x, y)\exp(-\alpha t^2 + i\omega_0 t) \tag{7.2-1}$$

激发。这里的 $u_0(x,y)$是一个约束模式的波函数，α 是常数，ω_0 是光载波的频率。考虑慢变包络的情形以使包络包含多个光振荡，这种情形对应于 $\alpha^{1/2} \ll \omega_0$。我们可以把输入脉冲 $E(x,y,0,t)$ 表示为傅里叶积分的形式

$$E(z = 0, t) = \exp(i\omega_0 t)\int F(\Omega)e^{i\Omega t}\,d\Omega \tag{7.2-2}$$

式中 $F(\Omega)$ 是高斯包络 $\exp(-\alpha t^2)$ 的傅里叶变换

$$F(\Omega) = \sqrt{\frac{1}{4\pi\alpha}}\exp\left(-\frac{\Omega^2}{4\alpha}\right) \tag{7.2-3}$$

在上面的公式中，忽略了波函数 $u_0(x,y)$。波函数在信号频带范围内保持不变时，这种忽略是合理的。注意，高斯函数的频谱函数也是高斯函数。可以把式（7.2-2）看成是谐波场的集合，每个谐波都有其独特的频率（$\omega_0+\Omega$）和幅度 $F(\Omega)d\Omega$。为了获得输出平面 z 处的场，需要用传输相位延迟因子

$$\exp[-i\beta(\omega_0+\Omega)z] \tag{7.2-4}$$

叠加公式（7.2-2）各个频率分量 $F(\Omega)\mathrm{d}\Omega\ \exp[i(\omega_0+\Omega)]$，结果为

$$E(z,t)=\int F(\Omega)\exp\{i[(\omega_0+\Omega)t-\beta(\omega_0+\Omega)z]\}\,\mathrm{d}\Omega \tag{7.2-5}$$

将 $\beta(\omega_0+\Omega)$ 在中心频率 ω_0 处进行泰勒展开

$$\beta(\omega_0+\Omega)=\beta(\omega_0)+\left.\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega_0}\Omega+\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}\omega^2}\right|_{\omega_0}\Omega^2+\cdots \tag{7.2-6}$$

可获得

$$\begin{aligned}E(z,t)&=\exp[i(\omega_0t-\beta_0z)]\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\Omega\,F(\Omega)\exp\left\{i\left[\Omega t-\frac{\Omega z}{v_g}-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{1}{v_g}\right)\Omega^2z\right]\right\}\\&\equiv\exp[i(\omega_0t-\beta_0z)]\mathscr{E}(z,t)\end{aligned} \tag{7.2-7}$$

其中

$$\beta_0\equiv\beta(\omega_0),\quad \left.\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega_0}=\frac{1}{v_g}=\frac{1}{\text{Group velocity}} \tag{7.2-8}$$

场的包络由积分式（7.2-7）给出

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(z,t)&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\Omega\,F(\Omega)\exp\left\{i\Omega\left[\left(t-\frac{z}{v_g}\right)-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{1}{v_g}\right)\Omega z\right]\right\}\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\Omega\,F(\Omega)\exp\left\{i\Omega\left[\left(t-\frac{z}{v_g}\right)-a\Omega z\right]\right\}\end{aligned} \tag{7.2-9}$$

式中 a 是常量，被定义为 $a=(\mathrm{d}^2\beta/\mathrm{d}\omega^2)/2$。这里在式（7.2-6）的泰勒展式中忽略了高阶项（Ω^3 及以上）。a=0 时没有群速度色散，包络可以写成

$$\mathscr{E}(z,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\Omega\,F(\Omega)\exp\left\{i\Omega\left(t-\frac{z}{v_g}\right)\right\}=\mathscr{E}\left[0,\left(t-\frac{z}{v_g}\right)\right] \tag{7.2-10}$$

即以群速度为 v_g 传输的脉冲的包络保持不变，这一结论与 7.1 节式（7.1-8）的讨论结果相一致。脉冲展宽由群速度色散导致的，群速度色散由参数

$$a\equiv\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}\omega^2}\right|_{\omega=\omega_0}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{1}{v_g}\right)=-\frac{1}{2v_g^2}\frac{\mathrm{d}v_g}{\mathrm{d}\omega} \tag{7.2-11}$$

表征。将（7.2-3）中的 $F(\Omega)$ 代入，式（7.2-9）变成

$$\mathscr{E}(z,t)=\sqrt{\frac{1}{4\pi\alpha}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\left[\Omega^2\left(\frac{1}{4\alpha}+iaz\right)-i\left(t-\frac{z}{v_g}\right)\Omega\right]\right\}\mathrm{d}\Omega \tag{7.2-12}$$

计算积分，可以得到

$$\mathscr{E}(z,t)=\frac{1}{\sqrt{1+i4a\alpha z}}\exp\left(-\frac{(t-z/v_g)^2}{1/\alpha+16a^2z^2\alpha}\right)\exp\left(i\frac{4az(t-z/v_g)^2}{1/\alpha^2+16a^2z^2}\right) \tag{7.2-13}$$

z 处的脉冲持续时间 τ 可以看做是两次脉冲包络的平方减少为峰值的 1/2 的间隔（所谓的 FHWM），即

$$\tau(z)=\sqrt{2\ln 2}\sqrt{\frac{1}{\alpha}+16a^2z^2\alpha} \tag{7.2-14}$$

初始脉冲宽度为

$$\tau_0=\left(\frac{2\ln 2}{\alpha}\right)^{1/2} \tag{7.2-15}$$

传输一段距离 L 后，脉冲宽度可以表达为

$$\tau(L)=\tau_0\sqrt{1+\left(\frac{8aL\ln 2}{\tau_0^2}\right)^2} \tag{7.2-16}$$

在大距离 $|aL|\gg\tau_0^{\ 2}$ 时，得到

$$\tau(L)\sim\frac{(8\ln 2)aL}{\tau_0} \tag{7.2-17}$$

如果用式（7.2-11）定义的因子 a，脉宽最终表达式为

$$\tau(L)=\frac{4\ln 2}{v_g^2}\left|\frac{\mathrm{d}v_g}{\mathrm{d}\omega}\right|\frac{L}{\tau_0} \tag{7.2-18}$$

群速度色散经常用 $D=L^{-1}(\mathrm{d}T/\mathrm{d}\lambda)$ 来表征，T 是脉冲在光纤中传输 L 的时间（群迟延）。这种定义与 β 对 ω 的二阶导数有关，根据式（7.1-17）

$$D=-\frac{2\pi c}{\lambda^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}\omega^2}\right) \tag{7.2-19}$$

并与上面的参数 a 有关

$$D=-\frac{4\pi c}{\lambda^2}a \tag{7.2-20}$$

用这种新的定义方法，式（7.2-9）的脉冲宽度表达式可以写为

$$\tau(L)=\tau_0\sqrt{1+\left(\frac{2\ln 2}{\pi c}\frac{DL\lambda^2}{\tau_0^2}\right)^2} \tag{7.2-21}$$

如果 DL 的单位是 ps/nm，λ 的单位是 μm，τ_0 的单位是 ps，则脉宽可以写成

$$\tau(L)=\tau_0\sqrt{1+\left(\frac{1.47DL\lambda^2}{\tau_0^2}\right)^2} \tag{7.2-22}$$

长距离情况 $|DL\lambda^2|>>\tau_0^{\ 2}$ 下，式（7.2-21）变成

$$\tau(L)=\frac{2\ln 2}{\pi c}\frac{DL\lambda^2}{\tau_0} \tag{7.2-23a}$$

同样地（DL 的单位是 ps/nm，λ 的单位是 μm，τ_0 的单位是 ps），根据式（7.2-22）

$$\tau(L)=\frac{1.47DL\lambda^2}{\tau_0} \tag{7.2-23b}$$

式（7.2-23a）与式（7.2-24）一致

$$\Delta\tau = DL\,\Delta\lambda \tag{7.2-24}$$

如果我们取脉冲带宽为

$$\Delta\lambda = \frac{2\ln 2}{\pi c}\frac{\lambda^2}{\tau_0} \tag{7.2-25}$$

脉冲带宽 $\Delta\lambda$ 与式（7.2-3）傅里叶频谱平方的 FWHM 一致（参考习题 7.2）。

光纤中的群速度色散，即对 v_g 和 ω 的依赖，是由材料色散和波导色散（见 3.5 节）共同决定的。根据上一节讨论，这将使设计一种群速度色散为最小值或者在感兴趣的频谱范围内一个期望的值的光纤成为可能。

频率啁啾

除了脉冲展宽，脉冲在色散光纤（$d^2\beta/d\omega^2 \neq 0$）中传输的另一效应是改变光波频率。高斯脉冲传输一段距离 z 后，根据公式（7.2-7）和（7.2-13）结果为

$$E(z,t) = \frac{1}{\sqrt{1+i4a\alpha z}}\exp\left(-\frac{(t-z/v_g)^2}{1/\alpha + 16a^2z^2\alpha}\right)\exp\left(i(\omega_0 t - \beta_0 z) + i\frac{4az(t-z/v_g)^2}{1/\alpha^2 + 16a^2z^2}\right)$$

$$a = \frac{1}{2}\frac{d^2\beta}{d\omega^2} = -\frac{1}{2v_g^2}\frac{dv_g}{d\omega} \tag{7.2-26}$$

光场的总相位是

$$\phi(z,t) = \omega_0 t - \beta_0 z + \frac{4az(t-z/v_g)^2}{1/\alpha^2 + 16a^2z^2} \tag{7.2-27}$$

光频率 $\omega(z,t)$ 从根本上是静止在 z 处的观测者所测量的光波每秒钟振动次数，因此可由

$$\omega(z,t) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(z,t) = \omega_0 + 8\frac{az}{(1/\alpha^2 + 16a^2z^2)}(t - z/v_g) \tag{7.2-28}$$

给出，频率并不是常数而被“啁啾”了，线性啁啾是由于群速度色散导致不同频率的“群”以不同速度传输并各自随着脉冲扩展自己导致的。

在色散光纤 $d^2\beta/d\omega^2 < 0$（$dv_g/d\omega > 0$）中传输的一个啁啾的光脉冲如图 7.2 所示，水平轴表示位置，脉冲频谱中“蓝色”（高频）部分传播得更快，比“红色”部分先到达 z 处，因此频率随时间线性降低。

其他形状的脉冲

高斯形状的光脉冲，经过傅里叶变换后仍为高斯型，即频谱在载波频率附近服从高斯分布。实际上，光通信中的脉冲并不是严格的高斯脉冲，脉冲形状的变化导致频谱分布的变化，因而会影响到在色散介质中传输后脉冲的展宽。图 7.3 展示了三种不同脉冲的展宽。它们是梯形脉冲，高斯脉冲和余弦脉冲。注意它们有不同的频谱分布和不同的脉冲展宽。梯形脉冲具有最宽的频带宽度，这是由于陡峭边缘的原因（陡峭的上升和下降）。频谱分布越宽导致的脉冲展宽越大而“眼图”恰越小（见图 7.3）。通常，高斯脉冲具有最好的脉宽–带宽积。这与物理上最小波包的概念是一致的。

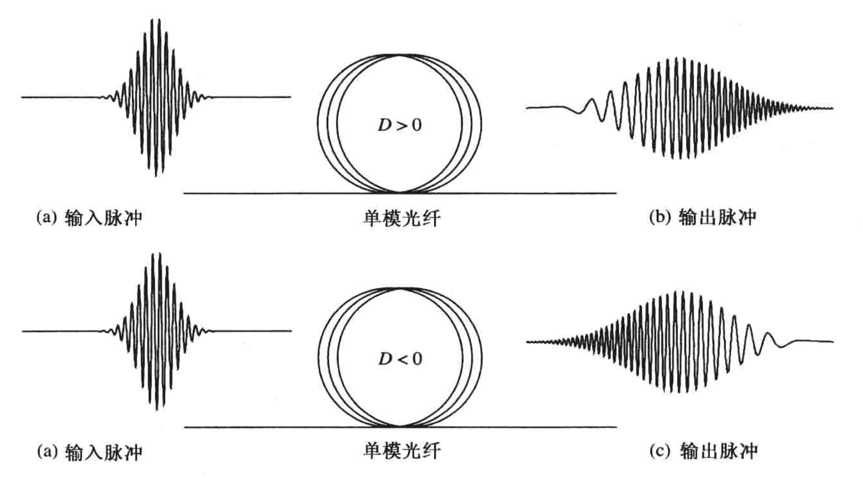


图 7.2　（a）具有高斯包络的未啁啾的光脉冲（空间轮廓）。（b）同样形状的脉冲经过正色散单模光纤($D>0$) 传输后脉冲被展宽并啁啾了，注意高频部分组成的脉冲前沿在正色散光纤中传输的更快。（c）同样形状的脉冲经过负色散单模光纤($D<0$) 传输后脉冲被展宽并啁啾了，注意低频部分组成的脉冲前沿在负色散光纤中传输的更快

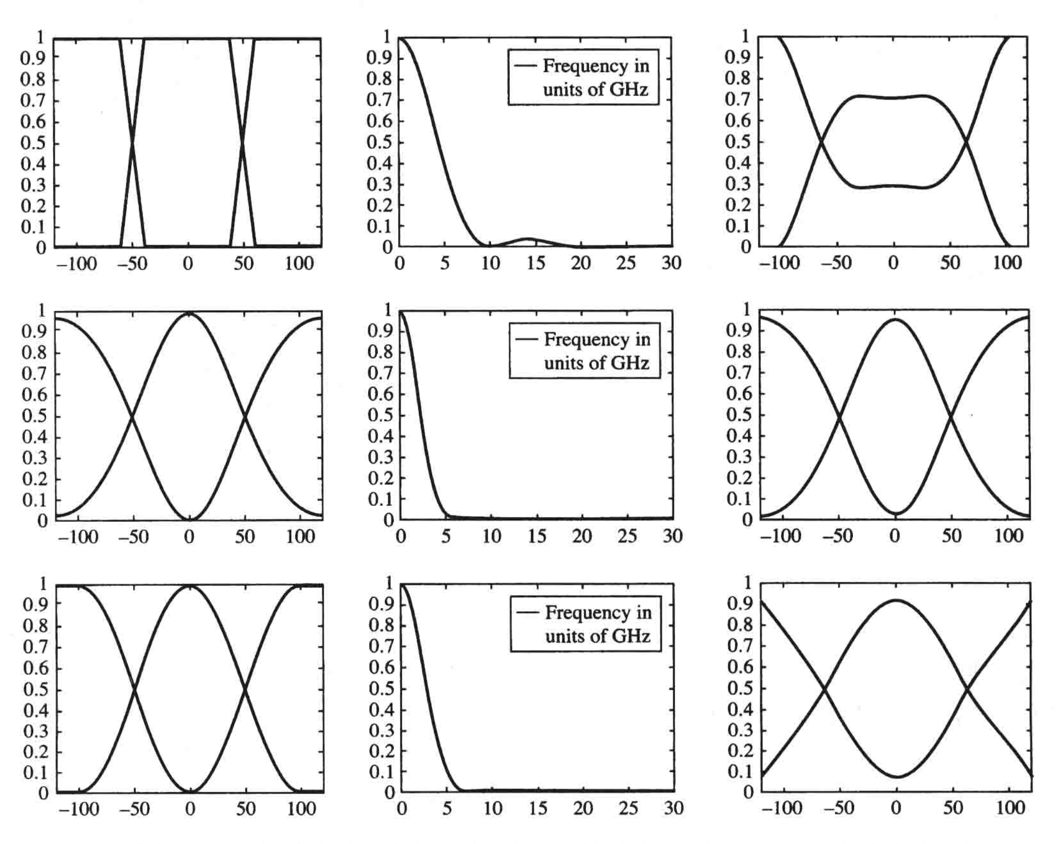


图 7.3　三种不同脉冲的眼图，初始脉冲的形状和眼图，频谱分布，经过 800ps/nm 的色散介质传输后最终脉冲形状和眼图。第一列——初始脉冲形状；第二列——频谱分布；第三列——传输后最终脉冲宽度。第一行——梯形脉冲；第二行——高斯脉冲；第三行——余弦脉冲。第一，三列纵向时间轴的单位是 ps

眼图是传输和网络系统工程中用来描述数字二进制脉冲由于传输过程中的脉冲展宽，畸变和噪声导致的信号退化的一种方法。接收脉冲流被呈现在存储示波器中，示波器的水平扫描和比特速率相同。存储示波器因而可记录若干比特序列（伴随着扩展和畸变）而形成眼图。具有大的“眼睛”的眼图表示传输质量高和差错比特率低。

7.3　光纤中的偏振效应

前面已经阐述了色散可以导致光脉冲的展宽，这一节中，我们可以看到光纤中的偏振效应也会导致光脉冲的展宽。在第 3 章中，已经讨论了圆形介质光纤中的传播模，具体地说，讨论了圆形介质单模光纤中的线性偏振模。尽管被称为“单模”，这些光纤实际上支持两种偏振状态不同的（LP_{01x} 和 LP_{01y}）传播模式，由于圆对称性，这些传播模式（LP_{01x} 和 LP_{01y}）是简并的。换句话说，在任意给定的频率，它们具有完全相同的传输常数，并且以严格相同的相位和群速度传输。

实际上，并非所有的圆形介质光纤都是严格圆形的。光纤的横截面在一个方向上可以被压平，在另一个方向被拉长，这就形成横截面为椭圆形的纤芯。图 7.4 显示了椭圆纤芯的光纤中线偏振模的偏振状态。非圆对称特性形成了传导模传播常数的不同。即椭圆形的纤芯导致单模光纤中的光双折射。如果 x 和 y 轴分别对应纤芯椭圆的长轴和短轴，那么两种偏振模式（LP_{01y} 和 LP_{01y}）将以不同群速度传输。在实际的光纤中，椭圆形纤芯的长轴方向可能（由于光纤的弯折和扭曲）沿着光纤的方向变化。而且，由于光纤方向的拉力引起的光测弹性效应能导致传播模式之间的耦合。因此由于制造缺陷和环境干扰（弯折和扭曲等），光纤实际成为慢轴方向随光纤位置不断变化的双折射率介质。我们将看到这种双折射会引起脉冲的畸变、展宽和限制光纤传输容量的系统损伤。

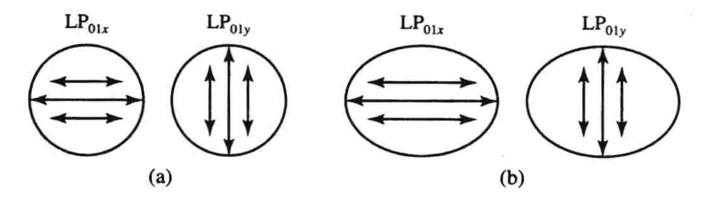


图 7.4　椭圆纤芯光纤中线偏振模的偏振状态。(a)在圆纤芯光纤中，两个模是简并的，即 $\beta_{LP_{01x}}=\beta_{LP_{01y}}$ (b)在椭圆纤芯光纤中，$\beta_{LP_{01x}}\neq\beta_{LP_{01y}}$

参照图 7.5，考虑最简单的恒定双折射率的一段光纤的情形。对于一束非偏振光，50%的能量是偏振方向平行于光线慢轴方向随着光纤在传播，另外 50%的能量是偏振方向平行于光线快轴方向。由于传播速度的不同，两个分量之间出现时延。假设慢模和快模的有效折射率分别为 n_s 和 n_f。两个分量之间的群时延 τ 可以很容易地写出（见习题 7.6）

$$\tau=\left(\frac{d}{c}\Delta n+\frac{\omega d}{c}\frac{\partial\Delta n}{\partial\omega}\right)\tag{7.3-1}$$

其中，d 是光纤段的长度，Δn 是双折射率差

$$\Delta n=n_s-n_f\tag{7.3-2}$$

这种由于光纤中双折射效应导致的光脉冲的展宽被称为偏振模色散（PMD）。

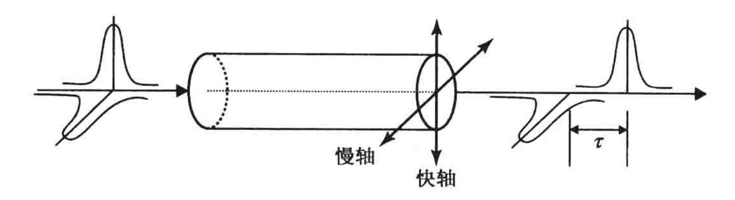


图 7.5　脉冲在恒定双折射率光纤中传播。脉冲的慢波部分和快波部分之间产生时延

双折射导致的平均信号时延和展宽

设归一化输入信号强度为 $I(t)$；那么输出强度可以写为

$$I_{\text{out}}(t) = \gamma I(t-\tau_1) + (1-\gamma)I(t-\tau_2) \tag{7.3-3}$$

其中，γ 为输入波沿着慢轴方向所占的能量比值，τ_1 和 τ_2 分别表示这些模式的传输时间。为简便起见，我们假定 $I(t)$ 在 t=0 处有质心，即

$$\langle tI(t)\rangle = 0 \tag{7.3-4}$$

根据输入波 $\boldsymbol{J}$ 的偏振状态的归一化琼斯矢量，γ 由下式给出

$$\gamma = |\boldsymbol{J}^* \cdot \boldsymbol{J}_{\text{slow}}|^2 \tag{7.3-5}$$

$\boldsymbol{J}_{\text{slow}}$ 是慢模式的偏振状态的归一化琼斯矢量。研究 PMD 时，我们常常使用邦加球来表征一束偏振光的偏振模式。对于偏振光，常忽略 S_0 分量。因此一束偏振光的斯托克斯矢量经常被写为 $\boldsymbol{s}=(S_1,S_2,S_3)$ 作为邦加球的实单位矢量。根据输入波 S 的斯托克斯矢量，由公式（1.6-41），γ 可以写成

$$\gamma = \frac{1}{2}(1+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{s}) \tag{7.3-6}$$

其中，$\boldsymbol{s}$ 是输入波偏振状态的三分量斯托克斯矢量，$\boldsymbol{p}$ 是慢模式偏振状态的三分量斯托克斯矢量。

双折射导致的平均信号时延可写为

$$\tau_{\text{g}} = \langle t\rangle = \int tI_{\text{out}}(t)\,\mathrm{d}t = \gamma\tau_1 + (1-\gamma)\tau_2 = (\gamma - \frac{1}{2})\tau \tag{7.3-7}$$

我们取 $\tau_1 = \tau/2$（慢模式）$\tau_2 = -\tau/2$（快模式），τ 为两个模式之间的时延。对一束非偏振光，γ=1/2，平均时延是 0。

根据公式（7.3-6）、（7.3-7）平均时延也可写为

$$\tau_{\text{g}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{s} \tag{7.3-8}$$

$\boldsymbol{\tau} = \tau\boldsymbol{p}$ 被称为 PMD 矢量。在 7.5 节我们将详细讨论 PMD 矢量。

计算输出光强的变化可估算脉冲的展宽，利用公式（7.3-3），可得到

$$(\Delta\tau_b)^2 = \langle(t-\tau_{\text{g}})^2\rangle - b^2 = \int (t-\tau_{\text{g}})^2 I_{\text{out}}(t)\,\mathrm{d}t - b^2 = \gamma(1-\gamma)(\tau)^2 \tag{7.3-9}$$

b 是输入信号 $I(t)$ 的初始宽度

$$b^2 = \langle t^2 I(t) \rangle = \int t^2 I(t)\, \mathrm{d}t \tag{7.3-10}$$

根据 PMD 矢量$\boldsymbol{\tau} = \tau \boldsymbol{p}$和输入波的斯托克斯矢量$\boldsymbol{s}$，利用公式（7.3-6）、（7.3-9），PMD 的展宽可写成

$$(\Delta\tau_b)^2 = \frac{1}{4}[\tau^2 - (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{s})^2] \tag{7.3-11}$$

$\boldsymbol{s}$是输入波的斯托克斯矢量。我们注意到当输入波的斯托克斯矢量$\boldsymbol{s}$与 PMD 矢量$\boldsymbol{\tau} = \tau \boldsymbol{p}$相等时，PMD 的展宽为 0。对一非偏振波$\gamma = 1/2$且$\boldsymbol{\tau} \bullet \boldsymbol{s} = 0$，根据公式（7.3-9）或（7.3-11），PMD 展宽为

$$(\Delta\tau_b)^2 = \tfrac{1}{4}(\tau)^2 \tag{7.3-12}$$

注意在恒定双折射率短光纤中由于双折射导致的脉冲展宽正比于光纤段的长度 d。尽管式（7.3-11）的结果是从假定介质的线性双折射中得出的，但实际上对于一般双折射介质中传播的椭圆偏振模也是有效的。

在实际光纤通信系统中，实际光纤比一段均匀双折射率光纤的情况复杂得多。我们可以把光纤分成许多段均匀双折射率光纤来研究光脉冲展宽的情况。每一段被假定有均匀的双折射率和固定的快模和慢模的偏振状态。基于上面的分析，每一段均匀双折射率光纤都会引起脉冲的展宽。整个展宽就是所有光纤段贡献的总和。在最简单的情况下，当双折射率完全随机时，总的光脉冲展宽是一个随机的走离过程，可以被写成

$$(\Delta\tau_b)^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4}(\tau)_i^2 \tag{7.3-13}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta n}{c} + \frac{\omega}{c}\frac{\partial \Delta n}{\partial \omega}\right)_i^2 d_i^2 \tag{7.3-14}$$

式中d_i是第 i 段光纤的长度。如果假定每段光纤具有相同的展宽（对于所有 i，有$\tau_i = \tau_1$），那么从式（7.3-14）可以清楚地得出总的展宽$\Delta\tau_b$正比于光纤长度的平方根（见习题 7.7）。重要的一点是，式（7.3-14）只是对最简单的双折射率为完全随机的情况适用（见习题 7.8）。在实际光纤中，尽管双折射可能是随机的，但相邻元的慢模（或快模）的相对方向并不是完全随机的。关于多段均匀双折射率光纤中 PMD 更为严格的分析见 7.5 节。在 7.4 节，将介绍偏振主态（PSP）这个重要概念。

7.4　偏振主态

为了分析偏振状态的演变，我们把一长段光纤分割成许多均匀双折射率的小段光纤。每段为单轴双折射，并且具有固定的快轴和慢轴方向。在这种双折射网络中，输入和输出偏振状态可用在第 1 章中讨论的琼斯矩阵方法分析获得。图 7.6 为一长段实际光纤双折射光回路示意图。在实际光纤中，圆形对称光纤产生的损失可能因为椭圆形的纤芯或包层，或者因为弯折和扭曲压力引起的各向异性等引起的。

给定一个固定的输入偏振状态，输出偏振状态通常是光频率的函数。下面，我们描述一些输入偏振的特定状态，被称为主要偏振状态（PSP）。在这些初始状态下，输出偏振状态对

光频率的变化并不敏感。PSP 的概念首先在 1986 年由 Poole 和 Wagner 提出。为了描述 PSP 的概念，我们假定光纤是无损的，$\boldsymbol{V}_{in}$ 是输入光波的琼斯矢量，输出光波的琼斯矢量 $\boldsymbol{V}_{out}$ 写为

$$V_{out} = M_N M_{N-1} \cdots M_3 M_2 M_1 V_{in} = UV_{in} \tag{7.4-1}$$

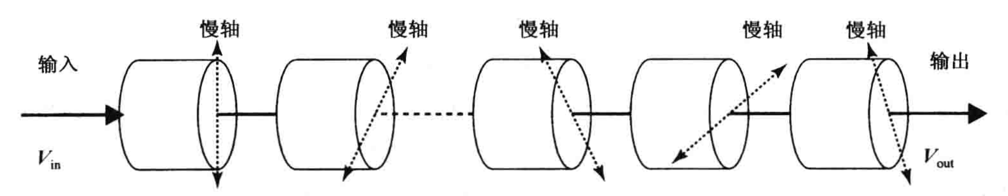


图 7.6　一长段光纤可以被等价的一系列双折射光纤元代替，每一段的慢轴方向是任意的，快轴方向垂直于慢轴方向

其中 M_m（m=1，2，3，…，N）是第 m 个双折射元的琼斯矩阵。总的琼斯矩阵 U 是所有琼斯矩阵的乘积。对无损光纤，所有的琼斯矩阵都是归一的，因此可以写成

$$V_{out} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{bmatrix} V_{in} \tag{7.4-2}$$

式中，a 和 b 是总的琼斯矩阵 U 的矩阵元。实际上，这些矩阵元可以通过计算各个矩阵的乘积获得。这些矩阵元（a 和 b）取决于光的频率和光纤中的双折射分布。式（7.4-2）中的琼斯矩阵 U 是归一化的，因此

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \tag{7.4-3}$$

通常，如果输入偏振状态 $\boldsymbol{V}_{in}$ 是固定的，输出偏振状态 $\boldsymbol{V}_{out}$ 就取决于光频率，这种依赖程度可由式（7.4-2）中的 $\boldsymbol{V}_{out}$ 对 $\boldsymbol{\omega}$ 求导来衡量，即

$$\frac{\partial V_{out}}{\partial \omega} = \begin{bmatrix} a' & b' \\ -b'^* & a'^* \end{bmatrix} V_{in} \tag{7.4-4}$$

式中撇号表示对 ω 取微分。式（7.4-4）假定在感兴趣的频谱范围内的固定输入偏振状态。

如果输出偏振状态满足以下方程

$$\frac{\partial V_{out}}{\partial \omega} = -i\delta V_{out} \tag{7.4-5}$$

式中 δ 是常量，那么输出光束的琼斯矢量 $\boldsymbol{V}_{out}$ 代表了独立于频率（对频率的一阶微分）的偏振状态，这可以从式（7.4-5）对 ω 积分看出。我们可以得到

$$V_{out}(\omega) = V_{out}(\omega_0)\exp\left(-i\int_{\omega_0}^{\omega} \delta\, d\omega\right) \tag{7.4-6}$$

式中 ω_0 是常数，通常是载波的频率。注意琼斯矩阵的指数乘积因子并不改变偏振的状态。考察式（7.4-6），可以得到 δ 是实际传输时延。

现在我们寻找与满足式（7.4-5）输出偏振状态对应的输入偏振状态。将式（7.4-2）和式（7.4-4）代入式（7.4-5），经过代数运算可得到

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} V_{in} = -i\delta V_{in} \tag{7.4-7}$$

其中

$$\begin{aligned} A &= a^*a' + bb'^* \\ B &= a^*b' - a'^*b \\ C &= a'b^* - ab'^* = -B^* \\ D &= aa'^* + b'b^* = A^* \end{aligned} \tag{7.4-8}$$

换言之，输入的主要偏振状态必须是式（7.4-7）中矩阵的特征矢量。当选择的输入偏振状态满足式（7.4-7）时，输出的偏振状态将与频率 ω 一阶微分无关。利用式（7.4-3）和式（7.4-8），可得 $A+D=0$，即式（7.4-7）中矩阵的迹为 0。这是琼斯矩阵归一化特性的直接结果，也可以从式（7.4-3）对 ω 的微分得到。因此，式（7.4-7）的矩阵元 A 为纯复数。

式（7.4-7）的特征矢量和特征值分别为

$$V_{\text{in}} = \begin{bmatrix} -B \\ A + i\delta \end{bmatrix} \tag{7.4-9}$$

和

$$\delta = \pm\sqrt{AD - BC} = \pm\sqrt{|a'|^2 + |b'|^2} \tag{7.4-10}$$

设两个输入初始状态为 $\boldsymbol{V}_1$ 和 $\boldsymbol{V}_2$，其对应的特征值分别为 $\delta = \tau/2$ 和 $-\tau/2$。τ_0 为不存在双折射时光传播时间；那么根据式（7.4-6），这两种模式的传输时间分别为 $\tau_0 + \tau/2$（慢模）和 $\tau_0 - \tau/2$（快模）。这两个特征矢量是相互正交的（$\boldsymbol{V}_1^* \cdot \boldsymbol{V}_2 = 0$）。将这两个特征矢量作为基矢，一般的输入偏振状态可以写成

$$V_{\text{in}} = c_1 V_1 + c_2 V_2 \tag{7.4-11}$$

其中 c_1 和 c_2 为常数。输出偏振状态可以写为

$$V_{\text{out}} = c_1 V_1' + c_2 V_2' \tag{7.4-12}$$

式中 $\boldsymbol{V}_1'$ 和 $\boldsymbol{V}_2'$ 是对应的输出偏振状态（即 $\boldsymbol{V}_1' = U\boldsymbol{V}_1$，$\boldsymbol{V}_2' = U\boldsymbol{V}_2$）。根据式（7.4-6），它们也可以表示为与频率无关的表示式，即

$$V_{\text{out}} = c_1 V_1'(\omega_0) \exp\left(-i\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{\tau}{2}\,\mathrm{d}\omega\right) + c_2 V_2'(\omega_0) \exp\left(i\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{\tau}{2}\,\mathrm{d}\omega\right) \tag{7.4-13}$$

两个偏振分量的相位差为

$$\Delta\phi = -\int_{\omega_0}^{\omega} \tau\,\mathrm{d}\omega \tag{7.4-14}$$

根据式（7.4-10），两部分的群时延为

$$\Delta\tau = -\frac{\partial}{\partial\omega}\Delta\phi = \tau = 2\sqrt{|a'|^2 + |b'|^2} \tag{7.4-15}$$

根据 7.3 节的讨论，两个偏振部分的群时延等价于脉冲的展宽。

如果输入的偏振状态为其中一个主要偏振态，由于双折射导致的脉冲展宽消失（对频率的一阶微分）。下面考察输出偏振状态在 ω_0 附近的微小频率扩展 $\Delta\omega$。应用式（7.4-13），输出状态可以写为

$$V_{\text{out}}(\omega_0+\Delta\omega)=c_1V_1'(\omega_0)\exp(-i\tau\,\Delta\omega/2)+c_2V_2'(\omega_0)\exp(i\tau\,\Delta\omega/2) \tag{7.4-16}$$

我们注意到，$\omega_0+\Delta\omega$ 处输出偏振状态可以从 ω_0 处的输出偏振状态得到，即通过将邦加球上的 PMD 矢量旋转一个 $\tau\Delta\omega$ 角度实现，如图 7.7 所示。

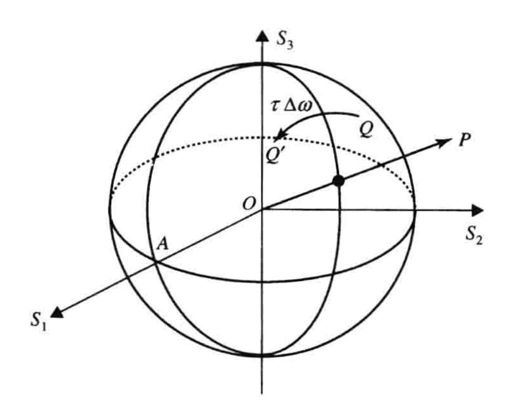


图 7.7　不同频率处输出偏振状态的示意图。Q 是邦加球上一点代表输出状态 $\boldsymbol{V}_{\text{out}}(\omega_0)$。$Q'$ 是邦加球上另一点表示输出状态 $\boldsymbol{V}_{\text{out}}(\omega_0+\Delta\omega)$。$OP$ 是 PMD 矢量方向的单位矢量。同样地，OP 也是慢偏振主态（PSP）的斯托克斯矢量。注意，$\omega_0+\Delta\omega$ 处输出偏振状态 Q' 可以从 ω_0 处输出偏振状态 Q 通过将 PMD 矢量旋转一个 $\tau\Delta\omega$ 角度实现

上述处理 PSP 是以琼斯矩阵公式为基础的。我们都知道，一束光的偏振状态也可以由邦加球上的一些点来表示。在这种情况下，输出偏振状态可以由输入偏振状态在斯托克斯空间的三维旋转得到。因此，相同的 PSP 也可以用斯托克斯公式处理得到。这种处理方法将在 7.5 节分析。

例：一根均匀双折射率光纤。

为了阐述 PSP 的概念，我们考虑单段均匀双折射率介质。在这种情况下，琼斯矩阵由下式给出

$$M=\begin{bmatrix} e^{-i\Gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{i\Gamma/2}\end{bmatrix}$$

其中 $\Gamma=\dfrac{\omega}{c}(n_s-n_f)d=\dfrac{\omega}{c}\Delta nd$。因此 $a=e^{-i\Gamma/2}, b=0$。以及

$$a'=-ia\frac{1}{2}\left(\frac{d}{c}\Delta n+\frac{\omega d}{c}\frac{d\Delta n}{d\omega}\right)$$

$$b'=0$$

$$A=a^*a'+bb'^*=-i\frac{1}{2}\left(\frac{d}{c}\Delta n+\frac{\omega d}{c}\frac{d\Delta n}{d\omega}\right)$$

$$B=a^*b'-a'^*b=0$$

根据式（7.4-10），特征值为

$$\delta=+\tau/2=\frac{1}{2}\left(\frac{d}{c}\Delta n+\frac{\omega d}{c}\frac{d\Delta n}{d\omega}\right)\qquad（慢模）$$

$$\delta = -\tau/2 = -\frac{1}{2}(\frac{d}{c}\Delta n + \frac{\omega d}{c}\frac{d\Delta n}{d\omega}) \quad \text{（快模）}$$

偏振主态要么是慢模要么是快模。

换言之，

$$V_{in1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}，\text{时间}\tau_1 = \tau_0 + \tau/2 \quad \text{（慢模）}$$

$$V_{in2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}，\text{时间}\tau_2 = \tau_0 - \tau/2 \quad \text{（快模）}$$

因此得到 PMD 为下式：

$$\Delta\tau = (\frac{d}{c}\Delta n + \frac{\omega d}{c}\frac{d\Delta n}{d\omega})$$

习题 7.9 是两段双折射光纤的情形。

7.5　偏振模色散的矢量分析

在这一节我们使用琼斯矢量表示法和斯托克斯矢量表示法描述偏振模色散（PMD）。泡利自旋矩阵提供了这两种表示方法之间便利的联系。斯托克斯矢量尤其适用于邦加球上输出光束的偏振状态变化的图形表示法。首先引进在偏振模色散分析中一些重要参数的定义和符号，然后描述琼斯矢量表示法和斯托克斯矢量表示法之间的关系。在 7.4 节中，我们已通过琼斯矩阵公式简单描述了 PSP 的概念。在这一节，我们将利用斯托克斯矢量来处理，另外，还会介绍一些重要概念，包括 PMD 矢量和双折射矢量，这些都是分析光纤网络中偏振模色散的主要工具。最后，我们描述在任意双折射率光纤中 PMD 矢量描述的一个动态的方程和 PMD 矢量的连接法则。这节的讨论主要参考了文献[2]。

定义和符号

坐标

z	沿着光纤轴的传播方向
x, y	横向坐标
$\psi(x, y)\exp[i(\omega t - kz)]$	沿着光纤传播的频率为 ω，波数为 k 的连续波

偏振状态的表示和矢量

$\lvert s\rangle$	在第 1 章定义的二维复琼斯矢量的狄拉克符号；通常用复数，$\lvert s\rangle$ 可以写成列矢量的形式 (s_x, s_y)
$\boldsymbol{s}$	在第 1 章中定义的三维实斯托克斯矢量 $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$；根据琼斯矢量元，斯托克斯矢量 $\boldsymbol{s}$ 可以写成 $s_1 = s_x s_x^* - s_y s_y^*$　$s_2 = s_x s_y^* + s_y s_x^*$　$s_3 = i(s_x s_y^* - s_y s_x^*)$ 这里的定义与第 1 章一致
$\lvert p\rangle$	输出偏振主态慢模式的单位琼斯矢量

$\lvert p_{-}\rangle$	输出偏振主态快模式的单位琼斯矢量
$\boldsymbol{p}$	沿输出偏振主态慢模式方向的单位斯托克斯矢量
$\boldsymbol{p}_{-}$	沿输出偏振主态快模式方向的单位斯托克斯矢量 $\boldsymbol{p}_{-}=-\boldsymbol{p}$
$\boldsymbol{r}$	斯托克斯空间旋转矩阵 $\boldsymbol{R}$（3×3）的旋转轴 $\boldsymbol{r}_{-}=-\boldsymbol{r}$
$\boldsymbol{\tau}$	斯托克斯空间中输出 PMD 矢量：大小是 $\Delta\tau$，为两个 PSP 群时延差（DGD），方向是输出偏振主态慢模式的斯托克斯矢量方向，即 $\boldsymbol{\tau}=\Delta\tau\boldsymbol{p}$
$\boldsymbol{\beta}$	斯托克斯空间中三维双折射矢量，描述本地双折射特性；大小是在单位长度光纤邦加球上的旋转角，方向为 R 的旋转轴方向

矩阵

I	单位矩阵
U	2×2 琼斯矩阵，输入–输出矩阵的关系 $\lvert v\rangle=U\lvert s\rangle$，$U$ 是归一化的可以写成 $U=\begin{bmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{bmatrix}$，$\lvert a\rvert^2+\lvert b\rvert=1$
R	斯托克斯空间中 3×3 旋转矩阵，和 U 同构，输入–输出关系为：$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{Rs}$
$\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$	2×2 的泡利自旋矩阵，$\sigma_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$，$\sigma_2=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，$\sigma_3=\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{\sigma}$	斯托克斯空间泡利自旋矢量，利用泡利自旋矩阵，有 $s_1=\langle s\lvert\sigma_1\rvert s\rangle$，$s_2=\langle s\lvert\sigma_2\rvert s\rangle$，$s_3=\langle s\lvert\sigma_3\rvert s\rangle$，或者用符号表示 $\boldsymbol{s}=\langle s\lvert\boldsymbol{\sigma}\rvert s\rangle$
$\lvert s\rangle\langle s\rvert$	琼斯空间的投影算子（矩阵），$\lvert s\rangle\langle s\rvert=\begin{bmatrix} s_x s_x^* & s_x s_y^* \\ s_y s_x^* & s_y s_y^* \end{bmatrix}=$ 1/2（$I+\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\sigma}$）
$\boldsymbol{ss}$	斯托克斯空间的投影算子（矩阵），$\boldsymbol{ss}=\begin{bmatrix} s_1s_1 & s_1s_2 & s_1s_3 \\ s_2s_1 & s_2s_2 & s_2s_3 \\ s_3s_1 & s_3s_2 & s_3s_3 \end{bmatrix}$

除了上述的符号外，我们还介绍了矢量叉乘的矩阵表示方法。这仅仅为了数学上的方便。考虑两个斯托克斯矢量以及他们的叉乘：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix},\quad \text{以及 } \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} A_2B_3-A_3B_2 \\ A_3B_1-A_1B_3 \\ A_1B_2-A_2B_1 \end{bmatrix}$$

注意叉乘可以方便地写为矩阵–矢量的乘积

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}A_2B_3-A_3B_2\\A_3B_1-A_1B_3\\A_1B_2-A_2B_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-A_3&A_2\\A_3&0&-A_1\\-A_2&A_1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1\\B_2\\B_3\end{bmatrix}$$

因此定义叉乘的矩阵表示法为

$$\boldsymbol{A}\times=\begin{bmatrix}0&-A_3&A_2\\A_3&0&-A_1\\-A_2&A_1&0\end{bmatrix}$$

琼斯矢量和斯托克斯矢量

我们已经描述了琼斯矢量表示法和斯托克斯矢量表示法之间的关系。当一束偏振光通过双折射网络传播时，琼斯矩阵是联系输出偏振状态和输入偏振状态的2×2矩阵。线性关系可以写为

$$|v\rangle=U|s\rangle \tag{7.5-1}$$

式中$|s\rangle$是输入偏振状态，$|v\rangle$是输出偏振状态，U 是2×2的琼斯矩阵。注意到矢量和矩阵都是复数。式（7.5-1）可被看做双折射网络偏振状态的转换方程。琼斯矩阵的作用相当于在二维复琼斯空间的一次“旋转”。

如果我们把偏振状态表示为斯托克斯空间的单位矢量，那么偏振状态的转化可以用三维斯托克斯空间的一次旋转表示，数学表达式可以写为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{s} \tag{7.5-2}$$

式中$\boldsymbol{s}$是三元列矢量，表示输入偏振状态。$\boldsymbol{v}$是三元列矢量，表示输出偏振状态，R是3×3矩阵。斯托克斯矢量和矩阵都是实的。我们还记得，一束偏振光的斯托克斯参数$s_0=1$，因此，只需要三个参数(s_1,s_2,s_3)就可描述偏振状态。基于斯托克斯矢量各个分量的定义（第1章），利用泡利自旋矩阵和琼斯矢量，他们可以方便地写成

$$s_1=\langle s|\sigma_1|s\rangle,\quad s_2=\langle s|\sigma_2|s\rangle,\quad s_3=\langle s|\sigma_3|s\rangle \tag{7.5-3}$$

或者用符号表示

$$\boldsymbol{s}=\langle s|\boldsymbol{\sigma}|s\rangle \tag{7.5-4}$$

这两个方程就是琼斯矢量和斯托克斯矢量之间的关系式。

很明显，琼斯矩阵U和旋转矩阵$\boldsymbol{R}$也是相关的。事实上，它们之间具有一对一关系。给定一个2×2琼斯矩阵，我们能找出3×3旋转矩阵 R，或者是等价的斯托克斯空间的旋转角和旋转轴。设在斯托克斯空间中$\boldsymbol{r}$是R的旋转轴（见图7.8）；显然，任意一个与旋转轴$\boldsymbol{r}$共线的斯托克斯矢量经过双折射光纤系统传输后将保持不变。$|r\rangle$和$|r_\rangle$为对应于斯托克斯矢量$\boldsymbol{r}$和$-\boldsymbol{r}$的琼斯矢量，那么相应的琼斯矢量必须是2×2琼斯矩阵U的特征矢量。

$$U|r\rangle=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma/2}|r\rangle \tag{7.5-5}$$

$$U|r_-\rangle=\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\gamma/2}|r_-\rangle \tag{7.5-6}$$

其中，$\exp(-i\gamma/2)$和$\exp(+i\gamma/2)$为特征值。既然U是归一化和幺模的，特征值也是幺模的，

并且它们的乘积为 1。根据式（7.5-5）和式（7.5-6），斯托克斯矢量 $\boldsymbol{r}$ 对应于慢模的偏振状态，而$-\boldsymbol{r}$ 对应快模的偏振状态。

设$|s\rangle$是任意的输入琼斯矢量。因为$|r\rangle$和$|r_{-}\rangle$构成琼斯矢量的完备正交系，可以写成

$$|s\rangle = c_1|r\rangle + c_2|r_-\rangle \tag{7.5-7}$$

式中c_1和c_2是常数。经过双折射光纤系统的传输后，输出琼斯矢量可由式（7.5-1）得到，利用式（7.5-5）和式（7.5-6），得到输出偏振状态为

$$|v\rangle = c_1|r\rangle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma/2} + c_2|r_-\rangle \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\gamma/2} \tag{7.5-8}$$

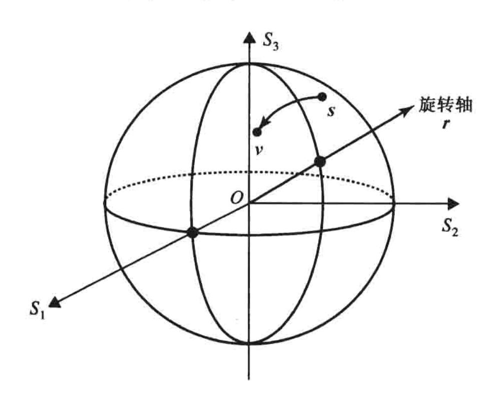


图 7.8　通过双折射网络的偏振状态的变化等价于斯托克斯空间中的旋转。输出斯托克斯矢量 $\boldsymbol{v}$ 通过输入斯托克斯矢量 $\boldsymbol{s}$ 绕 $\boldsymbol{r}$ 轴旋转而获得，旋转轴和旋转角由双折射网络决定

根据第 1 章的讨论，输出斯托克斯矢量 $\boldsymbol{v}$ 可由输入斯托克斯矢量 $\boldsymbol{s}$ 绕旋转轴 $\boldsymbol{r}$ 旋转一定角度γ获得。因此，我们能够通过计算琼斯空间简单的特征矢量问题获得3×3旋转矩阵 $\boldsymbol{R}$。旋转角和旋转轴的精确表示式可以根据琼斯矩阵的矩阵元获得。求解特征矢量式（7.5-5）和式（7.5-6）问题后，我们得到下面的特征值和特征矢量

$$\cos(\gamma/2) = \frac{a + a^*}{2} \tag{7.5-9}$$

$$|r\rangle = N\begin{bmatrix} -b \\ a - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma/2} \end{bmatrix} \tag{7.5-10}$$

$$|r_-\rangle = N_-\begin{bmatrix} -b \\ a - \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\gamma/2} \end{bmatrix} \tag{7.5-11}$$

式中 a 和 b 是琼斯矩阵的矩阵元，N 和 N_-是归一化常数。注意到$|r\rangle$是琼斯空间的二元矢量，这两个琼斯矢量是相互正交的。斯托克斯空间相对应的矢量$\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, r_3)$可由式（7.5-3）得到，结果为

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-2|a|^2 + a\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\gamma/2} + a^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma/2}}{2 - a\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\gamma/2} - a^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma/2}} \\ r_2 &= \frac{-(ab^* + a^*b) + b\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\gamma/2} + b^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma/2}}{2 - a\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\gamma/2} - a^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma/2}} \\ r_3 &= \frac{-(\mathrm{i}a^*b - \mathrm{i}ab^*) + \mathrm{i}b\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\gamma/2} - \mathrm{i}b^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma/2}}{2 - a\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\gamma/2} - a^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma/2}} \end{aligned} \tag{7.5-12}$$

这些就是由琼斯矩阵元 a 和 b 得出的旋转角 γ 和旋转轴 $\boldsymbol{r}$ 的关系表达式。

例：方位角 $\psi=0$。

考虑单轴晶体中的波阵面，单轴晶体的 c 轴（或慢轴）方向为方位角 $\psi=0$。根据第 1 章，矩阵元为

$$a=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Gamma/2}, b=0$$

利用式（7.5-12），我们得到

$$\gamma=\Gamma,\quad r_1=1, r_2=0, r_3=0$$

可以看出，旋转角度刚好等于相位延迟 Γ，旋转轴也就是 s_1 轴。

注意旋转角精确等于相位延迟 Γ，而旋转轴为 s_1 轴。

例：方位角 $\psi\neq 0$。

考虑单轴晶体 c 轴（或慢轴）方向为方位角 $\psi\neq 0$。根据第 1 章，矩阵元为

$$a=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Gamma/2}\cos^2\Psi+\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\Gamma/2}\sin^2\Psi, b=-i\sin(\Gamma/2)\sin(2\Psi)$$

利用式（7.5-12），我们得到

$$\gamma=\Gamma,\quad r_1=\cos(2\Psi), r_2=\sin(2\Psi), r_3=0$$

注意旋转角精确等于相位延迟 Γ，而旋转轴在赤道平面上，与 s_1 的夹角为 2ψ。设 R 为邦加球上代表慢模式的偏振状态；输出偏振状态 P' 通过将 P 点绕 OR 轴旋转 Γ 得到，O 是球心处。图 7.9 表示了邦加球上偏振状态的变化。

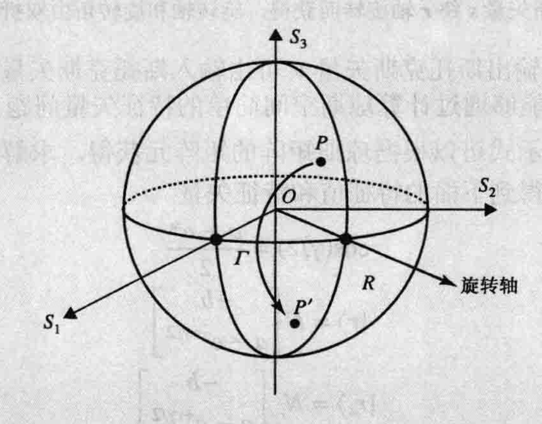


图 7.9　邦加球上偏振态的转化。P 是输入偏振态，P' 是输出偏振状态，R 是波阵面慢模的偏振状态

更进一步，我们能够从旋转角 γ 和旋转轴 $\boldsymbol{r}$ 得到 2×2 的琼斯矩阵。具体过程如下，根据投影算子和特征值，把琼斯矩阵写成

$$U=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma/2}|r\rangle\langle r|+\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\gamma/2}|r_-\rangle\langle r_-| \tag{7.5-13}$$

利用这一节开始讲到的投影算子的泡利表示法，式（7.5-13）的琼斯矩阵变成

$$U=\cos(\gamma/2)I-i\sin(\gamma/2)\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{7.5-14}$$

式中 I 是单位矩阵。这样我们可以利用泡利矩阵和 $\boldsymbol{r}$ 矩阵元的显式将琼斯矩阵写成

$$U=\begin{bmatrix}\cos(\gamma/2)-ir_1\sin(\gamma/2) & -(r_3+ir_1)\sin(\gamma/2)\\(r_3-ir_1)\sin(\gamma/2) & \cos(\gamma/2)+ir_1\sin(\gamma/2)\end{bmatrix}\tag{7.5-15}$$

其中，r_1, r_2, r_3 是 $\boldsymbol{r}$（旋转轴）的矩阵元。这是琼斯矩阵在斯托克斯空间用旋转轴 $\boldsymbol{r}$ 和旋转角 γ 表示的显式表示。

相反地，我们也可以根据琼斯矩阵得到 3×3 旋转矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的显式表示式，具体如下。利用公式（7.5-1），（7.5-2）和（7.5-4），得到

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{s}=\boldsymbol{R}\langle s|\boldsymbol{\sigma}|s\rangle=\langle s|\boldsymbol{R}\boldsymbol{\sigma}|s\rangle=\langle v|\boldsymbol{\sigma}|v\rangle=\langle s|U^{\dagger}\boldsymbol{\sigma}U|s\rangle\tag{7.5-16}$$

其中，剑形符号（†）表示厄米运算（转置和取复运算）。因为这对任意的琼斯矢量 $|s\rangle$ 都成立，我们得到

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{\sigma}=U^{\dagger}\boldsymbol{\sigma}U\tag{7.5-17}$$

这就是由 2×2 的琼斯矩阵 U 得到的 3×3 旋转矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的表达式。

将式（7.5-14）中的 U 代入式（7.5-17），利用泡利矩阵的特性并经过代数运算（见习题 7.11），我们得到

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}+\sin(\gamma)\boldsymbol{r}\times-\cos(\gamma)(\boldsymbol{r}\times)(\boldsymbol{r}\times)\tag{7.5-18}$$

或者等价地有

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}r_1r_1 & r_1r_2 & r_1r_3\\r_2r_1 & r_2r_2 & r_2r_3\\r_3r_1 & r_3r_2 & r_3r_3\end{bmatrix}+\sin(\gamma)\begin{bmatrix}0 & -r_3 & r_2\\r_3 & 0 & -r_1\\-r_2 & r_1 & 0\end{bmatrix}-\cos(\gamma)\begin{bmatrix}r_1r_1-1 & r_1r_2 & r_1r_3\\r_2r_1 & r_2r_2-1 & r_2r_3\\r_3r_1 & r_3r_2 & r_3r_3-1\end{bmatrix}\tag{7.5-19}$$

这是根据斯托克斯空间旋转轴 $\boldsymbol{r}$ 和旋转角 γ 得到的 3×3 旋转矩阵的表达式。表 7.1 列出了一些琼斯矩阵和相对应的 3×3 旋转矩阵和旋转角的实例。

表 7.1　琼斯矩阵和相对应的斯托克斯空间的旋转矩阵

物理对象	琼斯空间	斯托克斯空间		
	琼斯矩阵	旋转轴	旋转角	3×3 旋转矩阵
相位延迟为 γ 方位角 a）为 $\psi=0$ 的波片	$U=\begin{bmatrix}e^{-i\gamma/2} & 0\\0 & e^{+i\gamma/2}\end{bmatrix}$	s_1	γ	$R=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \cos\gamma & -\sin\gamma\\0 & \sin\gamma & \cos\gamma\end{bmatrix}$
相位延迟为 γ 方位角 a）为 $\psi=45°$ 的波片	$U=\begin{bmatrix}\cos(\gamma/2) & -i\sin(\gamma/2)\\-i\sin(\gamma/2) & \cos(\gamma/2)\end{bmatrix}$	s_2	γ	$R=\begin{bmatrix}\cos\gamma & 0 & \sin\gamma\\0 & 1 & 0\\-\sin\gamma & 0 & \cos\gamma\end{bmatrix}$
旋转角为 $\gamma/2$ 的偏振旋转器	$U=\begin{bmatrix}\cos(\gamma/2) & -\sin(\gamma/2)\\\sin(\gamma/2) & \cos(\gamma/2)\end{bmatrix}$	s_3	γ	$R=\begin{bmatrix}\cos\gamma & -\sin\gamma & 0\\\sin\gamma & \cos\gamma & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

a）方位角 ψ 被定义为慢轴与 x 轴之间的夹角。

PSP（偏振主态）

至此，我们在琼斯空间和斯托克斯空间均描述了主偏振态。考虑一个有固定偏振态的光波通过一个感兴趣的区域，研究输出偏振状态作为频率 ω 的函数的变化。这可以通过考察输

出状态对频率的微商得到

$$\frac{\partial}{\partial\omega}|v\rangle=\left(\frac{\partial}{\partial\omega}U\right)|s\rangle \tag{7.5-20}$$

式中$|s\rangle$是固定的输入偏振态，U 为双折射网络的琼斯矩阵。对于一般的双折射网络，琼斯矩阵 U 是频率的函数。一般地，输出偏振态会随频率发生变化。我们所感兴趣的是一系列特殊的输入偏振状态，在这些输入偏振状态下输出偏振状态不随频率（对频率的一阶微分）的变化而变化。数学上，可以写成

$$\frac{\partial}{\partial\omega}|v\rangle=-i\delta\,|v\rangle \tag{7.5-21}$$

式中δ是常数。物理上，δ是由于传输导致的群时延。根据这个公式，频率的变化仅仅导致相位因子的变化而不会改变输出琼斯矢量偏振状态的变化。满足上面公式的状态被称为偏振主态（PSP）。根据式（7.5-1），（7.5-20）和（7.5-21），这些状态必须满足下面的方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial\omega}U\right)U^{-1}|v\rangle=-i\delta|v\rangle \tag{7.5-22}$$

或等价地有

$$U'U^{-1}|v\rangle=\begin{bmatrix}a'a^*+b'b^* & ab'-a'b\\ a'^*b^*-a^*b'^* & a'^*a+b'^*b\end{bmatrix}|v\rangle=-i\delta|v\rangle \tag{7.5-23}$$

其中，撇号表示对频率ω求导数。

由于 U 的归一化特性，矩阵$U'U^{-1}$的积为 0。而且，矩阵$U'U^{-1}$是特征值为纯虚数（见习题 7.12）的反厄米矩阵。因此，特征值可以写成$-i\tau/2$和$i\tau/2$，τ 是实数。方矩阵的行列式是特征值的乘积。因此

$$\det(U'U^{-1})=\frac{\tau^2}{4} \tag{7.5-24}$$

因为 U 是归一化的，有

$$\det(U')=\frac{\tau^2}{4}=|a'|^2+|b'|^2 \tag{7.5-25}$$

根据式（7.5-24）和式（7.5-25），两个 PSP 之间的时延可以写成

$$\tau=2\sqrt{\det(U')}=2\sqrt{|a'|^2+|b'|^2} \tag{7.5-26}$$

根据式（7.5-23），输出 PSP 的琼斯矢量可写为

$$|p\rangle=N_-\begin{bmatrix}a'b-b'a\\ a'a^*+b'b^*+i\dfrac{\tau}{2}\end{bmatrix}\quad\text{(具有本征值为}\delta=+\tau/2\text{的慢波偏振主态)}$$

$$|p_-\rangle=N\begin{bmatrix}a'b-b'a\\ a'a^*+b'b^*-i\dfrac{\tau}{2}\end{bmatrix}\quad\text{(具有本征值为}\delta=-\tau/2\text{的快波偏振主态)} \tag{7.5-27}$$

其中，N 和 $N_$ 是归一化常数。两个输出 PSP 是相互正交的。输入 PSP 的琼斯矢量可由式（7.5-27）乘U^{-1}得到。

把这些输出 PSP 作基矢，任意输出状态可以写成

$$|v(\omega_0)\rangle = c_1|p\rangle + c_2|p_-\rangle$$
$$|v(\omega)\rangle = c_1|p\rangle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta\omega\tau/2} + c_2|p_-\rangle \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\Delta\omega\tau/2} \tag{7.5-28}$$

式中，ω 和 ω_0 为频率，有 $\Delta\omega = \omega - \omega_0$。考察式（7.5-28），我们注意到 $v(\omega)$ 可通过在斯托克斯空间绕 $\boldsymbol{p}$ 轴旋转 $v(\omega_0)$ 角度 $\tau\Delta\omega$ 来实现（见图 7.7）。

值得注意的是，只有在 ω_0 附近很小的频率范围内上述结果才有效。在大多数的光纤中，偏振主态取决于频率。因此，这种情形在 ω_0 附近很小的频率范围内才有效。在这个范围内，PSP 随频率的变化可以忽略。

输出偏振模色散（PMD）矢量 $\boldsymbol{\tau}$

输出 PMD 矢量定义为斯托克斯空间中的矢量，它平行于输出 PSP 慢模的斯托克斯矢量，大小为 τ。对于单个双折射网络，群时延可以描述信号脉冲的展宽。当多个双折射网络共存的网络中，总的群迟延不是单个网络群时延的和，而是单个双折射网络元的 PMD 矢量复杂的矢量和。本节的最后将讨论这个问题。为了讨论这个问题，需要引入 PMD 矢量的概念。PMD 矢量可以由输出 PSP 的琼斯矢量得到，如下式所示

$$\boldsymbol{\tau} = \tau \boldsymbol{p} = \tau\langle p|\boldsymbol{\sigma}|p\rangle \tag{7.5-29}$$

群时延由式（7.5-26）给出，输出 PSP 的慢模的琼斯矢量 $|p\rangle$ 由式（7.5-27）给出。对于一个均匀双折射率网络或者波阵面，PMD 矢量平行于慢模的偏振方向，其大小由式（7.3-1）给出。

我们也可以通过投影算子和泡利矩阵表示法获得 PMD 矢量。算子（矩阵）可以用特征矢量的投影算子表示为

$$U'U^{-1} = -i\frac{\tau}{2}|p\rangle\langle p| + i\frac{\tau}{2}|p_-\rangle\langle p_-| \tag{7.5-30}$$

式中 $-i\tau/2$ 和 $+i\tau/2$ 是 $U'U^{-1}$ 的特征值，$|p\rangle$ 和 $|p_-\rangle$ 是相应的特征矢量。进而，根据本节的定义，投影算子可写为

$$|p\rangle\langle p| = \frac{1}{2}(I + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})$$
$$|p_-\rangle\langle p_-| = \frac{1}{2}(I + \boldsymbol{p}_-\cdot\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}(I - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \tag{7.5-31}$$

因此，从式（7.5-30）和式 （7.5-31）可以得到

$$U'U^{-1} = -\frac{i}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{7.5-32}$$

或者等价地

$$2iU'U^{-1} = \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_2 - i\tau_3 \\ \tau_2 + i\tau_3 & -\tau_1 \end{bmatrix} \tag{7.5-33}$$

PMD 矢量元可方便地由考察算符 $2iU'U^{-1}$ 的矩阵元得到。根据式（7.5-23），其结果为

$$\tau_1 = 2i(a'a^* + b'b^*)$$
$$\tau_2 = 2\,\mathrm{Im}(a'b - ab') \tag{7.5-34}$$
$$\tau_3 = 2\,\mathrm{Re}(a'b - ab')$$

这些是根据琼斯矩阵 U 的矩阵元（a，b）得到的 PMD 矢量的显式表示式。一旦输出 PMD 矢量得到，输入 PMD 矢量也可以由 $\boldsymbol{\tau}_{in} = R^{-1}\boldsymbol{\tau}$ 获得，这里 R 为代表斯托克斯空间中由于双折射网络导致的偏振状态变化的旋转矩阵。注意$|\boldsymbol{\tau}_{in}|=|\boldsymbol{\tau}|$。

例：均匀双折射光纤。

作为阐述 PMD 矢量概念的例题，我们考虑最简单的单段均匀双折射率的情况。在这种情况下，琼斯矩阵

$$M = \begin{bmatrix} e^{-i\Gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{i\Gamma/2} \end{bmatrix}$$

其中 $\Gamma = \dfrac{\omega}{c}(n_s - n_f)d = \dfrac{\omega}{c}\Delta nd$，因此，$a = e^{-i\Gamma/2}, b = 0$，以及

$$a' = -ia\frac{1}{2}(\frac{d}{c}\Delta n + \frac{\omega d}{c}\frac{d\Delta n}{d\omega})$$

$$b' = 0$$

那么我们根据式（7.5-34）可以得到

$$\tau_1 = 2i(a'a^* + b'b^*) = (\frac{d}{c}\Delta n + \frac{\omega d}{c}\frac{d\Delta n}{d\omega})$$

$$\tau_2 = 2\mathrm{Im}(a'b - ab') = 0$$

$$\tau_3 = 2\mathrm{Re}(a'b - ab') = 0$$

注意，PMD 矢量平行于 S_1 轴（双折射介质的慢轴），大小等于两个偏振模式间的群迟延。

无穷小旋转和微分方程

从刚体力学可知，当旋转为无限小时，旋转定律变得尤为简单。考虑一段无限小的双折射光纤，斯托克斯空间的旋转角正比于光纤段的长度 dz，即

$$\gamma = \beta\, dz = k(n_s - n_f)\, dz = k\, \Delta n\, dz \tag{7.5-35}$$

式中 $\beta = k\Delta n$ 为双折射的度量，n_s 和 n_f 分别为慢模和快模对应的折射率。根据式（7.5-14），表示输入–输出关系的琼斯矩阵可以写为

$$U = I - \frac{i}{2}\beta\, dz\, \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{7.5-36}$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 是斯托克斯空间的旋转轴。根据式（7.5-19），3×3 旋转矩阵可以明确写为

$$R = I + \beta\, dz \begin{bmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{bmatrix} = I + \beta\, dz\, \boldsymbol{r}\times \tag{7.5-37}$$

设无限小旋转之后，输出琼斯矢量可写为 $|v\rangle = |s\rangle + d|s\rangle$，其中 $d|s\rangle$ 是琼斯矢量的微分，表示通过双折射元传输后偏振状态的变化。利用这些矩阵，输入–输出关系可写为

$$|s\rangle + d|s\rangle = U|s\rangle = |s\rangle - \frac{i}{2}\beta\, dz\, \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma}|s\rangle \tag{7.5-38}$$

或者等价地

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}|s\rangle = -\frac{i}{2}\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\sigma}|s\rangle \tag{7.5-39}$$

其中

$$\boldsymbol{\beta} = \beta\boldsymbol{r} = k\,\Delta n\,\boldsymbol{r} \tag{7.5-40}$$

被称为双折射矢量。双折射矢量在斯托克斯空间是实矢量，定义于光纤的各个位置。在每个位置，光纤上 z 和 $z+\mathrm{d}z$ 之间光纤元段 $\mathrm{d}z$ 被看做一个双折射元，在斯托克斯空间中对应一次无限小的旋转。双折射矢量方向平行于斯托克斯空间的旋转轴，对应微分元的偏振态变化，而大小为波数和本地双折射的乘积 $k\Delta n$ 。对于均匀双折射率光纤（或波阵面），双折射矢量平行于慢模的偏振方向（斯托克斯空间）。基于这一定义，如果对所有的 z 有 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}(z)$，则光纤的双折射特性就完全决定了。

应用旋转矩阵 $\boldsymbol{R}$ 和式（7.5-37），斯托克斯空间的输入–输出关系可写为

$$\boldsymbol{s}+\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}+\beta\,\mathrm{d}z\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s} \tag{7.5-41}$$

即

$$\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{s} \tag{7.5-42}$$

这一方程非常有用。如果光纤的双折射矢量 $\boldsymbol{\beta}(z)$ 已知，这个方程可以积分得到光纤上任意 z 处的输出偏振状态。

现在考虑一束具有固定偏态光波通过感兴趣的特定小区域，正如之前已经讨论的情况，输出偏振状态取决于频率。考察输出偏振状态由于频率微小变化 $\mathrm{d}\omega$ 而产生的变化，输出偏振的变化表示为 $\mathrm{d}|s\rangle$，可以描述为琼斯空间和斯托克斯空间的无限小的旋转。在琼斯空间，根据式（7.5-22） 和式（7.5-32），输出偏振态的变化可写为

$$\mathrm{d}|s\rangle = \left(\frac{\partial}{\partial\omega}U\right)U^{-1}|s\rangle\,\mathrm{d}\omega = -\frac{i}{2}\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}\omega\cdot\boldsymbol{\sigma}|s\rangle \tag{7.5-43}$$

即

$$\frac{\partial}{\partial\omega}|s\rangle = -\frac{i}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\sigma}|s\rangle \tag{7.5-44}$$

式中 $\boldsymbol{\tau}$ 是 PMD 矢量，这里我们感兴趣的是输出状态 $|v\rangle$ 作为 z 和 ω 的连续函数的描述。它满足 $|s\rangle \equiv |s(z,\omega)\rangle$ 用来表示在光纤任意点的偏振状态的琼斯矢量。根据式（7.5-39）～（7.5-42），经过一些数学运算，我们可以得到

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{s} \tag{7.5-45}$$

这个微分方程描述了斯托克斯空间中给定任意输入偏振状态，输出偏振态作为频率函数的变化。如果 $\boldsymbol{\tau}$ 是常数，式（7.5-45）可以容易积分，解 $s(\omega)$ 将通过绕轴 $\boldsymbol{\tau}$ 旋转 $s(\omega_0)$ 角度 $\tau(\omega-\omega_0)$ 后得到，这与图 7.7 的描述一致。

动态 PMD 方程

在分析双折射光纤中脉冲展宽中，希望得到一个沿着光纤的 PMD 矢量变化的微分方程。我们知道，PMD 的大小给出脉冲展宽的信息。现在，我们对式（7.5-42）的两边同时对

ω 取偏微分 ，式（7.5-45）的两边同时对 z 取偏微分。消去 $\partial^2 s/\partial z\partial\omega$，得到

$$\frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{\tau}\times \boldsymbol{s})=\frac{\partial}{\partial \omega}(\boldsymbol{\beta}\times \boldsymbol{s}) \tag{7.5-46}$$

利用矢量定义 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，经过数学运算得

$$\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{\tau}=\frac{\partial}{\partial \omega}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\tau} \tag{7.5-47}$$

这是描述光纤中 PMD 矢量变化的微分方程。同样这个方程被作为 PMD 统计理论的基础。给定双折射矢量 $\boldsymbol{\beta}(z,\omega)$，利用式（7.5-47）可得输出 PMD 矢量。

PMD 级联

前面定义的 PMD 矢量是双折射网络中的一个重要参数，它包括输出 PSP 的信息和两个 PSP 之间群时延信息。双折射网络的 PMD 矢量与每个网元的 PMD 矢量都有关系。在这里，我们描述一种获得双折射网络 PMD 的方法。

参考图 7.10，考虑一小单段的双折射光纤，输入–输出关系可以写成

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{s}(z)=R\boldsymbol{s}(0) \tag{7.5-48}$$

其中，R 是 3×3 的旋转矩阵，PMD 矢量可由下面两种方法得到

1. 琼斯矩阵法。
2. PSP 方法。

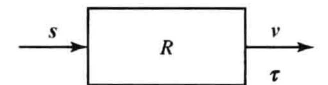


图 7.10　一个双折射光纤系统线性输入–输出关系。在图中，R 是 3×3 旋转矩阵，它将 $z=0$ 处输入斯托克斯矢量转化为 z 处的输出斯托克斯矢量 $\boldsymbol{v}=s(z)$。τ 是双折射光纤系统的 PMD 矢量

琼斯矩阵法

从琼斯公式出发

$$|v\rangle=|s(z)\rangle=U|s\rangle \tag{7.5-49}$$

式中 $\boldsymbol{U}$ 是琼斯矩阵。一旦得到琼斯矩阵，由式（7.5-34），PMD 矢量即可获得。

交替地，我们能找到 $\boldsymbol{U}$ 的特征矢量。这两个特征矢量的斯托克斯矢量决定了旋转轴 R，而特征值的相位决定了旋转角。这些特征值和特征矢量唯一地决定了 3×3 旋转矩阵 $\boldsymbol{R}$。根据式（7.5-19）一旦 R 获得，PMD 矢量便可以得到，利用式（7.5-45），我们有

$$\frac{\partial \boldsymbol{s}(z)}{\partial\omega}=\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{s}(z)=\boldsymbol{\tau}\times R\boldsymbol{s}(0)=\frac{\partial R}{\partial\omega}\boldsymbol{s}(0) \tag{7.5-50}$$

既然 $\boldsymbol{s}(0)$ 是任意的，我们得到

$$\partial R/\partial\omega=\boldsymbol{\tau}\times R$$

即

$$\boldsymbol{\tau}\times=\frac{\partial R}{\partial\omega}R^{-1} \tag{7.5-51}$$

根据旋转矩阵，这一方程可被用来获得 PMD 矢量的三个矢量元。

PSP 方法

在 PSP 方法中，我们首先通过解本征矢量方程（7.5-23）得到主偏振状态，并获得本征矢量和特征值。PMD 矢量的大小是两个 PSP 之间的群时延，而 PSP 矢量的方向平行于慢 PSP 模的偏振方向。或者，PMD 矢量可由式（7.5-29）得到，这里 $|p\rangle$ 是慢 PSP 模的琼斯矢量。

一旦双折射网络的 PMD 得到，我们就能得到一系列双折射网络的 PMD。下面我们从两个级联的双折射网络讨论起。

两个级联双折射网络的 PMD

参考图 7.11，考虑两段双折射网络的级联，$\boldsymbol{\tau}_1$ 和 $\boldsymbol{\tau}_2$ 分别为各段的 PMD 矢量。

设 $\boldsymbol{\tau}$ 为整个系统的总 PMD 矢量，见图 7.9，我们需要由 $\boldsymbol{\tau}_1$ 和 $\boldsymbol{\tau}_2$ 得到总的 PMD 矢量 $\boldsymbol{\tau}$。设 $\boldsymbol{R}$ 为系统的总旋转矩阵 $\boldsymbol{R}=R_1R_2$。根据式（7.5-51），PMD 矢量 $\boldsymbol{\tau}$ 可写成 $\boldsymbol{\tau}\times=\partial R/\partial\omega R^{-1}$，利用 $R=R_1R_2$，其中，R_1 和 R_2 为各段的 3×3 旋转矩阵，得到

$$\boldsymbol{\tau}\times=\frac{\partial R}{\partial\omega}R^{-1}=\frac{\partial(R_2R_1)}{\partial\omega}(R_2R_1)^{-1}=\frac{\partial R_2}{\partial\omega}R_1R_1^{-1}R_2^{-1}+R_2\frac{\partial R_1}{\partial\omega}R_1^{-1}R_2^{-1} \tag{7.5-52}$$

利用 $R_1R^{-1}=1$ 和 $\boldsymbol{\tau}_1\times=(\partial R_1/\partial\omega)R_1^{-1}$，上面的方程可简化为

$$\boldsymbol{\tau}\times=\frac{\partial R}{\partial\omega}R^{-1}=\frac{\partial R_2}{\partial\omega}R_2^{-1}+R_2\boldsymbol{\tau}_1\times R_2^{-1}=\boldsymbol{\tau}_2\times+(R_2\boldsymbol{\tau}_1)\times \tag{7.5-53}$$

图 7.11　两段双折射率介质的级联

最后一个等号成立是因为 $R_2\boldsymbol{\tau}_1\times R_2^{-1}$ 是矩阵 $\boldsymbol{\tau}_1\times$ 经过坐标旋转 R_2 转变而来的，我们可以写成 $(R_2\boldsymbol{\tau}_1)\times$，因此

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}_2+R_2\boldsymbol{\tau}_1 \tag{7.5-54}$$

这是 PMD 矢量的基本级联法则。根据这个方程，总的 PMD 矢量是最后网元段的 PMD 矢量加上前网元段的经过最后网元段的 3×3 旋转矩阵旋转之后 PMD 矢量的和。

例：N 个级联段的 PMD 矢量。

考虑三段双折射网段的级联，$\boldsymbol{\tau}_1$，$\boldsymbol{\tau}_2$，$\boldsymbol{\tau}_3$ 是各个网段的 PMD 矢量。总的 PMD 矢量为：

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}_3+R_3(\boldsymbol{\tau}_2+R_2\boldsymbol{\tau}_1)=\boldsymbol{\tau}_3+R_3\boldsymbol{\tau}_2+R_3R_2\boldsymbol{\tau}_1 \tag{7.5-55}$$

基本的级联法则扩展到 N 段双折射率光纤为

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}_N+R_N\boldsymbol{\tau}_{N-1}+R_NR_{N-1}\boldsymbol{\tau}_{N-2}+R_NR_{N-1}R_{N-2}\boldsymbol{\tau}_{N-3}+\cdots+R_NR_{N-1}\cdots R_2\boldsymbol{\tau}_1 \tag{7.5-56}$$

如果我们定义

$$R(N,n)=R_N R_{N-1} R_{N-2}\cdots R_{n+1} R_n \tag{7.5-57}$$

那么 N 段的级联法则可以写为

$$\boldsymbol{\tau}=\sum_{n=1}^{N} R(N,n+1)\boldsymbol{\tau}_n \tag{7.5-58}$$

$\boldsymbol{\tau}_n$ 是第 n 段的 PMD 矢量。

无穷小段的 PMD 矢量

无穷小段的双折射光纤尤其简单。

根据式（7.5-37），无穷小段的双折射光纤的3×3 旋转矩阵可以写为

$$R=I+\mathrm{d}z\,\boldsymbol{\beta}\times \tag{7.5-59}$$

式中 $\boldsymbol{\beta}$ 是双折射矢量，$\mathrm{d}z$ 是光纤元的长度。分别对 $\boldsymbol{\omega}$ 求导，得到

$$\frac{\partial}{\partial\omega}R=\mathrm{d}z\frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial\omega}\times \tag{7.5-60}$$

旋转矩阵的逆矩阵可以写为

$$R^{-1}=I-\mathrm{d}z\,\boldsymbol{\beta}\times \tag{7.5-61}$$

将式（7.5-60） 和式（7.5-61）代入式（7.5-51），得到

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial\omega}\mathrm{d}z \tag{7.5-62}$$

这就是无穷小段的双折射光纤的 PMD 矢量表达式。同样的结果可以通过对动态方程的积分并忽略二阶项 $\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}z$ 得到。对于均匀双折射率光纤，PMD 矢量和双折射率矢量都平行于慢模的偏振方向。表 7.2 是一些简单的双折射元的 PMD 矢量和双折射矢量。

表 7.2　一些简单双折射元的双折射矢量和 PMD 矢量

物理对象	双折射矢量	PMD 矢量
双折射为 Δn，厚度为 d，方位角 ψ=0（慢轴与 x 轴之间的夹角）的波片	$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}k\,\Delta n$	$\boldsymbol{\tau}=\tau\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$
双折射为 Δn，厚度为 d，方位角 ψ（慢轴与 x 轴之间的夹角）的波片	$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}\cos(2\psi)\\\sin(2\psi)\\0\end{bmatrix}k\,\Delta n$	$\boldsymbol{\tau}=\tau\begin{bmatrix}\cos(2\psi)\\\sin(2\psi)\\0\end{bmatrix}$
旋转角为的 $\gamma/2$ 偏振旋转器（双折射为 Δn，厚度为 d）	$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}k\,\Delta n$	$\boldsymbol{\tau}=\tau\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

注：表中 $\tau=d\,\partial(k\Delta n)/\partial\omega$ 是两个偏振模之间的群时延。

利用式（7.5-62）和式（7.5-58）中的 $\boldsymbol{\tau}_n$，可得到下面的级联规则的积分表达式

$$\boldsymbol{\tau}(L)=\int_0^L R(L,z)\frac{\partial\boldsymbol{\beta}(z)}{\partial\omega}\mathrm{d}z \tag{7.5-63}$$

式中，L 是双折射光纤的长度，$R(L,z)$ 是对应于（z，L）之间光纤段的3×3 旋转矩阵。

PMD 矢量以及脉冲展宽

前面所讨论的 PMD 矢量是双折射网络中由于 PMD 而导致的脉冲展宽的一种量度。如 7.3 节所讨论的情况以及根据式（7.3-11），在双折射网络中由于 PMD 导致的光脉冲展宽可以用输入的 PMD 矢量表示为

$$(\Delta\tau_b)^2 = \frac{1}{4}[|\boldsymbol{\tau}_{\text{in}}|^2 - (\boldsymbol{\tau}_{\text{in}} \cdot s)^2] = \frac{1}{4}[|\boldsymbol{\tau}|^2 - (\boldsymbol{\tau}_{\text{in}} \cdot s)^2] \tag{7.5-64}$$

其中 $\boldsymbol{\tau}_{\text{in}}$ 是输入的 PMD 矢量，$\boldsymbol{\tau} = R\boldsymbol{\tau}_{\text{in}}$ 是输出的 PMD 矢量，$\boldsymbol{s}$ 是输入波的斯托克斯矢量（注意 $|\boldsymbol{\tau}_{\text{in}}| = |\boldsymbol{\tau}|$）。我们注意到当输入的斯托克斯矢量 $\boldsymbol{s}$ 沿着输入 PMD 矢量 $\boldsymbol{\tau}_{\text{in}}$（或输入 PSP）时，一阶 PMD 展宽为 0。对于一束非偏振波 $\boldsymbol{\tau}_{\text{in}} \bullet s = 0$，根据式（7.5-64）或式（7.3-11），PMD 展宽为

$$(\Delta\tau_b)^2 = \frac{1}{4}|\boldsymbol{\tau}|^2 \tag{7.5-65}$$

其中 $\boldsymbol{\tau}$ 是双折射网络的 PMD 矢量。如果双折射网络由 N 个双折射元（光纤）组成，那么根据前面所说的串联规则（7.5-56），整个网络的 PMD 矢量就是各个双折射元的 PMD 矢量（$\boldsymbol{\tau}_n$，$n = 1,2,3,\cdots,N$）之和。为了更好地解释 PMD 矢量的串联规则，我们来看下面的例子。

例：两个串联的均匀双折射元。

参看图 7.12，我们考虑一束光通过两个串联的均匀双折射元。假设慢轴方向为 ψ_1,ψ_2（以 x 轴为参考轴）。根据上面的讨论以及表 7.2，每个元在斯托克斯空间的 PMD 矢量为

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \tau_1 \begin{bmatrix} \cos(2\psi_1) \\ \sin(2\psi_1) \\ 0 \end{bmatrix} \text{和} \boldsymbol{\tau}_2 = \tau_2 \begin{bmatrix} \cos(2\psi_2) \\ \sin(2\psi_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中 $\tau_1 = d_1 \partial(k\Delta n_1)/\partial\omega, \tau_2 = d_2 \partial(k\Delta n_2)/\partial\omega$，$\Delta n_1$ 和 Δn_2 是双折射率，d_1 和 d_2 是双折射元的长度。这两个 PMD 矢量位于邦加球的等赤道面上。它们偏离 s_1 轴的角度分别为 $2\psi_1$ 和 $2\psi_2$（如图 7.12）。

整个系统的总 PMD 矢量可以通过串联规则（7.5-54）来求出。首先我们绕着第二个双折射元的 PMD 矢量 $\boldsymbol{\tau}_2$ 将第一个双折射元 PMD 矢量 $\boldsymbol{\tau}_1$ 旋转一个角度 Γ_2。那么整个 PMD 矢量就是 τ_2 和 $R_2\tau_1$ 的矢量和，如图 7.12 所示。通过简单的代数运算，可以得到总 PMD 矢量的模为

$$\boldsymbol{\tau}^2 = \tau_1^2 + \tau_2^2 + 2\tau_1\tau_2\cos[2(\psi_2 - \psi_1)] \tag{7.5-66}$$

根据式（7.5-65），总 PMD 矢量的模是一束非偏振光展宽的一种度量。由于总 PMD 矢量取决于这两个双折射元慢轴的相对方位角，因此其的模可以在 $(\tau_1 + \tau_2)$ 和 $|\tau_1 - \tau_2|$ 之间变化，具体值取决于 $(\psi_2 - \psi_1)$。如果第二个双折射元的慢轴对于 $R_2\tau_1$ 这个 PMD 矢量完全随机地旋转，那么式（7.5-66）右边的第三项将平均为 0。在此种情况下，根据式（7.5-65），脉冲展宽就是 $(\boldsymbol{\tau}_1^2 + \boldsymbol{\tau}_2^2)/4$。换言之，最后一个双折射元的 PMD 矢量 $\boldsymbol{\tau}_2$ 贡献了一个额外的展宽 $\boldsymbol{\tau}_2^2/4$。基于这个结论，可以推广，一个由 N 个双折射元组成，慢轴为任意偏向的系统的脉冲展宽可以写为

$$(\Delta\tau_b)^2 = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N} |\boldsymbol{\tau}_n|^2 \tag{7.5-67}$$

式中，$\boldsymbol{\tau}_n$ 是第 n 个双折射元的 PMD 矢量。很重要的一点就是，这只是一个纯假设的情况。而在实际的光纤网络中，每一个双折射元件的慢轴取向可能并不是完全随机的。

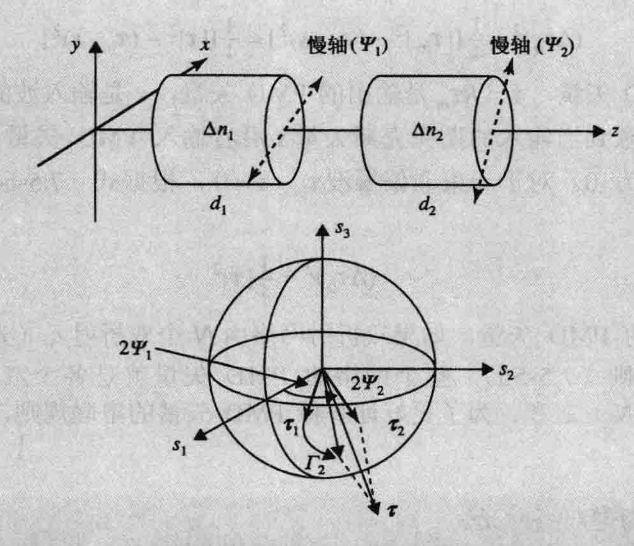


图 7.12　一束光在由两个双折射元级联的系统中传输的示意图，它们的慢轴方位角分别为 Ψ_1 和 Ψ_2。下面的图是 PMD 矢量的邦加球，以及矢量 $\boldsymbol{\tau}_2$ 和 $R_2\boldsymbol{\tau}_1$。R_2 是绕矢量 $\boldsymbol{\tau}_2$ 旋转角度所得 Γ_2，其中 $\Gamma_2=d_2k\Delta n_2$

7.6　高阶 PMD 和色散补偿器

前面所述的偏振主态(PSP)在所谓的一阶 PMD 补偿器（PMDC）中是非常有用的。图 7.13 给出了一个补偿器的示意图。一束输入的非偏振光被分解成两个小的脉冲。这两个小的脉冲分别沿着快 PSP 模和慢 PSP 模方向方向偏振。这两个椭圆偏振的模式是相互正交的。在双折射网络的输出端，由于群时延差的存在，这两个脉冲就被分开来了。它们沿着输出的 PSP 方向偏振。通过在合适的方向加入一个 1/4 波片，这两个偏振模就能转换成线性偏振态。那么一个具有合适相位延迟的双折射波片就可以用来补偿在这两个模式之间产生的时延差。这样的话，就可以在输出端得到一个单一的脉冲，从而消除了由于 PMD 而产生的脉冲展宽。

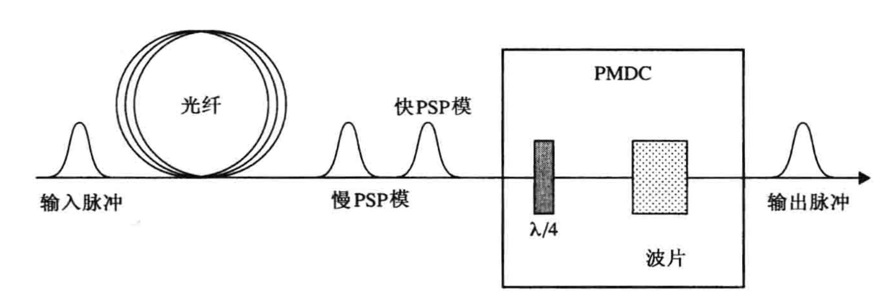


图 7.13　一阶 PMDC 的示意图

偏振模色散（PMD）是目前影响光通信系统中超高速传输的主要因素。如本章前面几节所述，PMD 主要表现在一对偏振主态(PSP)和微分群时延差（DGD）。在低速通信系统中，在信号频谱中心（通常是载波频率）的 PSP 和 DGD 就足以充分地描述 PMD 在传输信号谱上的影响了。随着通信速率的提高，信号的谱宽也随着相应地增加。在中心频率的 PSP 和 DGD 不再是它们在整个信号谱宽上的典型代表了。在这种情况下，我们需要考虑二阶 PSP 和 DGD 的变化。此外，我们需要找到能够消除高速信号带宽上的 PMD 的补偿器。

通常所说的高阶 PMD，以及在高速信号带宽上的一阶 PSP 和 DGD，这些都促使人们发展一种描述它们的分析工具。对于高阶 PMD，文献中有好几种描述方法。最常用的方法是基于输出 PMD 矢量 $\boldsymbol{\tau}$，它在没有偏振依赖损耗（PDL）的情形是一个三维矢量的实数，幅度等于 DGD，方向平行于邦加球上输出 PSP 慢模的方向。采用这种方法，高阶 PMD 就可以采用 PMD 矢量对频率的微分来描述了[2,4]。

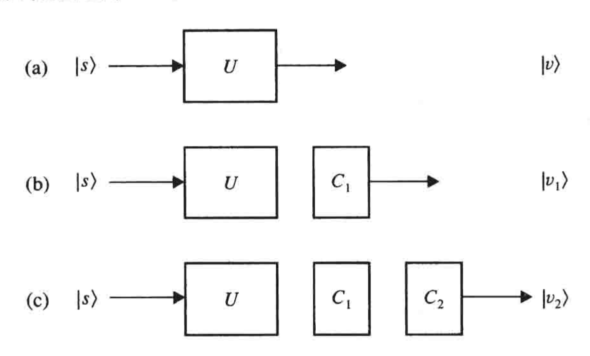


图 7.14　PMD 补偿器示意图以及输入输出琼斯矢量。
U 是光纤的琼斯矩阵；C_1 和 C_2 是补偿器的琼斯矩阵

这里我们给出一种高阶 PMD 的一般描述方法，同时讨论对高阶 PMD 的光学补偿方法。采用琼斯矩阵方法，通过考虑琼斯矩阵方程的高阶微分[6~8]，我们实现了 Pool 和 Wagner 提出的现象学方法[1]。参看图 7.14，我们考虑了一种光纤，它的双折射特性是用琼斯矩阵 $\boldsymbol{U}$ 来描述的。输入输出关系如下

$$|v\rangle = U|s\rangle \tag{7.6-1}$$

式中 $|s\rangle$ 是任意输入的琼斯矢量，$|v\rangle$ 是相应的输出琼斯矢量。

一阶 PSP 满足以下矢量方程：

$$\frac{\partial}{\partial\omega}|v\rangle = \left(\frac{\partial}{\partial\omega}U\right)|s\rangle = -i\delta_1|v\rangle \tag{7.6-2}$$

式中 $|s\rangle$ 是固定的输入偏振态，δ_1 是本征值。DGD 就是两个本征值之差（$\delta_{1+}-\delta_{1-}$）。为了方便起见，我们采用如下的符号和本征值：

$|p_{1+}\rangle$　　本征值为 δ_{1+} 的慢一阶输出 PSP 的单位琼斯矢量

$|p_{1-}\rangle$　　本征值为 δ_{1-} 的快一阶输出 PSP 的单位琼斯矢量

假设 C_1 表示一阶 PMD 补偿器的琼斯矩阵。那么根据定义，C_1 一定满足如下等式

$$\frac{\partial}{\partial\omega}|v_1\rangle = \left(\frac{\partial}{\partial\omega}C_1U\right)|s\rangle = 0 \tag{7.6-3}$$

式中$|s\rangle$是固定输入的偏振态，C_1U是光纤加补偿器的琼斯矩阵，见图 7.14（b）。有了补偿器C_1，整个系统的 DGD 就变为 0 了。计算式（7.6-3）中的微分，可以得到

$$(C_1'U + C_1U')|s\rangle = 0 \tag{7.6-4}$$

其中撇号表示对ω求微分。为了求出琼斯矩阵C_1，我们设$|s\rangle$为输入的 PSP。根据式（7.6-1）和式（7.6-2），得到$U|s\rangle = |p_1\rangle$和$U'|s\rangle = -i\delta_1|p_1\rangle$，其中$|p_1\rangle$是输出的一阶 PSP。上面的方程就可以成为

$$[C_1' + C_1(-i\delta_1)]|p_1\rangle = 0 \tag{7.6-5}$$

利用一阶输出 PSP 作为基元，一阶 PMD 补偿器的琼斯矩阵C_1可以写为

$$C_1 = \begin{bmatrix} \exp(-i\delta_{1+}\omega) & 0 \\ 0 & \exp(-i\delta_{1-}\omega) \end{bmatrix}_{\text{PSP}} \tag{7.6-6}$$

利用下面的公式，可以得到xy坐标系中的琼斯矩阵C_1

$$\langle i|C_1|j\rangle = \sum_{\alpha\beta}\langle i|\alpha\rangle\langle\alpha|C_1|\beta\rangle\langle\beta|j\rangle \quad \text{with } i, j = x, y \quad \text{and} \quad \alpha, \beta = |p_{1+}\rangle, |p_{1-}\rangle \tag{7.6-7}$$

xy坐标系中的琼斯矩阵也可以写成

$$C_1 = \begin{bmatrix} p_{1+x} & p_{1-x} \\ p_{1+y} & p_{1-y} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \exp(-i\delta_{1+}\omega) & 0 \\ 0 & \exp(-i\delta_{1-}\omega) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{1+x} & p_{1+y} \\ p_{1-x} & p_{1-y} \end{bmatrix} \tag{7.6-8}$$

其中p_{1+x}，p_{1+y}，p_{1-x}，p_{1+y}是一阶输出 PSP 琼斯矢量的xy分量。可以看出，上式中的第一个矩阵由两列一阶输出 PSP 分量组成，第三个矩阵是由两行一阶输出 PSP 分量组成。上式就是一阶 PMD 补偿器的琼斯矩阵的表示式。

现在我们考虑二阶效应。参看图 7.14（b），输入输出的琼斯矢量关系可以写成

$$|v_1\rangle = C_1U|s\rangle \tag{7.6-9}$$

由于一阶 PMD 补偿器的出现，所有的输入态都是一阶主态，并且 DGD 为零。正是由于一阶情况下 DGD 为零，我们才需要考虑二阶效应。这点在信号带宽特别宽的高速传输系统中尤为重要。二阶 PMD 采用输出的偏振态和相关的 DGD 的二阶微分变量来表示。二阶 PSP 满足如下矢量方程：

$$\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}|v_1\rangle = \left(\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}C_1U\right)|s\rangle = -i\delta_2|v_1\rangle \tag{7.6-10}$$

其中$|s\rangle$是固定输入的偏振态，δ_2是本征值。设二阶输出的 PSP 和它们的特征值可以写成如下表达式：

$|p_{2+}\rangle$　本征值为δ_{2+}的慢二阶输出 PSP 的单位琼斯矢量

$|p_{2-}\rangle$　本征值为δ_{2-}的快二阶输出 PSP 的单位琼斯矢量

这两个本征模之间的 DGD 为

$$\text{DGD} = (\delta_{2+} - \delta_{2-})(\omega - \omega_0) \tag{7.6-11}$$

其中ω_0是信号频谱的中心频率，δ_{2+}和δ_{2-}是本征值。

假设C_2代表二阶 PMD 补偿器的琼斯矩阵，参看图 7.14（c）。那么根据定义，C_2一定满足

$$\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}|v_2\rangle = \left(\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}C_2M_1\right)|s\rangle = 0 \tag{7.6-12}$$

其中$|s\rangle$是固定输入偏振态，M_1是光纤加补偿器的琼斯矩阵，见图 7.14（b）

$$M_1 = C_1U \tag{7.6-13}$$

由于补偿器C_2的出现，整个系统的二阶 DGD 为 0 图 7.14（c）。

简化式（7.6-12），得到

$$(C_2''M_1 + 2C_2'M_1' + C_2M_1'')|s\rangle = 0 \tag{7.6-14}$$

为了求出琼斯矩阵C_2，假设$|s\rangle$是输入的二阶 PSP。根据式（7.6-3），式（7.6-9）及式（7.6-10），有$M_1|s\rangle=|p_2\rangle$，$M_1'|s\rangle=0$，$M_1''|s\rangle=-i\delta_2|p_2\rangle$，其中$|p_2\rangle$是二阶输出 PSP。方程式（7.6-14）成为

$$(C_2'' + C_2(-i\delta_2))|p_2\rangle = 0 \tag{7.6-15}$$

采用二阶 PSP 作为基元，则二阶 PMD 补偿器的琼斯矩阵C_2可以写为

$$C_2 = \begin{bmatrix} \exp(-i\frac{1}{2}\delta_{2+}\omega^2) & 0 \\ 0 & \exp(-i\frac{1}{2}\delta_{2-}\omega^2) \end{bmatrix}_{\text{PSP}} \tag{7.6-16}$$

这就是以二阶 PSP 为轴时坐标系统中的琼斯矩阵表示。

利用式（7.6-7），在xy坐标中可以将琼斯矩阵C_2写成

$$C_2 = \begin{bmatrix} p_{2+x} & p_{2-x} \\ p_{2+y} & p_{2-y} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \exp(-i\frac{1}{2}\delta_{2+}\omega^2) & 0 \\ 0 & \exp(-i\frac{1}{2}\delta_{2-}\omega^2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{2+x} & p_{2+y} \\ p_{2-x} & p_{2-y} \end{bmatrix} \tag{7.6-17}$$

其中p_{2+x}，p_{2+y}，p_{2-x}，p_{2-y}是二阶输出 PSP 琼斯矢量的xy分量。

可以看出，在上面方程中的第一个矩阵由两列二阶 PSP 组成，第三个矩阵是由两行二阶 PSP 组成。上式便是二阶 PMD 补偿器的琼斯矩阵的详细表达式。由于一阶和二阶 PMD 补偿器的出现，那么整个 DGD 对频率的二阶微分都为 0。在式（7.6-17）中，第二个矩阵表示的是一个波片，它的 DGD 正好由式（7.6-11）给出。这样的一个波片由具有双折射色散的双折射材料组成。

一旦通过二阶偏振模色散补偿器把二阶的 PMD 给消除了，那么我们就需要考虑三阶偏振模色散效应了。通过进行如上类似的分析，也可以得到三阶 PMD 补偿器的琼斯矩阵。这样的过程可以一直进行下去，直到在我们所感兴趣的那个带宽上偏振模色散效应被完全消除。

习题

7.1　证明：g^2不随ω变化的平方律折射率光纤，其脉冲的展宽$\Delta\omega$可用下式表示

$$\Delta\tau \cong \frac{L}{c}\left|\frac{n^2g^2}{ck^3}(l+m+1)^2 - \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}\right|\Delta\omega$$

其中l和m是横模指数。在表达式中，正比于$(l+m+1)^2$的那项是模式色散，正比于$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}$的项是材料色散。

7.2　证明：傅里叶频谱式（7.2-3）的半高全宽（FWHM）由下式给出

$$\Delta\Omega_{\text{FWHM}} = \frac{4\ln 2}{\tau_0} = 2\pi\Delta\upsilon_{\text{FWHM}}$$

其中$\tau_0 = \sqrt{2\ln 2/\alpha}$是半高全宽。同时证明带宽也可以写成

$$\Delta\lambda = \frac{2\ln 2}{\pi c}\frac{\lambda^2}{\tau_0}$$

7.3　在光通信系统中，信号脉冲通常是梯形的形状，如图 P7.3 所示。

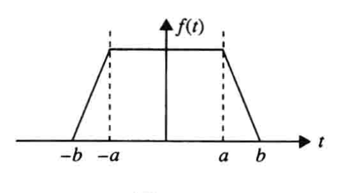


图 P7.3

（a）证明上述脉冲的解析表达式可写成如下形式

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < |t| < a \\ \dfrac{b-|t|}{b-a}, & a < |t| < b \\ 0, & \text{其 他} \end{cases}$$

（b）证明：它的傅里叶变换可以写成

$$F(\Omega) = a\frac{\sin\Omega a}{\pi\Omega a} + b\frac{\sin\Omega b - \sin\Omega a}{\pi\Omega(b-a)} - \frac{\cos\Omega b - \cos\Omega a + \Omega b\sin\Omega b - \Omega a\sin\Omega a}{\pi\Omega^2(b-a)}$$

$$= \frac{\cos\Omega a - \cos\Omega b}{\pi\Omega^2(b-a)}$$

（c）证明：在$b = a$的极限下，傅里叶变换变成 $F(\Omega) = a\dfrac{\sin\Omega a}{\pi\Omega a}$

（d）假设传输的梯形脉冲$a = 40\text{ps}$，$b = 60\text{ps}$，并且在$D = 17$ ps/nm • km 在单模光纤中传输。请估算在100km处的光纤末端的脉冲宽度，并求出脉冲的形状。

7.4　考虑如下的脉冲 $f(t) = \begin{cases} \cos(\dfrac{\pi t}{2b}), & -b < t < b \\ 0, & \text{其 他} \end{cases}$

（a）求出脉冲强度的全高半宽。[答案：b。]

（b）证明：它的傅里叶变换如下

$$F(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin(\Omega-\alpha)b}{(\Omega-\alpha)} + \frac{\sin(\Omega+\alpha)b}{(\Omega+\alpha)}\right)$$

其中$\alpha = \pi/2b$。

（c）假设脉宽为$b = 100\text{ps}$余弦脉冲$D = 17$ ps/nm • km 在单模光纤中传输，请估算在

100km 处的光线末端处的脉宽，并求出脉冲形状。

7.5　考虑一个普通的脉冲 $f(t)$，它的傅里叶变换 $F(\Omega)$：$f(t)=\int F(\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\mathrm{d}\Omega$，假设脉冲函数和它的傅里叶谱均具有零值平均。$(\Delta t)^2$ 为 $f(t)$ 的变化，$(\Delta\Omega)^2$ 为 $F(\Omega)$ 的变化。它们定义如下：$(\Delta t)^2=\dfrac{\int f^*(t)t^2f(t)\mathrm{d}t}{\int f^*(t)f(t)\mathrm{d}t}\equiv\dfrac{\langle f|t^2|f\rangle}{\langle f|f\rangle}$

$$(\Delta\Omega)^2=\frac{\int F^*(\Omega)\Omega^2F(\Omega)\mathrm{d}\Omega}{\int F^*(\Omega)F(\Omega)\mathrm{d}\Omega}\equiv\frac{\langle F|\Omega^2|F\rangle}{\langle F|F\rangle}$$

（a）证明：

$$\frac{\partial}{\partial t}f(t)=\int i\Omega F(\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\mathrm{d}\Omega$$

以及

$$(\Delta\Omega)^2=\frac{1}{\int f^*(t)f(t)\mathrm{d}t}\int f^*(t)(-\frac{\partial^2}{\partial t^2})f(t)\mathrm{d}t$$

（b）定义如下一对厄米算符：$A=\lambda t+i\Omega/\lambda$，$A^{\dagger}=\lambda t-i\Omega/\lambda$，$\Omega$ 用 $-i\partial/\partial t$ 算子代替。证明：$\langle f|A^{\dagger}A|f\rangle=\left\langle f\left|\lambda^2t^2-\dfrac{\partial^2}{\lambda^2\partial t^2}-1\right|f\right\rangle$

上面的积分对于所有的 λ 都是正的。

（c）应用（b）式，证明：$\Delta t\Delta\Omega\geqslant\dfrac{1}{2}$，这就是不确定度关系。

（d）证明：对于高斯脉冲上式同样成立。

（e）与在习题 7.2 中讨论过的 FWHM 值中 Δt 和 $\Delta\Omega$ 标准偏差关系不一样，请证明：$\Delta t_{\mathrm{FWHM}}\Delta\Omega_{\mathrm{FWHM}}=4\ln 2=2.77$。

7.6　假设 n_s 和 n_f 分别是慢模和快模的折射率。偏振模色散 PMD 定义如下

$$\Delta\tau=\frac{d}{\upsilon_{gs}}-\frac{d}{\upsilon_{gf}}$$

其中，υ_{gs} 和 υ_{gf} 是模式的群速度。

请证明：$\Delta\tau=(\dfrac{d}{c}\Delta n+\dfrac{\omega d}{c}\dfrac{\partial\Delta n}{\partial\omega})$。

7.7　在小段光纤中的偏振模色散 PMD 是与光纤长度成比例的，在一具有随机双折射效应的长段光纤中，PMD 与光纤长度的平方根成比例。考虑光纤由 N 段组成，其相关参数如 $d_i=L/N$，$\tau_i=\tau_1$

（a）证明：$(\Delta\tau_b)^2=\dfrac{1}{4}N\tau_1{}^2=\dfrac{1}{4}N(\dfrac{\Delta n}{c}+\dfrac{\omega}{c}\dfrac{\partial\Delta n}{\partial\omega})^2d_1{}^2$

（b）证明脉冲展宽可以写成：

$$(\Delta\tau_b)=\frac{1}{2}\sqrt{N}(\frac{\Delta n}{c}+\frac{\omega}{c}\frac{\partial\Delta n}{\partial\omega})d_1=\frac{1}{2}(\frac{\Delta n}{c}+\frac{\omega}{c}\frac{\partial\Delta n}{\partial\omega})\sqrt{Ld_1}$$

7.8　系统由两段均匀双折射光纤组成。设 θ 是这两根光纤中的慢模偏振方向之间的角

度。τ_1，τ_2 定义如下

$$\tau_1=(\frac{d_1}{c}\Delta n_1+\frac{\omega d_1}{c}\frac{\partial n_1}{\partial\omega})\qquad \tau_2=(\frac{d_2}{c}\Delta n_2+\frac{\omega d_2}{c}\frac{\partial n_2}{\partial\omega})$$

$$t_1=(\frac{d_1}{c}\bar{n}_1+\frac{\omega d_1}{c}\frac{\partial\bar{n}_1}{\partial\omega})\qquad t_2=(\frac{d_2}{c}\bar{n}_2+\frac{\omega d_2}{c}\frac{\partial\bar{n}_2}{\partial\omega})$$

其中 d_1，d_2 是光纤的长度，Δn_1，Δn_2 是光纤的双折射值，$\bar{n}_1$，$\bar{n}_2$ 是平均折射率。一束强度为 $I_0(t)$ 的非偏振光入射到该光纤系统。为了简单起见，假设在 $t=0$ 时，$I_0(t)$ 具有中心值。

（a）请证明，在第一段光纤末端，强度为

$I_1(t)=\frac{1}{2}I_0(t-t_1-\tau_1/2)+\frac{1}{2}I_0(t-t_1+\tau_1/2)\equiv I_{1s}(t)+I_{1f}(t)$，其中 t_1 是两偏振模的平均群时延，I_{1s} 是慢模的强度，I_{1f} 是快模的强度。

（b）证明：在第二段光纤末端，强度为

$$I_2(t)=I_{2s}(t)+I_{2f}(t)$$

其中

$$I_{2s}(t)=\gamma I_{1s}(t-t_2-\tau_2/2)+(1-\gamma)I_{1f}(t-t_2-\tau_2/2),$$

$$I_{2f}(t)=\gamma I_{1f}(t-t_2+\tau_2/2)+(1-\gamma)I_{1s}(t-t_2+\tau_2/2)\qquad \gamma=\cos^2\theta$$

（c）证明：$\tau_{g1}\equiv\int tI_1(t)\,\mathrm{d}t=t_1$ 和 $\tau_{g2}\equiv\int tI_2(t)\,\mathrm{d}t=t_1+t_2$。

（d）证明：

$$b_1^2\equiv\left\langle(t-\tau_{g1})^2\right\rangle\equiv\int(t-\tau_{g1})^2I_1(t)\mathrm{d}t=b_0^2+\frac{1}{4}\tau_1^2$$

$$b_2^2\equiv\left\langle(t-\tau_{g2})^2\right\rangle\equiv\int(t-\tau_{g2})^2I_2(t)\mathrm{d}t=b_0^2+\frac{1}{4}(\tau_1-\tau_2)^2+\gamma\tau_1\tau_2$$

其中，$b_0^2=\int t^2I_0(t)\mathrm{d}t$。

注意，仅当 $\gamma=\frac{1}{2}$ 时 $b_2^2=b_0^2+\frac{1}{4}\tau_1^2+\frac{1}{4}\tau_2^2$ 成立。

7.9 系统结构同习题 7.8。假设第一部分的慢轴的方位角为零（$\varphi_1=0$），θ 是第二部分慢轴的方位角（$\varphi_2=0$）。

（a）请推导，系统的琼斯矩阵可以写成

$$M=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Gamma_2/2}\cos^2\theta+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Gamma_2/2}\sin^2\theta & -i\sin(\Gamma_2/2)\sin(2\theta)\\ -i\sin(\Gamma_2/2)\sin(2\theta) & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Gamma_2/2}\sin^2\theta+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Gamma_2/2}\cos^2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Gamma_1/2} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Gamma_1/2}\end{bmatrix}$$

其中，$\Gamma_1=\Delta n_1d_1\,\omega/c$，$\Gamma_2=\Delta n_2d_2\,\omega/c$。

将矩阵相乘，得到矩阵的元素，写出 a 和 b 的表达式。

（b）证明：题 7.8 中定义的 τ_1 和 τ_2 的表达式如下

$$\tau_1=\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\omega},\quad \tau_2=\frac{\partial\Gamma_2}{\partial\omega}$$

（c）证明：

$$|a'|^2+|b'|^2=\frac{1}{4}(\tau_2-\tau_1)^2+\tau_2\tau_1\cos^2\theta$$

两个偏振主态之间的群时延为

$$\Delta\tau = 2\sqrt{|a'|^2 + |b'|^2} = \sqrt{(\tau_2 - \tau_1)^2 + 4\tau_2\tau_1\cos^2\theta}$$

并且说明当两部分的慢轴相互正交即 $\theta = 90°$ 的时候即 PMD 最小，两慢轴平行即 $\theta = 0$ 时 PMD 最大。

（d）求出偏振主态的琼斯矢量。

（e）输入一束非偏振光，根据式（7.3-9）和式（7.3-11），它的展宽为

$$(\Delta\tau_b)^2 = \frac{1}{4}(\Delta\tau)^2$$

证明：这个展宽表达式与题 7.8（d）中的结果一致。

7.10　（a）利用题 7.9（a）中的矩阵元素，证明：

$$A = a^* a' + bb'^* = -\frac{i}{2}[\tau_1 + \tau_2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)]$$

$$B = a^* b' - a'^* b = -\frac{i}{2}\tau_2 \sin 2\theta \exp(i\Gamma_1)$$

（b）证明：群时延 $\tau = \pm\sqrt{AD - BC} = \pm\sqrt{|A|^2 + |B|}$ 与题 7.9（c）中结果一致。

（c）偏振主态由方程（7.4-9）给出：

$$\boldsymbol{V}_{\text{in}} = \begin{bmatrix} -B \\ A + i\delta \end{bmatrix}$$

其中，$\delta = \tau/2, -\tau/2$。画出偏振椭圆随频率的变化就可以得到 PSP 对频率的依赖性，画出椭圆率和椭圆的倾斜角随频率变化的曲线图。

7.11　（a）证明：式（7.5-10）和式（7.5-11）的琼斯矩阵的特征矢量是相互正交的。

（b）求解式子（7.5-12）。

（c）利用方程（7.5-14），证明：

$$U^\dagger \boldsymbol{\sigma} U = \cos^2(\gamma/2)\boldsymbol{\sigma} + \sin^2(\gamma/2)[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma})\sigma(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma})] + i\sin(\gamma/2)\cos(\gamma/2)[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma})]$$

（d）利用等式 $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3, \sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1, \sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2$，以及 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^3 = 1$，证明：

$$(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = -2i(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\sigma})$$

$$(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = 2\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\sigma}$$

（e）证明：$U^\dagger \boldsymbol{\sigma} U = \cos(\gamma)\boldsymbol{\sigma} + 2\sin^2(\gamma/2)[\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma})] + \sin(\gamma)(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\sigma})$。

（f）利用 $\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{rr} - 1)\boldsymbol{\sigma}$，推导方程（7.5-18）和（7.5-19）。

7.12　一个逆厄米共轭矩阵 A 满足 $A^\dagger = -A$。

（a）利用关系 $|a|^2 + |b|^2 = 1$，试证明式（7.5-23）中矩阵的迹是零。

（b）证明矩阵是逆厄米共轭矩阵。

（c）证明一个逆厄米共轭矩阵的特征值是纯虚数。

[提示：逆厄米共轭矩阵可以写成 $A = iH$，其中 H 是厄米共轭矩阵。]

参考文献

1. Poole, C. D., and R. E. Wagner, Phenomenological approach to polarization dispersion in long single-mode fibers. *Electron. Lett.* **22**(19):1029 (1986).
2. Gordon, J. P., and H. Kogelnik, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **97**(9):4541 (2000).
3. Ciprut, P., B. Gisin, N. Gisin, R. Passy, J. P. Von der Weid, F. Prieto, and C. W. Zimmer, Second-order polarization mode dispersion: impact on analog and digital transmissions. *J. Lightwave Techno.* **16**(5):757 (1998).
4. Poole, C. D., and C. R. Giles, Polarization-dependent pulse compression and broadening due to polarization dispersion in dispersion shifted fibers. *Opt. Lett.* **13**(2):155 (1988).
5. Francia, C., F. Bruyere, D. Penninckx, and M. Chbat, PMD second-order effects on pulse propagation in single-mode optical fibers. *IEEE Photonics Technol. Lett.* **10**(12):1739 (1998).
6. Eyal, A., W. K. Marshall, M. Tur, and A. Yariv, Representation of second-order polarization mode dispersion. *Electron Lett.* **35**(19):1658 (1999).
7. Eyal, A., Y. Li, W. K. Marshall, M. Tur, and A. Yariv, Statistical determination of the length dependence of high-order PMD. *Opt. Lett.* **25**:875 (2000).
8. Li, Y., A. Eyal, P.-O. Hedekvist, and A. Yariv, Measurement of high-order polarization mode dispersion. *IEEE Photonics Techno. Lett.* **12**:861 (2000).

第 8 章　非线性光学

8.0　引言

在第 1 章中我们考虑过线性介质中电磁辐射的传播，介质中的极化与引起极化的电场成正比。本章我们考虑某些晶体中非线性电介质特点所导致的一些结果，除了线性响应外，电场引起的极化与电场的平方成正比。非线性响应能引起一些不同频率的电磁场之间的能量交换，此现象最重要的两个应用是：（1）产生二次谐波，即频率为 ω 的光波通过晶体时，其部分能量转换为频率为 2ω 的波的能量；（2）参变振荡，即在非线性晶体中一个频率为 ω_3 的强泵浦波同时导致频率为 ω_1 和 ω_2 的辐射的产生，它们满足 $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ 。（3）受激拉曼散射（SRS），受激布里渊散射（SBS）等。从这些电介质非线性的物理起源开始，我们先描述一种光波非线性作用的一般方法。然后我们提供在非线性介质中光波间耦合的电磁场公式。二次谐波产生，参变放大，三阶现象包括克尔效应和拉曼散射都将在这一章详细讨论。

8.1　非线性极化的物理起源

在任何真正的原子系统中，由于电场的存在引起的极化现象不是完全跟电场成比例关系的，但是它可以表示成泰勒级数展开，在一个没有损耗的介质中为

$$P_i = \varepsilon_0\chi_{ij}E_j + 2d_{ijk}E_jE_k + 4\chi_{ijkl}E_jE_kE_l + \cdots \tag{8.1-1}$$

这里 P_i 是即时极化强度矢量的分量， E_i 是光波中即时电场矢量的分量 $(i, j, k, l = x, y, z)$ 。在这个求和关系式中， χ_{ij} 代表线性电极化率张量，而 d_{ijk} 和 χ_{ijkl} 分别代表二阶和三阶非线性电极化率张量。因为 E_j E_kE_l 的次序在上述定义中是不相干的，非线性电极化率张量遵循下面的对称

$$\begin{aligned} d_{ijk} &= d_{ikj} \\ \chi_{ijkl} &= \chi_{i[jkl]} \end{aligned} \tag{8.1-2}$$

这里 $[jkl]$ 代表 (jkl) 的任何一个排列。我们知道线性电极化率张量在无损耗介质中是对称的（见习题 1.37）。在外电场不是很强（或者频率很低）的情况下，非线性电极化率张量 d_{ijk} 和 χ_{ijkl} 是可以忽略的。在这种情况下，所有的相关频率都远离吸收线（或者振荡频率），系统无损耗，介质的反应是瞬时的。高阶项可以看成是介电张量的修正。因此，非线性系数 d_{ijk} 和 χ_{ijkl} 在下标变化的情况下保持不变。例如， $\chi_{1231} = \chi_{2113}$ （习题 8.15）。对于二阶非线性电极化率张量 d_{ijk} ，由于对称性，27 个张量元减少到 10 个独立的元。在损耗和色散系统中，d_{ijk} 一般将取决于非线性过程中光波的频率（如频率的相加或者相减， $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ 或 $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$ ）。在这里，非线性系数 d_{ijk} 和 χ_{ijkl} 的对称性对方程（8.1-2）有限制。在本书中，非线性光学系数 $(1,2,3)$ 和 (x, y, z) 是可以相互替换的。如我们可以这样表示 $\chi_{1111} = \chi_{xxxx}$ ，

$\chi_{1122} = \chi_{xxyy}$。

由非线性光学系数 d_{ijk} 和 χ_{ijkl} 所表征的非线性光学响应带来的很多有趣的现象和有用的应用。二阶非线性 $P_i = 2d_{ijk}E_jE_k$ 是二次谐波产生（SHG，频率加倍），频率和差的产生，参量放大和振荡的主要因素。三阶非线性 $P_i = 4d_{ijkl}E_jE_kE_l$ 产生了多种现象，有三次谐波产生（THG），拉曼和布里渊散射，自聚焦，Kerr 效应，光孤子，四波混频和相位调制。在本章中，我们不关心非线性系数 d_{ijk} 和 χ_{ijkl} 的物理起源。我们把它们视为介质参数，仅仅探索非线性带来的电磁现象和可能的应用。

8.2　二阶非线性现象——一般方法

考虑两个光场的非线性耦合，第一个场，用其电场分量来描述，表示为

$$E_j^{\omega_1}(t) = \mathrm{Re}(E_{0j}^{\omega_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1 t}) = \frac{1}{2}(E_{0j}^{\omega_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1 t} + \mathrm{c.c.}) \quad (j = x, y, z) \tag{8.2-1}$$

而圆频率位 ω_2 的第二个场表示为

$$E_k^{\omega_2}(t) = \mathrm{Re}(E_{0k}^{\omega_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_2 t}) = \frac{1}{2}(E_{0k}^{\omega_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_2 t} + \mathrm{c.c.}) \quad (k = x, y, z) \tag{8.2-2}$$

这里 c.c.代表复共轭，$E_{0j}^{\omega_1}$ 和 $E_{0k}^{\omega_2}$ 分别为两个光场的常量振幅。如果介质是非线性的，那么这些场分量的存在可产生频率为 $(n\omega_1 + m\omega_2)$ 的极化光，这里 n 和 m 为任意整数。为了说明这个一般方法，我们考虑在 $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ 处线性极化波的第 i 个笛卡儿坐标中的分量

$$P_i^{\omega_3=\omega_1+\omega_2}(t) = \mathrm{Re}(P_{0i}^{\omega_3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_3 t}) = \frac{1}{2}(P_{0i}^{\omega_3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_3 t} + \mathrm{c.c.}) \quad (i = x, y, z) \tag{8.2-3}$$

这里 $P_{0i}^{\omega_3}$ 为极化光的常量振幅。将我们的注意力集中在方程（8.1-1）的二阶项，即

$$P_i = 2d_{ijk}E_jE_k \tag{8.2-4}$$

我们得到

$$P_i(t) = 2d_{ijk}\frac{1}{2}(E_{0j}^{\omega_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1 t} + E_{0j}^{\omega_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_2 t} + \mathrm{c.c.}) \times \frac{1}{2}(E_{0k}^{\omega_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1 t} + E_{0k}^{\omega_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_2 t} + \mathrm{c.c.}) \tag{8.2-5}$$

仅考虑频率和项

$$P_i^{\omega_1+\omega_2}(t) = \left(\frac{1}{2}d_{ijk}E_{0j}^{\omega_1}E_{0k}^{\omega_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1+\omega_2)t} + \frac{1}{2}d_{ikj}E_{0k}^{\omega_2}E_{0j}^{\omega_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_2+\omega_1)t} + \mathrm{c.c.}\right) \tag{8.2-6}$$

这里我们回顾对指数求和通常规则。在一个无损（即时响应）系统，$d_{ijk} = d_{ikj}$，因此

$$P_i^{\omega_1+\omega_2}(t) = \frac{1}{2}P_{0i}^{\omega_1+\omega_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1+\omega_2)t} + \mathrm{c.c.} = d_{ijk}E_{0j}^{\omega_1}E_{0k}^{\omega_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1+\omega_2)t} + \mathrm{c.c.} \tag{8.2-7a}$$

或者用场振幅表示为

$$P_{0i}^{\omega_1+\omega_2} = 2d_{ijk}E_{0j}^{\omega_1}E_{0k}^{\omega_2} \tag{8.2-7b}$$

需要注意的是不管是考虑和频或者差频，d_{ijk} 通常取决于 ω_1 和 ω_2。我们主要的兴趣将集中在透明无损介质，即系数 d_{ijk} 不取决于涉及的频率或者它们的和频或差频是否产生。

只有非中心对称晶体可以具有一个不为零的 d_{ijk} 张量。这是来自于以下的要求，即在对称晶体中，$E_j^{\omega_1}$ 和 $E_k^{\omega_2}$ 符号的反转必然也导致 $P_i^{\omega_1+\omega_2}$ 符号的反转并且不影响振幅。利用方程式（8.2-7b），我们得到

$$-2d_{ijk}E_{0j}^{\omega_1}E_{0k}^{\omega_2} = 2d_{ijk}(-E_{0j}^{\omega_1})(-E_{0k}^{\omega_2}) \tag{8.2-8}$$

因此 $d_{ijk}=0$。缺乏反演对称性也是线性电光效应（Pockels 效应）和压电性的先决条件，因此所有电光和压电晶体被期望具有二阶（$P\propto E^2$）非线性光学性质。同样的论断也可以推断所有的晶体以及液体和气体被期望具有三阶非线性光学性质。

非线性系数 d_{ijk} 经常在二次谐波产生实验中可以测量，这里 $\omega_1=\omega_2=\omega$。在这种情况下，根据方程（8.2-5），我们有

$$P_i(t) = (\tfrac{1}{2}P_{0i}^{2\omega}e^{i2\omega t} + \text{c.c.}) = 2d_{ijk}(\tfrac{1}{2}E_{0j}^{\omega}e^{i\omega t} + \text{c.c.}) \times (\tfrac{1}{2}E_{0k}^{\omega}e^{i\omega t} + \text{c.c.}) \tag{8.2-9}$$

或者等价地

$$P_{0i}^{2\omega} = d_{ijk}E_{0j}^{\omega}E_{0k}^{\omega} \tag{8.2-10}$$

其中我们观察到重复指数的求和规则。注意方程（8.2-10）和（8.2-7b）中因子 2 是不同的。需要注意的是我们不能通过在方程（8.2-7b）中设 $\omega_1=\omega_2$ 来得到方程（8.2-10），这是方程式（8.2-5）中当 ω_2 趋近 ω_1 时场标准化的结果。

因为方程式（8.2-10）中 j 和 k 的交换没有任何物理意义，我们可以将标号 kj 和 jk 用下面的相应约定指数代替。

$$xx=1,\quad yy=2,\quad zz=3$$
$$yz=zy=4,\quad xz=zx=5,\quad xy=yx=6$$

结果的 d_{iK} 分量（i=1, 2, 3 且 K=1, 2, 3, 4, 5, 6）形成一个 3×6 矩阵，它作用于 E^2 列张量，产生二次谐波非线性极化光的振幅矩阵 $\boldsymbol{P}^{2\omega}$。根据方程（8.2-10），该二次谐波非线性极化振幅矩阵可以被写成

$$\begin{bmatrix} P_{0x}^{2\omega} \\ P_{0y}^{2\omega} \\ P_{0z}^{2\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{0x}^{\omega}E_{0x}^{\omega} \\ E_{0y}^{\omega}E_{0y}^{\omega} \\ E_{0z}^{\omega}E_{0z}^{\omega} \\ 2E_{0y}^{\omega}E_{0z}^{\omega} \\ 2E_{0z}^{\omega}E_{0x}^{\omega} \\ 2E_{0x}^{\omega}E_{0y}^{\omega} \end{bmatrix} \tag{8.2-11}$$

约定的张量 d_{iK} 和压电张量及光电张量一样遵守相同的对称性限制（见第 9 章），并且在给定一个点–群对称性的晶体中拥有相同的形式。这些张量形式在表 8.1 中给出。

表 8.1　所有晶体类型的二阶非线性光学张量约定符号表

六角晶系：	($\bar{1}$, 2/m.mmm.4/m.4/mmm, 3, 3m, 6/m, 6/mmm, m3, m3m) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
立方晶系：	(1) $\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{bmatrix}$

续表

单斜晶系：

2 (2 ‖ x_2)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & 0 & d_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{34} & 0 & d_{36} \end{bmatrix}$$

2 (2 ‖ x_3)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & d_{25} & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & d_{36} \end{bmatrix}$$

m ($m \perp x_2$)

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & d_{35} & 0 \end{bmatrix}$$

m ($m \perp x_3$)

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & 0 & 0 & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & 0 & 0 & d_{26} \\ 0 & 0 & 0 & d_{34} & d_{35} & 0 \end{bmatrix}$$

正交晶系：

222

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{bmatrix}$$

$2mm$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

四方晶系：

4

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & -d_{14} & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\bar{4}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d_{15} & d_{14} & 0 \\ d_{31} & -d_{31} & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{bmatrix}$$

422

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$4mm$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\bar{4}2m$ (2 ‖ x_1)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{bmatrix}$$

三角晶系：

3

$$\begin{bmatrix} d_{11} & -d_{11} & 0 & d_{14} & d_{15} & -d_{22} \\ -d_{22} & d_{22} & 0 & d_{15} & -d_{14} & -d_{11} \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

32

$$\begin{bmatrix} d_{11} & -d_{11} & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{14} & -d_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$3m$ ($m \perp x_1$)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & -d_{22} \\ -d_{22} & d_{22} & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$3m$ ($m \perp x_2$)

$$\begin{bmatrix} d_{11} & -d_{11} & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & -d_{11} \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

六方晶系：

6

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & -d_{14} & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$6mm$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

622

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\bar{6}$

$$\begin{bmatrix} d_{11} & -d_{11} & 0 & 0 & 0 & -d_{22} \\ -d_{22} & d_{22} & 0 & 0 & 0 & -d_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\bar{6}m2$ ($m \perp x_1$)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{22} \\ -d_{22} & d_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\bar{6}m2$ ($m \perp x_2$)

$$\begin{bmatrix} d_{11} & -d_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

立方晶系：

$\bar{4}3m$, 23

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} \end{bmatrix}$$

432

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

例：KDP（KH_2PO_4）中的二次谐波产生（SHG）。

因为晶体对称性$\bar{4}2m$，一直存在的非线性系数，按照表 8.1，是d_{14}，$d_{25}=14$和d_{36}。因此二阶非线性极化振幅可以被写成，按照方程（8.2-11）

$$P_{0x}=2d_{xzy}E_{0z}E_{0y}=2d_{14}E_{0z}E_{0y}$$

$$P_{0y}=2d_{yzx}E_{0z}E_{0x}=2d_{25}E_{0z}E_{0y}=2d_{14}E_{0z}E_{0y}$$

$$P_{0z} = 2d_{zxy}E_{0x}E_{0y} = 2d_{36}E_{0x}E_{0y}$$

这里 E_{0x}、E_{0y}、E_{0z} 是基础波在频率 ω 的电场振幅。表 8.2 列出了一些晶体的非线性光系数。

表 8.2　一些晶体的二阶非线性光学系数

Crystal	$d_{ijk}^{(2\omega)}$ in Units of $\frac{1}{9}\times 10^{-22}$ MKS[a]
Ag_3AsS_3	$d_{22} = 22.5$
(Proustite)	$d_{36} = 13.5$
$AgGaSe_2$	$d_{36} = 27 \pm 3$
$AgSbS_3$	$d_{36} = 9.5$
$AlPO_4$	$d_{11} = 0.38 \pm 0.03$
β-BaB_2O_4 (BBO)	$d_{11} = 5.8 \times d_{36}$ (KDP)
	$d_{31} = 0.05 \times d_{11}$
	$d_{22} < 0.05 \times d_{11}$
$Ba_2NaNb_5O_{15}$	$d_{33} = 10.4 \pm 0.7$
	$d_{32} = 7.4 \pm 0.7$
$BaTiO_3$	$d_{33} = 6.4 \pm 0.5$
	$d_{31} = 18 \pm 2$
	$d_{15} = 17 \pm 2$
CdS	$d_{33} = 28.6 \pm 2$
	$d_{31} = 30 \pm 10$
	$d_{36} = 33$
CdSe	$d_{31} = 22.5 \pm 3$
$CdGeAs_2$	$d_{36} = 363 \pm 70$
GaP	$d_{14} = 80 \pm 14$
GaAs	$d_{14} = 72$
KH_2PO_4	$d_{36} = 0.45 \pm 0.03$
(KDP)	$d_{14} = 0.35$
KD_2PO_4	$d_{36} = 0.42 \pm 0.02$
	$d_{14} = 0.42 \pm 0.02$
KH_2AsO_4	$d_{36} = 0.48 \pm 0.03$
	$d_{14} = 0.51 \pm 0.03$
LiB_3O_5 (LBO)	$d_{31} = 0.84$
	$d_{32} = -0.78$
$LiIO_3$	$d_{15} = 4.4$
$LiNbO_3$	$d_{15} = 4.4$
	$d_{22} = 2.3 \pm 1.0$
$NH_4H_2PO_4$	$d_{36} = 0.45$
(ADP)	$d_{14} = 0.50 \pm 0.02$
Quartz (SiO_2)	$d_{11} = 0.37 \pm 0.02$
Se	$d_{11} = 130 \pm 30$
Te	$d_{11} = 517$
ZnO	$d_{33} = 6.5 \pm 0.2$
	$d_{31} = 1.95 \pm 0.2$
	$d_{15} = 2.1 \pm 0.2$
ZnS	$d_{36} = 13$

a. 有些作者是用 $P=\varepsilon_0 dE^2$ 来定义非线性系数 d（d 的单位是pm/V），而不是用本书的关系式 $P=dE^2$ 来定义。
转换关系：1 pm/V = 0.7969 × ($\frac{1}{9}\times 10^{-22}$ MKS)以及($\frac{1}{9}\times 10^{-22}$ MKS) = 1.255 pm/V。

8.3　电磁场方程和光学二次谐波产生

我们考虑频率为 $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ 的三个光波通过二阶非线性进行的相互作用。将电场写成

$$E_i(t) = E_i^{\omega_1}(t) + E_i^{\omega_2}(t) + E_i^{\omega_3}(t) \quad (i = x', y', z') \tag{8.3-1}$$

和

$$E_i^{\omega_1}(t)=\frac{1}{2}(E_{0i}^{\omega_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1 t-k_1 z)}+\mathrm{c.c})=\frac{1}{2}(a_{1i}E_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1 t-k_1 z)}+\mathrm{c.c})\quad (i=x',y',z')$$
$$E_i^{\omega_2}(t)=\frac{1}{2}(E_{0i}^{\omega_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_2 t-k_2 z)}+\mathrm{c.c})=\frac{1}{2}(a_{2i}E_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_2 t-k_2 z)}+\mathrm{c.c})\quad (i=x',y',z')$$
$$E_i^{\omega_3}(t)=\frac{1}{2}(E_{0i}^{\omega_3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_3 t-k_3 z)}+\mathrm{c.c})=\frac{1}{2}(a_{3i}E_3\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_3 t-k_3 z)}+\mathrm{c.c})\quad (i=x',y',z')$$

这里我们假设三个场都是非线性介质中沿着 z 方向传播的正交模，有着唯一的波数 k_1、k_2 和 k_3 以及振幅 E_1、E_2 和 E_3。在上面的方程中，$\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$ 和 $\boldsymbol{a}_3$ 是代表三个场在非线性介质中传播的正交模偏振方向的单位矢量。为了用公式描述相互作用，我们采用 z 轴作为传播的共同方向，并且采用（x', y', z'）作为非线性介质主轴坐标系中的笛卡儿坐标分量。这三个场沿着相同的方向（z 轴）传播但是有着不同的偏振状态。一般情况下，传播方向（z）并不一定与某个主轴坐标轴平行。非线性介质中的共轴传播是为了保证最大的物理重叠。在没有非线性介电响应的情况下，这三个场是波动方程的解并且在介质中独立传播。

我们现在从明确包含极化的波动方程形式开始

$$\nabla^2\boldsymbol{E}=\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P})=\mu_0\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}+\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{P}_{\mathrm{NL}}\tag{8.3-2}$$

这里 P_{NL} 代表非线性极化并且可以被写成

$$(P_{\mathrm{NL}})_i=2d_{ijk}E_jE_k\quad (i,j,k=x',y',z')\tag{8.3-3}$$

需要指出的是，以上方程中的 $\boldsymbol{E}$ 是方程（8.3-1）给定的三个场的总和。作为非线性极化的结果，这三个场进行了耦合。为了得到场振幅的耦合方程，我们从在 $\omega_1=\omega_3-\omega_2$ 的非线性极化入手。根据方程（8.2-7a），我们得到

$$[P_{\mathrm{NL}}^{\omega_3-\omega_2}(z,t)]_i=d_{ijk}a_{3j}a_{2k}E_3E_2^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\omega_3-\omega_2)t-(k_3-k_2)z]}+\mathrm{c.c.}\tag{8.3-4}$$

类似地，我们得到另外两个非线性极化项

$$[P_{\mathrm{NL}}^{\omega_3-\omega_1}(z,t)]_i=d_{ijk}a_{3j}a_{1k}E_3E_1^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\omega_3-\omega_1)t-(k_3-k_1)z]}+\mathrm{c.c.}\tag{8.3-5}$$

$$[P_{\mathrm{NL}}^{\omega_1+\omega_2}(z,t)]_i=d_{ijk}a_{1j}a_{2k}E_1E_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\omega_1+\omega_2)t-(k_1+k_2)z]}+\mathrm{c.c.}\tag{8.3-6}$$

这里我们遵守对重复指标（$i, j, k=x', y', z'$）的求和规则。这些非线性极化可以被看成分布的偶极子源，可以在振荡频率发射和产生波。我们现在将这些非线性极化代入波动方程。通过对下标微分和假设服从慢变化近似，可得

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}E_s\ll k_s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}E_s\quad (s=1,2,3)\tag{8.3-7}$$

在经过几步代数计算之后，可以得到

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}E_1&=-i\omega_1\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}\,dE_3E_2^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_3-k_2-k_1)z}\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}E_2^*&=+i\omega_2\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}}\,dE_1E_3^*\mathrm{e}^{+\mathrm{i}(k_3-k_2-k_1)z}\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}E_3&=-i\omega_3\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_3}}\,dE_1E_2\mathrm{e}^{+\mathrm{i}(k_3-k_2-k_1)z}
\end{aligned}\tag{8.3-8}$$

这里的 d 是有效二阶非线性系数

$$d = \sum_{ijk} d_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} \tag{8.3-9}$$

耦合方程（8.3-8）构成本节的主要结果。为了得到耦合方程，使用了非线性系数的循环对称性，即 $d_{ijk}=d_{jik}=d_{ikj}$。这将应用在下面的具体实例中。注意到耦合方程和能量守恒相一致。它可以表明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\sqrt{\varepsilon_1}\,|E_1|^2 + \sqrt{\varepsilon_2}\,|E_2|^2 + \sqrt{\varepsilon_3}\,|E_3|^2\right) = 0 \tag{8.3-10}$$

式中假设 $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$。

我们定义如下新的场变量 A_1, A_2 和 A_3:

$$A_m = \sqrt{\frac{n_m}{\omega_m}}\, E_m, \quad m = 1, 2, 3 \tag{8.3-11}$$

其中，n_m 是与波 E_m 关联的折射率，ω_m 是相应的频率。光束强度可以写成

$$I_m = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, n_m |E_m|^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, \omega_m |A_m|^2 \tag{8.3-12}$$

因为一个光子的能量是 $\hbar\omega$，所以 $|A_m|^2$ 与光束在频率 ω_m 的光子通量成正比，比例常数与频率无关。耦合方程（8.3-8）可以被写成

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} A_1 &= -i\kappa A_3 A_2^* \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta kz} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} A_2^* &= +i\kappa A_1 A_3^* \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\Delta kz} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} A_3 &= -i\kappa A_1 A_2 \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\Delta kz} \end{aligned} \tag{8.3-13}$$

这里动量差 Δk （或波数差）和耦合常数 κ 被定义为

$$\Delta k = k_3 - (k_1 + k_2) \tag{8.3-14}$$

$$\kappa = d\sqrt{\frac{\mu_0\omega_1\omega_2\omega_3}{\varepsilon_0 n_1 n_2 n_3}} = \left(\sum_{ijk} d_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}\right)\sqrt{\frac{\mu_0\omega_1\omega_2\omega_3}{\varepsilon_0 n_1 n_2 n_3}} \tag{8.3-15}$$

这里的求和是对极化单位矢量的所有组成部分进行的。利用方程（8.3-13），能量守恒成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\omega_1|A_1|^2 + \omega_2|A_2|^2 + \omega_3|A_3|^2) = 0 \tag{8.3-16}$$

二次谐波产生

对于二次谐波产生（SHG）情形，我们考虑频率为 ω_1 和 ω_3 （且 $\omega_3 = 2\omega_1$ ）的两个波由于二阶非线性产生的相互作用。将电场写成如下形式

$$\begin{aligned} E_i^{\omega_1}(t) &= \frac{1}{2}(E_{0i}^{\omega_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1 t - k_1 z)} + \text{c.c.}) = \frac{1}{2}(a_{1i}E_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1 t - k_1 z)} + \text{c.c.}) \quad (i = x', y', z') \\ E_i^{\omega_3}(t) &= \frac{1}{2}(E_{0i}^{\omega_3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_3 t - k_3 z)} + \text{c.c.}) = \frac{1}{2}(a_{3i}E_3\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_3 t - k_3 z)} + \text{c.c.}) \quad (i = x', y', z') \end{aligned} \tag{8.3-17}$$

这里 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_3$ 是表示两个波极化状态的单位矢量。

SHG 非线性极化项可以写成

$$[P_{\mathrm{NL}}^{\omega_3-\omega_1}(z,t)]_i = d_{ijk}a_{3j}a_{1k}E_3E_1^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\omega_3-\omega_1)t-(k_3-k_1)z]} + \mathrm{c.c.} \tag{8.3-18}$$

$$[P_{\mathrm{NL}}^{2\omega_1}(z,t)]_i = \frac{1}{2}d_{ijk}a_{1j}a_{1k}E_1E_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\omega_1 t-2k_1 z)} + \mathrm{c.c.} \tag{8.3-19}$$

这里假设求和是对重复指数进行的。SHG 的耦合方程可以被写成

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}E_1 &= -i\omega_1\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}\,dE_3E_1^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_3-2k_1)z}\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}E_3 &= -i\omega_3\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_3}}\,\frac{1}{2}dE_1E_1\mathrm{e}^{+\mathrm{i}(k_3-2k_1)z}\end{aligned} \tag{8.3-20}$$

这里 d 是有效二阶非线性系数

$$d = \sum_{ijk} d_{ijk}a_{3i}a_{1j}a_{1k} \tag{8.3-21}$$

耦合方程（8.3-20）可以用来考察基波和二次谐波之间能量的耦合。

可以证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\sqrt{\varepsilon_1}\,|E_1|^2 + \sqrt{\varepsilon_3}\,|E_3|^2) = 0 \tag{8.3-22}$$

假设 $\omega_3 = 2\omega_1$。

非线性光学领域早期的二次谐波产生实验是 Franken, Hill, Peters 和 Weinreich[1]在 1961 年进行的。在他们的实验中（见图 8.1），一个 694.3nm 的红宝石激光束被聚焦在石英晶体板前表面。用分光计进行测量并检查出射光辐射中包含两倍于输入频率的光辐射（即在 $\lambda = 347.15\text{nm}$）。第一个实验的转换效率约为 10^{-8}。近年来，使用更有效材料，更高强度的激光和相位匹配技术，使得转换效率接近 100%。这些因素将在本节后续部分进行讨论。

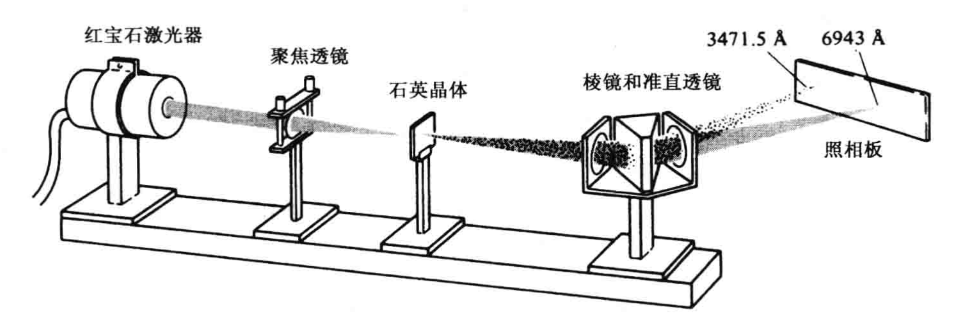


图 8.1　首次实验论证二次谐波产生的实验装置[1]。波长为 $\lambda_0 = 0.694\mu\text{m}$ 的红宝石激光聚焦于石英晶体上，产生弱的波长为 $\lambda_0/2 = 0.347\mu\text{m}$ 的光束，然后用棱镜将这两束光分开并在照相底片上检测

相位匹配和相干长度

为了说明相位匹配的概念，我们考虑一种无损耗近似情形，在这种情形下，从输入（ω_1）光束（通过转换成 $2\omega_1$）的能量损失是可以忽略不计的，因此我们将耦合方程（8.3-20）中的 $\boldsymbol{E}_1$ 看成一个常量，因此仅需要考虑耦合方程（8.3-20）的第二个方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}E_3=-i\omega\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}\,\mathrm{d}E_1^2\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\Delta kz} \tag{8.3-23}$$

这里

$$\omega=\omega_1=\omega_3/2\text{，}\quad \varepsilon=\varepsilon_3$$

并且

$$\Delta k=k_3-2k_1 \tag{8.3-24}$$

我们现在对方程（8.3-23）积分，假设 $E_3(0)=0$（即在 z=0 处没有任何二次谐波输入）．并且设晶体的长度为 L。我们得到

$$E_3(L)=-i\omega\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}\,dE_1^2\,\frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{i}(\Delta k)L}-1}{i(\Delta k)L}L \tag{8.3-25}$$

二次谐波输出的光强度为 $I^{(2\omega)}$，并且转换效率 η_{SHG} 可以写成

$$\eta_{\mathrm{SHG}}\equiv\frac{I^{(2\omega)}}{I^{(\omega)}}=\frac{2\omega^2d^2L^2}{n^3}\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{3/2}\frac{\sin^2[(\Delta k)L/2]}{[(\Delta k)L/2]^2}I^{(\omega)} \tag{8.3-26}$$

这里 $I^{(\omega)}$ 是基波的光强度，$n=n^{(\omega)}\approx n^{(2\omega)}$，同时 Δk 是方程（8.3-24）给定的波数差。根据这个方程，有效二次谐波产生的一个前提是 $\Delta k=0$，或者

$$k^{(2\omega)}=2k^{(\omega)} \tag{8.3-27}$$

如果 $\Delta k\neq0$，从某个平面（如 z_1）产生的二次谐波已经传播到另一个平面（如 z_2），与在 z_2 产生的二次谐波不同相。这导致方程（8.3-26）右侧正弦因数描述的干涉。两个相邻峰值之间的干涉类型以“相干长度”划分。

$$l_c=\frac{2\pi}{\Delta k}=\frac{2\pi}{k^{(2\omega)}-2k^{(\omega)}} \tag{8.3-28}$$

因此相干长度 l_c 是对于产生二次谐波有用的最大晶体长度的度量。从折射率方面来讲，波数差可以写成

$$\Delta k=k^{(2\omega)}-2k^{(\omega)}=\frac{2\omega}{c}n^{(2\omega)}-2\frac{\omega}{c}n^{(\omega)}=\frac{2\omega}{c}(n^{(2\omega)}-n^{(\omega)}) \tag{8.3-29}$$

并且相干长度可以写成

$$l_c=\frac{2\pi}{\Delta k}=\frac{2\pi}{k^{(2\omega)}-2k^{(\omega)}}=\frac{2c\pi}{2\omega(n^{(2\omega)}-n^{(\omega)})}=\frac{\lambda}{2(n^{(2\omega)}-n^{(\omega)})} \tag{8.3-30}$$

这里 λ 是基波的波长。在通常环境下，它不会长于 10^{-2}cm。这是因为折射率一般随着 ω 增长。为了说明它，我们来看下面的例子。

例：KDP 倍频效应中的相干长度。

令 $\lambda=1\mu\mathrm{m}$，并且假定 KDP 中为寻常波。该折射率（从表 8.3）是

$$n(2\omega)=1.514928$$
$$n(\omega)=1.496044$$

利用公式（8.3-30），我们得到

$$l_c=\frac{\lambda}{2(n^{(2\omega)}-n^{(\omega)})}=\frac{10^{-6}}{2(1.514928-1.496044)}m=26.5\mu\mathrm{m}$$

被广泛用来满足相位匹配（$\Delta k = 0$）要求的技术（参考文献[3, 4]），可以利用各向异性晶体的自然双折射来实现，这在第 1 章中已经讨论过。利用关系 $k^{(\omega)} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_0 n^{\omega}}$，相位匹配条件式（8.3-27）成为

$$n^{2\omega} = n^{\omega} \tag{8.3-31}$$

因此基波和二次谐波的折射率必须相等。在通常色散材料中，给定方向的寻常波和非寻常波的折射率随着 ω 增长，从表 8.3 中可以看出，这使得当 ω 和 2ω 光束是相同偏振类型时，即两个波都是非寻常或寻常时，不可能满足式（8.3-31）的相位匹配条件。尽管如此，我们可以在特定的条件下，通过使两个波为不同类型（不同偏振状态）来满足式（8.3-31）。为了说明这一点，考虑单轴晶体中非寻常波的折射率与传播方向和晶体光轴（z'）夹角 θ 的关系。它由下面的方程确定

$$\frac{1}{n_e^2(\theta)} = \frac{\cos^2\theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2\theta}{n_e^2} \tag{8.3-32}$$

表 8.3　KH_2PO_4 的折射率色散数据

波长(μm)	n_o (普通射线)	n_e (异常射线)
0.2000	1.622630	1.563913
0.3000	1.545570	1.498153
0.4000	1.524481	1.480244
0.5000	1.514928	1.472486
0.6000	1.509274	1.468267
0.7000	1.505235	1.465601
0.8000	1.501924	1.463708
0.9000	1.498930	1.462234
1.0000	1.496044	1.460993
1.1000	1.493147	1.459884
1.2000	1.490169	1.458845
1.3000	1.487064	1.457838
1.4000	1.483803	1.456838
1.5000	1.480363	1.455829
1.6000	1.476729	1.454797
1.7000	1.472890	1.453735
1.8000	1.468834	1.452636
1.9000	1.464555	1.451495
2.0000	1.460044	1.450308

After Reference [2].

根据方程（8.3-32），我们注意到与非寻常波与传播方向有关的折射率能够从 $\theta = 0$ 时的 n_o 变化到 $\theta = 90°$ 时的 n_e。在一个负双折射晶体（如 KDP）中，如果 $n_e^{2\omega} < n_o^{\omega}$，存在一个角 θ_m 使得 $n_e^{2\omega}(\theta_m) = n_o^{\omega}$；因此如果基波（在 ω）作为寻常光束沿着 θ_m 方向发出，二次谐波光束将作为非寻常光束在相同的方向产生。这种情况在图 8.2 中做了说明。角度 θ_m 取决于与在 ω 处寻常光束折射率面对应的球面（图中用圆表示）和非寻常光束 $n_e^{2\omega}(\theta_m)$ 折射率面对应的球面之间的相交截面。对于负单轴晶体，角度 θ_m 定义了一个圆锥体——$n_e^{2\omega} < n_o^{\omega}$ 的晶体——在 θ_m 时满足 $n_e^{2\omega}(\theta_m) = n_o^{\omega}$，或者使用方程（8.3-32）

$$\frac{\cos^2\theta_m}{(n_o^{2\omega})^2} + \frac{\sin^2\theta_m}{(n_e^{2\omega})^2} = \frac{1}{(n_o^{\omega})^2} \tag{8.3-33}$$

并且，为了解得 θ_m，有

$$\sin^2\theta_m = \frac{(n_o^{\omega})^{-2} - (n_o^{2\omega})^{-2}}{(n_e^{2\omega})^{-2} - (n_o^{2\omega})^{-2}} \tag{8.3-34}$$

图 8.2 中描述的相位匹配方法也称为第 I 类相位匹配。在第 I 类相位匹配中，基波和二次谐波偏振状态是正交的。在单轴晶体中，如果基波是寻常波，那么二次谐波是非寻常波，反之亦然。另一个可能的相位匹配模式是基波的寻常波和非寻常波的混合，而二次谐波是寻常波或非寻常波。这种被称为第 II 类相位匹配。一般地，单轴晶体中的第 I 类相位匹配可以在双折射（$|\Delta n| = |n_e - n_o|$）比晶体色散引起的折射率变化（$n^{(2\omega)} - n^{(\omega)}$）大时获得。如果双折射比晶体色散引起的折射率变化大两倍，则第 II 类相位匹配成为可能。表 8.4 是单轴晶体中相位匹配的归纳。

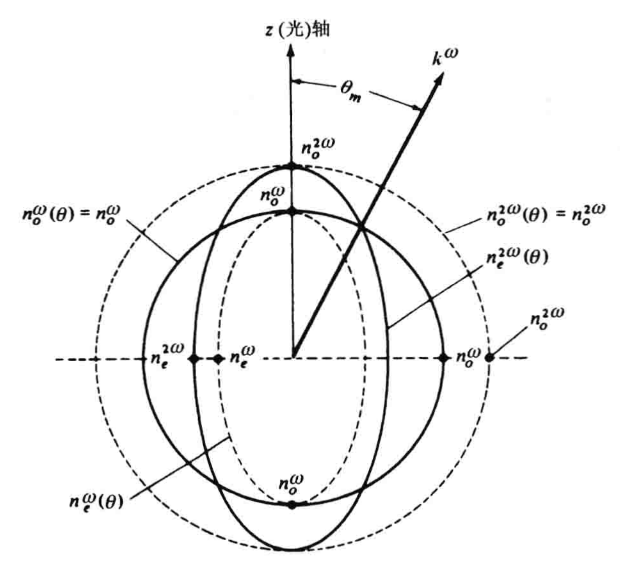


图 8.2　负单轴晶体（$n_e < n_o$）中寻常波和非寻常波的折射率面。如果 $n_e^{2\omega} - n_o^{\omega}$，条件 $n_e^{2\omega}(\theta) = n_o^{\omega}$ 在 $\theta = \theta_m$ 时得到满足，图中显示的偏心情况被夸大了

表 8.4　单轴晶体中的相位匹配

双折射	类型	基波 ω	二次谐波 2ω	条件
负单轴（$n_e < n_o$）	I	O	E	$n_e^{(2\omega)} - n_e^{(\omega)} < n_o^{(\omega)} - n_e^{(\omega)}$
	II	O+E	E	$2(n_e^{(2\omega)} - n_e^{(\omega)}) < (n_o^{(\omega)} - n_e^{(\omega)})$
正单轴（$n_o < n_e$）	I	O	O	$n_o^{(2\omega)} - n_o^{(\omega)} < n_e^{(\omega)} - n_o^{(\omega)}$
	II	O	O	$2(n_o^{(2\omega)} - n_o^{(\omega)}) < (n_e^{(\omega)} - n_o^{(\omega)})$

例：二次谐波的产生。

考虑在一块磷酸二氢钾（KDP）晶体中使用红宝石脉冲激光输出进行二次谐波产生的问题。应用方程（8.3-21）可以得到合适的 d 系数。代表波偏振状态的单位矢量由下式得到

$$a_3 = \begin{bmatrix} \cos\theta_m / \sqrt{2} \\ -\cos\theta_m / \sqrt{2} \\ \sin\theta_m \end{bmatrix} \quad 和 \quad a_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

这里 $\boldsymbol{a}_3$ 表示二次谐波的偏振单位矢量，而 $\boldsymbol{a}_1$ 是基波的偏振单位矢量。应用方程式（8.3-21）并且进行求和，我们得到

$$d = d_{312}\sin\theta_m = d_{36}\sin\theta_m$$

这里 d_{36} 如表 8.2 中所示。光轴（c 轴）和 $\Delta k = 0$ 的传播方向之间的夹角 θ_m 由方程式（8.3-34）给出。从表 8.2 中得到的合适的折射率为

$$n_e(\lambda = 0.694\mu\text{m}) = 1.466, \quad n_e(\lambda = 0.347\mu\text{m}) = 1.490$$

$$n_o(\lambda = 0.694\mu\text{m}) = 1.506, \quad n_o(\lambda = 0.347\mu\text{m}) = 1.534$$

将上面的数据代入方程（8.3-34），得到

$$\theta_m = 52°$$

为了获得沿这个方向的相位匹配，晶体中的基波光束的偏振化方向必须与方程（8.3-32）讨论得到的寻常波方向一致。

相位匹配的实验验证

按照方程（8.3-26），如果违背了相位匹配条件 $\Delta k = 0$，那么输出功率将从它的相位匹配（最大）值中减去如下因子

$$F = \frac{\sin^2[(\Delta k)L/2]}{[(\Delta k)L/2]^2} \tag{8.3-35}$$

根据方程（8.3-29），相位失配 $(\Delta k)L/2$ 由下面方程确定并且是 θ 的函数。

$$\frac{(\Delta k)L}{2} = \frac{\omega L}{c}[n_e^{2\omega}(\theta) - n_o^{\omega}] \tag{8.3-36}$$

如果我们应用方程（8.3-32），将 $n_e^{2\omega}(\theta)$ 在 $\theta \cong \theta_m$ 处按泰勒级数展开，而且仅保留最初两项，并且假设在 $\theta = \theta_m$ 时有完美的相位匹配，因此 $n_e^{2\omega}(\theta_m) = n_o^{\omega}$，可以得到

$$\Delta k(\theta)L = -\frac{2\omega L}{c}\sin(2\theta_m)\frac{(n_e^{2\omega})^{-2} - (n_o^{2\omega})^{-2}}{2(n_o^{\omega})^{-3}}(\theta - \theta_m) \equiv 2\beta(\theta - \theta_m) \tag{8.3-37}$$

式中 β 由方程（8.3-37）定义，并且是与 $n_e^{2\omega}$、$n_o^{2\omega}$、n_o^{ω}、ω 及 L 有关的常量。如果我们在 2ω 处将输出功率按 θ 的函数变化曲线画出，那么根据方程（8.3-26）和方程（8.3-37），我们将发现它的变化如下式所示

$$P_{2\omega}(\theta) \propto \frac{\sin^2[\beta(\theta - \theta_m)]}{[\beta(\theta - \theta_m)]^2} \tag{8.3-38}$$

图 8.3 表示了 $P_{2\omega}(\theta)$ 的实验曲线以及由方程（8.3-38）的理论曲线。另一种相位匹配技术包括在光束路径中引入一个人工空间周期 $\Lambda = 2\pi/\Delta k$。该方法将在本章后面部分讨论。

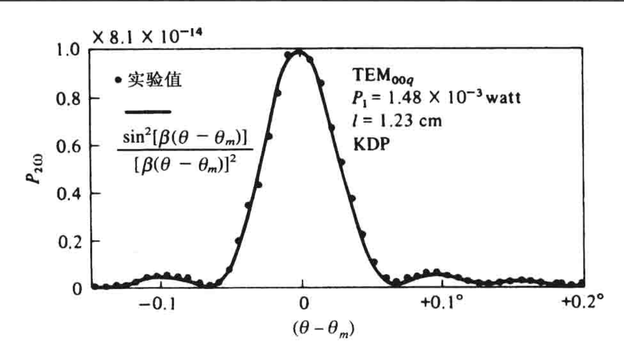


图 8.3　二次谐波功率 $P_{2\omega}$ 随距相位匹配角度偏差（$\theta-\theta_m$）的变化曲线（引自文献[5]）

带有输入损耗的二次谐波产生

二次谐波产生中转换效率的表达式（8.3-26）是基于基波光束在 ω 处的损耗可以忽略的假设，因此它仅对转换效率较小的情况有效，即 $\eta_{SHG}\ll 1$。这里我们考虑高效二次谐波产生的一般情况。在这种情况下，需要考虑基波光束的损耗。应用由方程（8.3-11）定义的光子通量振幅 A_m，二次谐波产生的耦合方程可以写成

$$\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}z}=-i\kappa A_3A_1^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Delta k)z}$$
$$\frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}z}=-i\frac{\kappa}{2}A_1^2\mathrm{e}^{+\mathrm{i}(\Delta k)z} \tag{8.3-39}$$

这里 A_1 是基波光束的通量振幅，而 A_3 是二次谐波光束的通量振幅，而且耦合常数和相位匹配方程由以下方程给定

$$\kappa\equiv\sqrt{\left(\frac{\mu}{\varepsilon_0}\right)\frac{\omega_1\omega_1\omega_3}{n_1n_1n_3}}\,d\approx\left(\frac{\omega}{n}\right)^{3/2}\sqrt{2\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)}\,d \tag{8.3-40}$$

$$\Delta k\equiv k_3-(k_1+k_2)=k^{(2\omega)}-2k^{(\omega)} \tag{8.3-41}$$

在方程（8.3-40）中，我们使用了 $\omega_3=2\omega_1\equiv 2\omega$，并且假设 $n=n(\omega)\approx n(2\omega)$。对于二次谐波产生（SHG）相位匹配（$\Delta k=0$）的情形，耦合方程成为

$$\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}z}=-i\kappa A_3A_1^*$$
$$\frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}z}=-i\frac{\kappa}{2}A_1^2 \tag{8.3-42}$$

从方程（8.3-42）中可以得出，在不失普遍性的情况下，如果我们选择 $A_1(0)$为实数，那么 $A_1(z)$是实数并且方程（8.3-42）可以被重新写成以下形式

$$\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}z}=-\kappa A_3'A_1$$
$$\frac{\mathrm{d}A_3'}{\mathrm{d}z}=\frac{1}{2}\kappa A_1^2 \tag{8.3-43}$$

这里 $A_3\equiv -iA_3'$。根据方程（8.3-43）可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(A_1^2+2A_3'^2)=0$$

（即每从光束 1（频率为 ω 的基波光束）中移除两个光子，将增加一个光束 3（频率为 2ω 的二次谐波）的光子。）

假设在 ω_3 时没有输入（即 $A_3(0)=0$ ），我们有 $A_1^2+2A_3'^2=A_1^2(0)$，并且方程（8.3-43）的第二式变成

$$\frac{\mathrm{d}A_3'}{\mathrm{d}z}=\frac{1}{2}\kappa\left(A_1^2(0)-2A_3'^2\right) \tag{8.3-44}$$

对上述方程直接积分，可以得到解

$$A_3'(z)=\frac{1}{\sqrt{2}}A_1(0)\tanh\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\kappa A_1(0)z\right) \tag{8.3-45}$$

这是一个关于二次谐波光束光子通量振幅的表示式。

我们注意到当 $\kappa A_1(0)z\to\infty$ 时，$A_3'(z)\to A_1(0)/\sqrt{2}$，因此所有输入在 ω 处的输入光子都在 2ω 处被转换成了一半数目的光子并且能量转换效率接近 1。在一般情况下

$$\eta_{\mathrm{SHG}}\equiv\frac{P^{(2\omega)}}{P^{(\omega)}}=\frac{\hbar\omega_3|A_3(z)|^2}{\hbar\omega_1|A_1(z)|^2}=\frac{2|A_3(z)|^2}{|A_1(z)|^2}=\tanh^2[\tfrac{1}{2}\kappa A_1(0)z] \tag{8.3-46}$$

方程（8.3-46）理论预测曲线以及从 $\lambda=1.06\mu\mathrm{m}$ 到 $\lambda=0.53\mu\mathrm{m}$ 转换获得的实验数据曲线如图 8.4 所示。

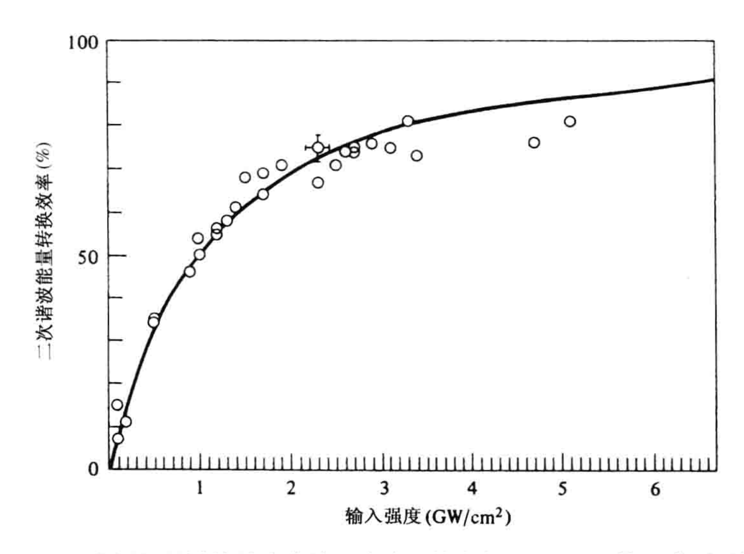


图 8.4　倍频能量转换效率曲线。实线：按方程（8.3-46）的理论预测值（这里 $A_1(0)\propto\sqrt{I_{in}}$ ）。圆圈对应实验值（引自补充参考文献[6]）

作为一个非线性光学过程，一个有效的二次谐波产生通常需要光强度非常高的基波光束。在图 8.4 所示的实例中，需要一个输入光强度为 $\mathrm{GW/cm^2}$ 的基波光束来实现重要的转换效率。为了达到如此高的光强，非线性光学晶体必须有一个高损伤阈值。如果要在相对较低的输入强度下，获得高转换效率，则需要研制高非线性光学系数 d 的新材料。另一个获得高转换效率的方法是利用光谐振腔中高强度的优势，并且将非线性晶体放置在激光谐振腔中能量可能非常大的位置，这种方法已经被成功应用[7]。图 8.5 为该实验装置的示意图。在这个例子中，基波光束是一个在 $\lambda=1.064\mu\mathrm{m}$ 振荡的 Nd:YAG 激光束。谐振腔反射镜被设计成将

Nd:YAG 激光束封闭在谐振腔内。一个 $Ba_2NaNb_5O_{15}$ 晶体被放在激光谐振腔内作为二次谐波产生（SHG）的非线性光学介质。

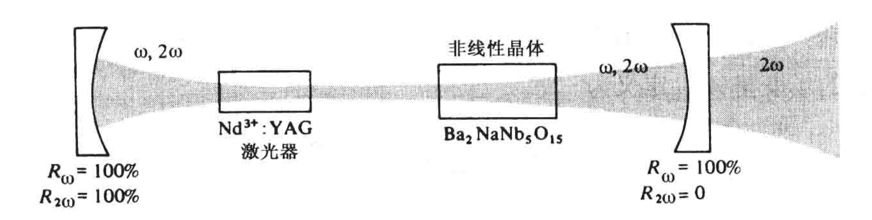


图 8.5　激光谐振腔中二次谐波转换的典型装置（引自参考文献[8]）

8.4　其他二阶非线性光学过程

除了二次谐波产生，其他也有一些二阶非线性光学过程，包括光整流，光参变放大，光参变振荡和频率上转换。在这一节，我们讨论一些最重要的二阶非线性光学过程。光参变放大可以用来产生光波的压缩态。这个问题将在第 18 章讨论。光参变振荡可广泛应用于可调谐固体激光器（如蓝宝石激光器）。

光参变放大

光学参变放大的一种最简单的形式是将能量从 ω_3 的泵浦波转换到两个较低频率分别为 ω_1 和 ω_2 的波，其中 $\omega_3=\omega_1+\omega_2$，它与 8.3 节中讨论的二次谐波产生的过程基本上类似，唯一的区别在于能量流的方向。在二次谐波产生的过程中，能量是从低频 ω 光场传到高频 2ω 的光场，在参变放大过程中，功率是由高频 ω_3 光场流向低频 ω_1 和 ω_2 的光场。在 $\omega_1=\omega_2$ 的特殊情形下，我们得到恰好与二次谐波产生相反的过程。这些过程是三个光波非线性混合的结果。主导这三个光波相互作用的方程与 8.2 节描述的一样。唯一的不同就是边界条件。这三个光波场可以写成

$$E=\sum_{m=1,2,3} \boldsymbol{a}_m E_m \exp[i(\omega_m t-k_m z)] \tag{8.4-1}$$

这里 $\boldsymbol{a}_m$ 代表在非线性晶体中第 m 个波的偏振态单位矢量。E_m 是第 m 个波的振幅，其频率为 ω_m。每一个光波都是介质中的传播的正交模。$E_1(z)$，$E_2(z)$，$E_3(z)$ 表示耦合情形振幅的，都是 z 的函数。我们假设这个三个波都是沿着 z 轴方向传播，而且 $\omega_3=\omega_1+\omega_2$。由于二阶非线性光学效应，这三个波相互耦合。根据方程（8.3-8），耦合方程可以写成

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}E_1}{\mathrm{d}z}&=-\frac{i\omega_1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_1}}\,dE_3E_2^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_3-k_2-k_1)z}\\
\frac{\mathrm{d}E_2^*}{\mathrm{d}z}&=+\frac{i\omega_2}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_2}}\,dE_1E_3^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_1-k_3+k_2)z}\\
\frac{\mathrm{d}E_3}{\mathrm{d}z}&=-\frac{i\omega_3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_3}}\,dE_1E_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_1+k_2-k_3)z}
\end{aligned} \tag{8.4-2}$$

其中有效非线性系数 d 由下式给出

$$d=\sum_{ijk}d_{ijk}a_{1i}a_{2j}a_{3k} \tag{8.4-3}$$

在推导方程（8.4-2）时，我们利用了非线性系数的排列对称性（即 $d_{ikj}=d_{jik}=d_{ikj}$）。我们引入一组新的场变量 A_l，定义为

$$A_m\equiv\sqrt{\frac{n_m}{\omega_m}}E_m, m=1,2,3 \tag{8.4-4}$$

其中 $n_m^2=\varepsilon_m/\varepsilon_0$；$n_m$ 为与 m 波对应的折射率，因此，频率为 ω_m 光波的光强（单位面积能流）是

$$I_m=\frac{P_m}{A}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu}}n_m|E_m|^2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu}}\omega_m|A_m|^2 \tag{8.4-5}$$

单位面积能流 P_m/A 与光子通量 N_m（每平方米每秒通过的光子数）的关系是

$$\frac{P_m}{A}=N_m\hbar\omega_m=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu}}\left|A_m\right|^2\omega_m \tag{8.4.6}$$

所以 $\left|A_m\right|^2$ 与频率为 ω_m 的光子通量成正比。与光子通量振幅 A_m 有关的耦合方程 （8.4-2）变成

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{dz}&=-\frac{1}{2}\alpha_1A_1-\frac{i}{2}\kappa A_2^*A_3e^{-i(\Delta k)z}\\\frac{dA_2^*}{dz}&=-\frac{1}{2}\alpha_2A_2^*+\frac{i}{2}\kappa A_1A_3^*e^{i(\Delta k)z}\\\frac{dA_3}{dz}&=-\frac{1}{2}\alpha_3A_3-\frac{i}{2}\kappa A_1A_2e^{i(\Delta k)z}\end{aligned} \tag{8.4-7}$$

其中

$$\kappa\equiv d\sqrt{\left(\frac{\mu}{\varepsilon_0}\right)\frac{\omega_1\omega_2\omega_3}{n_1n_2n_3}} \tag{8.4-8}$$

$$\Delta k\equiv k_3-\left(k_1+k_2\right) \tag{8.4-9}$$

α_m 是第 m 个光波的线性衰减系数。用 A_l 代替 E_l 的优点现在已明显体现，因为与式（8.4-2）不一样，式（8.4-7）只包含单一的耦合参量 κ。

我们现在将应用方程（8.4-7）求解场变量 $A_1(z)$，$A_2(z)$ 和 $A_3(z)$。设振幅为 $A_1(0)$，$A_2(0)$ 和 $A_3(0)$ 三个光波对应的频率分别为 ω_1，ω_2，ω_3，在 $z=0$ 处入射到非线性晶体上，我们令 $\omega_3=\omega_1+\omega_2$，$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$（无损耗），$\Delta k\equiv k_3-k_1-k_2=0$，并更进一步假设 $\omega_1\left|A_1(z)\right|^2$ 和 $\omega_2\left|A_2(z)\right|^2$ 在整个作用区内都比 $\omega_3\left|A_3(0)\right|^2$ 小。由式（8.4-7）可知，上面最后的假设等价于被“信号”光 （ω_1）和空闲光（ω_2）从“泵浦”光（ω_3）处取走的光功率与输入光功率 ω_3 相比可以忽略不计。这样我们就可把 $A_3(z)$ 当成常数，根据上述的一些假设，方程式（8.4-7）变成

$$\frac{dA_1}{dz}=-\frac{ig}{2}A_2^*,\qquad\frac{dA_2^*}{dz}=\frac{ig}{2}A_1 \tag{8.4-10}$$

其中 g 是常量，按照方程（8.4-4）和方程（8.4-8），它由下式给出

$$g \equiv \kappa A_3(0) = \sqrt{\left(\frac{\mu}{\varepsilon_0}\right)\frac{\omega_1\omega_2}{n_1 n_2}}E_3(0)d \tag{8.4-11}$$

我们注意到耦合常数 g 跟泵浦场振幅 $E_3(0)$ 成比例关系。一般来说，g 是一个复数，依赖于泵浦场振幅 $E_3(0)$ 的相位。

满足边界条件 $A_1(z=0) \equiv A_1(0)$，$A_2(z=0) \equiv A_2(0)$，耦合方程（8.4-10）的解是

$$A_1(z) = A_1(0)\cosh\gamma z - i\frac{g}{|g|}A_2^*(0)\sinh\gamma z$$

$$A_2^*(z) = A_2^*(0)\cosh\gamma z + i\frac{g}{|g|}A_1^*(0)\sinh\gamma z \tag{8.4-12}$$

这里增益系数 γ 由下式给出

$$\gamma = \left|\frac{g}{2}\right| = \left|\frac{\kappa A_3(0)}{2}\right| = \frac{1}{2}\left|\sqrt{\left(\frac{\mu}{\varepsilon_0}\right)\frac{\omega_1\omega_2}{n_1 n_2}}\ E_3(0)d\right| \tag{8.4-13}$$

这里的 d 为有效非线性光学系数。

方程（8.4.12）描述在相位匹配条件下信号光和空闲光增长的情形。在参变放大的情况下，输入光由泵浦光 ω_3 和另外两个场中之一的波（例如 ω_1）组成。在这种情形下 $A_2(0)=0$，利用光子通量关系式 $N_i \propto A_i A_i^*$，我们从式（8.4.12）得到

$$N_1(z) \propto A_1^*(z)A_1(z) = \left|A_1(0)\right|^2\cosh^2\gamma z \xrightarrow[\gamma z \gg 1]{} \frac{\left|A_1(0)\right|^2}{4}e^{2\gamma z}$$

$$N_2(z) \propto A_2^*(z)A_2(z) = \left|A_1(0)\right|^2\sinh^2\gamma z \xrightarrow[\gamma z \gg 1]{} \frac{\left|A_1(0)\right|^2}{4}e^{2\gamma z} \tag{8.4-14a}$$

所以，当 $\gamma z \gg 1$ 时，ω_1 和 ω_2 的光子通量按指数递增。如果我们将注意力集中在信号光 ω_1，它受到的放大倍数是

$$\frac{A_1^*(z)A_1(z)}{A_1^*(0)A_1(0)} \underset{\gamma z \gg 1}{=} \frac{1}{4}e^{2\gamma z} \tag{8.4-14b}$$

例：参变放大。

下面估计一个行波作用情形下的增益系数 γ，所采用的晶体是铌酸锂（$LiNbO_3$），

$$d_{15} = d_{113} = 5\times10^{-23}\,\text{MKS} \quad （见表 8-2）$$

$$\nu_1 \cong \nu_2 = 3\times10^{14}\quad \text{Hz}$$

$$P_3/\text{面积（泵浦功率）} = 5\times10^{6}\,\text{W/cm}^2$$

$$n_1 \cong n_3 = 2.2$$

利用式（8.4-5）将 P_3 转换为 $\left|E_3\right|^2$，再代入式（8.4-11）或者式（8.4-13）则得

$$\gamma = 0.35\text{cm}^{-1}$$

这个结果表明，我们不能期望从行波参变放大中获得大的增益，除非泵浦功率密度十分强。上面所描述的参变放大器的主要吸引人的地方，可能是它能产生参变振荡（OPO），这将在这一章的后面讨论。

在 8.3 节对参变放大的分析中，我们假设了相位匹配条件

$$k_3 = k_1 + k_2 \quad (8.4\text{-}15)$$

是满足的。确定相位匹配条件不满足带来的后果，是一个重要的问题。

我们从式（8.4-10）出发，此时，在式（8.4-10）中需加上相位失配的指数项，令损耗系数 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$，可得

$$\frac{dA_1}{dz} = -\frac{ig}{2}A_2^* e^{-i(\Delta k)z}$$
$$\frac{dA_2^*}{dz} = +\frac{ig}{2}A_1 e^{i(\Delta k)z} \quad (8.4\text{-}16)$$

上面这两个匹配方程可以按照下面的步骤求解。首先对式（8.4-16）的第一个方程两边乘以 $\exp[+i(\Delta k)z]$，然后两边分别对 z 求导。得到

$$\frac{d}{dz}\left(e^{+i(\Delta k)z}\frac{dA_1}{dz}\right) = -i\frac{g}{2}\frac{d}{dz}A_2^* \quad (8.4\text{-}17)$$

通过利用式（8.4-16）的第 2 个方程，可以消去 A_2^*。经过若干步的代数求解得到

$$\frac{d^2A_1}{dz^2} + i(\Delta k)\frac{dA_1}{dz} = \left|\frac{g}{2}\right|^2 A_1 \quad (8.4\text{-}18)$$

这是个常规的二阶微分方程，其通解可以写成

$$A_1(z) = e^{-i(\Delta k/2)z}[C_1\cosh(sz) + C_2\sinh(sz)] \quad (8.4\text{-}19)$$

式中 C_1 和 C_2 是常量，并且

$$s = \sqrt{|g/2|^2 - (\Delta k/2)^2} \quad (8.4\text{-}20)$$

在满足 $A_1(0)$ 和 $A_2^*(0)$ 的边界条件下，方程（8.4-16）的通解可以写成

$$A_1(z)e^{i(\Delta k/2)z} = A_1(0)\left[\cosh(sz) + \frac{i(\Delta k)}{2s}\sinh(sz)\right] - i\frac{g}{2s}A_2^*(0)\sinh(sz)$$
$$A_2^*(z)e^{-i(\Delta k/2)z} = A_2^*(0)\left[\cosh(sz) - \frac{i(\Delta k)}{2s}\sinh(sz)\right] + i\frac{g}{2s}A_1(0)\sinh(sz) \quad (8.4\text{-}21)$$

如果取 $\Delta k = 0$，上式将简化成式（8.4-12）。

考察方程（8.4-21），我们注意到只有当增益系数 s 是一个实数，才有可能获得指数增益。根据方程（8.4-20），这时

$$|g| = 2\gamma \geqslant \Delta k \quad (8.4\text{-}22)$$

当 $|g| < \Delta k$ 时，信号光（A_1）和空闲光（A_2）是不可能持续增长的。因为在这种情况下式（8.4-21）中的 sinh 和 cosh 函数分别变成三角函数

$$i\sin\left\{\frac{1}{2}\left[(\Delta k)^2 - |g|^2\right]^{1/2} z\right\}$$
$$i\cos\left\{\frac{1}{2}\left[(\Delta k)^2 - |g|^2\right]^{1/2} z\right\} \quad (8.4\text{-}23)$$

因此，ω_1 波和 ω_2 波的能量作为距离 z 的函数而振荡变化。

在参变放大中的相位匹配问题，本质上与二次谐波产生中的相位匹配是一样的。在参变

放大中代替了二次谐波产生中的相位匹配条件 $k^{2\omega}=2k^{\omega}$，根据式（8.4-15），此时需满足条件

$$k_3=k_1+k_2$$

如在二次谐波产生中那样，上述条件可以由利用在单轴晶体中的非寻常光的相速度对传播方向的依赖关系来得到。例如，在负单轴晶体（$n_e<n_o$）中，我们可将信号光波和空闲光波选成寻常光，外加泵浦光波 ω_3 作为非寻常光波。利用式（8.3-32）及关系式 $k^{\omega}=(\omega/c)n^{\omega}$，当所有的三个波皆沿着与 z 轴（光轴）成 θ_m 角的方向传播时，相位匹配条件式（8.4-15）就得到满足，其中相位匹配角 θ_m 由下式决定

$$n_e^{\omega_3}(\theta_m)=\left[\left(\frac{\cos\theta_m}{n_0^{\omega_3}}\right)^2+\left(\frac{\sin\theta_m}{n_e^{\omega_3}}\right)^2\right]^{-1/2}=\frac{\omega_1}{\omega_3}n_0^{\omega_1}+\frac{\omega_2}{\omega_3}n_0^{\omega_2} \tag{8.4-24}$$

参变振荡（OPO）

在前面的讨论中，我们证明了频率为 ω_3 的泵浦光波在非线性晶体中能引起频率分别为 ω_1 和 ω_2 的“信号”光和“空闲”光的同时放大，其中 $\omega_3=\omega_1+\omega_2$。如果非线性晶体被放置在一个光学共振腔内，如图 8.6 所示，共振腔使信号光或空闲光（或两者）获得谐振，则在某阈值泵浦强度下，参变增益将同时引起在信号光频率和空闲光频率处的振荡。阈值泵浦是指在该强度下参变增益正好与信号光和空闲光波的损耗平衡时的值，这就是光学参变振荡器的物理基础，光学参变振荡器的实际重要意义在于它可以将泵浦激光器的功率输出转换为信号光波和空闲光波的功率，下面将证明信号光和空闲光的频率可以在很大的范围内连续调谐。

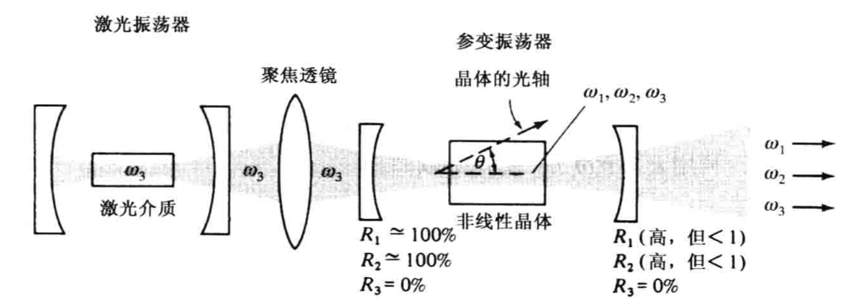


图 8.6　光学参变振荡器示意图，其中泵浦光为频率为 ω_3 的激光器的输出光，它在含有非线性晶体的光学腔内引起共振频率为 ω_1 和 ω_2 $(\omega_3=\omega_1+\omega_2)$ 的振荡

为了分析这种情形，我们回到式（8.4-7）。取 $\Delta k=0$，并忽略泵浦光波的损耗，即 $A_3(z)=A_3(0)$，结果是

$$\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}z}=-\frac{1}{2}\alpha_1A_1-\frac{ig}{2}A_2^* \tag{8.4-25}$$

$$\frac{\mathrm{d}A_2^*}{\mathrm{d}z}=-\frac{1}{2}\alpha_2A_2^*+\frac{ig^*}{2}A_1$$

和式（8.4-11）一样，复常量 g 由下式给出

$$g\equiv\sqrt{\left(\frac{\mu}{\varepsilon_0}\right)\frac{\omega_1\omega_2}{n_1n_2}}E_3(0)d \tag{8.4-26}$$

方程（8.4-25）描写了行波参量的相互作用，我们将用它们来描写共振腔内相互作用的情况。我们有理由把光学共振腔内的传播看成具有折叠式的光程，空间分布的损耗常数 α_1和α_2 的大小，必须选择得能够说明在共振腔内真正的损耗，后者包括在镜面处不完全的反射，以及在非线性晶体中由于衍射而产生的分布式的损耗。有效损耗常数 α_m 的选择，应满足 $\exp(\alpha_m l)$ 代表 ω_m 的光波通过每个共振腔距离的总损耗强度，l 是晶体长度。

如果参变增益高到足以克服损耗，就会建立稳定振荡。此时

$$\frac{dA_1}{dz}=\frac{dA_2^*}{dz}=0 \tag{8.4-27}$$

于是通过参量相互作用得到的功率增益正好与损耗相平衡。令式（8.4-25）中 $d/dz=0$，可得

$$-\frac{1}{2}\alpha_1 A_1-\frac{ig}{2}A_2^*=0$$
$$\frac{ig^*}{2}A_1-\frac{1}{2}\alpha_2 A_2^*=0 \tag{8.4-28}$$

A_1 和 A_2^* 有非零解的条件是式（8.4-28）中的行列式等于零，即

$$\det\begin{vmatrix}-\dfrac{\alpha_1}{2} & -i\dfrac{g}{2}\\ i\dfrac{g^*}{2} & -\dfrac{\alpha_2}{2}\end{vmatrix}=0$$

因此

$$|g|^2=\alpha_1\alpha_2 \tag{8.4-29}$$

这就是参变振荡的阈值条件。

上面我们曾证明信号光波（ω_1）和空闲光波（ω_2），产生参量泵浦的振荡，其频率为 ω_3，满足 $k_3=k_1+k_2$。利用 $k_i=n_i\omega_i/c$ 我们可以写出

$$\omega_3 n_3=\omega_1 n_1+\omega_2 n_2 \tag{8.4-30}$$

如 8.3 节所述，在晶体中的折射率一般与频率、晶体取向（如果是非寻常波）、晶体中的电场（电光晶体中）以及温度有关。作为一个例子，如果我们改变振荡器中晶体的取向，则振荡频率 ω_1 和 ω_2 将改变以补偿折射率的变化，因此条件式（8.4.30）将在新的频率下得到满足。这种对角度的依赖性可以作为可调谐 OPO 的调谐原理。我们将在这章的最后一部分讨论 OPO 的调谐。

频率上转换

我们可利用晶体中的参量相互作用，将一个“低”频 ω_1 的光信号与一频率为 ω_2 的强泵浦激光相混频，转换为一个高频 ω_3 的光，其中

$$\omega_1+\omega_2=\omega_3 \tag{8.4-31}$$

这对于检测系统在 ω_3 频谱附近更有效的情况下，尤其有用。利用量子力学光子图像，我们可将频率上转换中发生的基本过程考虑如下：一个信号光子（ω_1）和一个泵浦光子（ω_2）互相湮没，同时产生一个 ω_3 的光子。因为一个光子的能量是 $\hbar\omega$，能量守恒要求

$\omega_3=\omega_1+\omega_2$，与式（8.4-15）相似，动量守恒要求三个不同频率波的波矢关系为

$$\boldsymbol{k}_3=\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2 \tag{8.4-32}$$

上述观点还指出，频率为 ω_3 的输出光子数不能超过频率为 ω_1 的输入光子数。

对于频率上转换的分析可从式（8.4-7）着手。假设泵浦光 A_2 的损耗可以忽略，ω_1 和 ω_3 也没有损耗 $(\alpha=0)$，并令 $\Delta k=0$，这样可以把方程组（8.4-7）中第一个和第三个方程变成

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}z}&=-i\frac{g}{2}A_3\\ \frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}z}&=-i\frac{g}{2}A_1\end{aligned} \tag{8.4-33}$$

这里，不失普遍性，可选择泵浦光的相位为零，从而 $A_2(0)=A_2^*(0)$

$$g\equiv\sqrt{\left(\frac{\mu}{\varepsilon_0}\right)\frac{\omega_1\omega_3}{n_1n_3}}\,E_2d \tag{8.4-34}$$

式中 E_2 为泵浦激光的电场振幅。将输入光波的初始（复）振幅取作 $A_1(0)$ 和 $A_3(0)$，则式（8.4-33）的通解是

$$\begin{aligned}A_1(z)&=A_1(0)\cos\left(\frac{g}{2}z\right)-iA_3(0)\sin\left(\frac{g}{2}z\right)\\ A_3(z)&=A_3(0)\cos\left(\frac{g}{2}z\right)-iA_1(0)\sin\left(\frac{g}{2}z\right)\end{aligned} \tag{8.4-35}$$

在单一（低）频率 ω_1 输入的情形下，我们有 $A_3(0)=0$，此时

$$\begin{aligned}|A_1(z)|^2&=|A_1(0)|^2\cos^2\left(\frac{g}{2}z\right)\\ |A_3(z)|^2&=|A_3(0)|^2\sin^2\left(\frac{g}{2}z\right)\end{aligned} \tag{8.4-36}$$

所以

$$\left|A_1(z)\right|^2+\left|A_3(z)\right|^2=\left|A_1(0)\right|^2 \tag{8.4-37}$$

在对式（8.4-5）的讨论中我们曾指出，$\left|A_l(z)\right|^2$ 与 ω_l 的光子通量（每秒每平方米通过的光子）成正比，利用这个事实我们可以将式（8.4-35）解释为在任意平面 z 处频率为 ω_1 和 ω_3 的光子通量之和是常数，它等于 ω_1 的输入（$z=0$）光子通量。假如以功率表示，重写式（8.4-36）得

$$\begin{aligned}P_1(z)&=P_1(0)\cos^2\left(\frac{g}{2}z\right)\\ P_3(z)&=\frac{\omega_3}{\omega_1}P_1(0)\sin^2\left(\frac{g}{2}z\right)\end{aligned} \tag{8.4-38}$$

于是，对长度为 l 的晶体，转换效率为

$$\frac{P_3(l)}{P_1(0)}=\frac{\omega_3}{\omega_1}\sin^2\left(\frac{g}{2}l\right) \tag{8.4-39}$$

当取最大值为 ω_3/ω_1 时，它对应于所有的输入光子（ω_1）都转换为 ω_3 光子的情况。

在大多数实际情形中，转换效率都是很小的（见下面的例题），所以可用 $\sin x \approx x$（当 $x \ll 1$ 时）的近似式，于是得到

$$\frac{P_3(l)}{P_1(0)} \approx \frac{\omega_3}{\omega_1}\left(\frac{g^2 l^2}{4}\right)$$

再利用式（8.4-34）和式（8.4-5），上式可以写成

$$\frac{P_3(l)}{P_1(0)} \approx \frac{\omega_3^2 l^2 d^2}{2n_1 n_2 n_3}\left(\frac{\mu}{\varepsilon_0}\right)^{3/2}\left(\frac{P_2}{A}\right) \tag{8.4-40}$$

其中 A 是相互作用区的横截面积。

例：频率上转换。

频率上转换的主要实用价值之一是可以当成一种探测红外辐射的方法（在某些红外区域一般探测器的效率很低，速度甚慢，或需要低温冷却设备）。先将频率转换成可见或近可见光谱部分，再用光电倍增管或光电二极管之类的高效和快速的探测器来检测，见参考文献[9~12]。

作为此类应用的一个例子，考虑将一个 CO_2 激光器的10.6μm 信号和 Nd^{3+} : YAG 激光器的1.06μm 的信号混频，上转换得到0.96μm 的信号。所选用的非线性晶体须在10.6μm，1.06μm 和0.96μm 处具有小的损耗，并且它的双折射性能必须满足相位匹配条件。淡红银矿晶体（Ag_3AsS_3）可满足这些要求[12]。

采用下列数据：

$$\frac{P_{1.06\mu m}}{A} = 10^4\,\mathrm{W/cm^2} = 10^8\,\mathrm{W/cm^2}$$

$l = 10^{-2}\,\mathrm{m}$

$n_1 \approx n_2 \approx n_3 = 2.6$（基于文献[12]中的平均数据）

$d_{eff} = 1.1\times 10^{-22}$（MKS）（保守的估计比表 8.1 中的 d_{22} 的略小一半）

我们从式（8.4.40）得

$$\frac{P_{\lambda=0.96\mu m}(l=1\mathrm{cm})}{P_{\lambda=10.6\mu m}(l=0)} = 7.1\times 10^{-4}$$

这是一个能实际使用的转换效率值。

8.5　准相位匹配

晶体中的另一种相位匹配技术是准相位匹配[13]，所涉及的晶体在一个轴向（如 z 轴）实现周期性反转。通过选择合适的晶体取向和光场的极化方向，非线性系数的张量分量 d_{ijk} 将受到周期性调制。耦合波方程（8.4-2）保持不变，但用 $d(z)$ 代替 d。$d(z)$ 为周期性函数，可以作傅里叶级数展开：

$$d(z) = d_{体}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \exp\left(im\frac{2\pi}{\Lambda}z\right)\right) \tag{8.5-1}$$

其中 c_m 为傅里叶展开系数，Λ 为 $d(z)$ 的周期。作为一个例子，对式（8.4-2）的第一式

的作用变为

$$\frac{\mathrm{d}E_1}{\mathrm{d}z}=-\frac{i\omega_1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_1}}d_{\text{体}}E_3E_2^*\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_m\exp\left[i\left(m\frac{2\pi}{\Lambda}-k_3+k_2+k_1\right)z\right] \tag{8.5-2}$$

对于某些整数 m，满足以下条件时

$$m\frac{2\pi}{\Lambda}=k_3-k_2-k_1 \tag{8.5-3}$$

可以实现相位匹配。忽略式（8.5-2）中的相位不匹配项（相位不匹配项的影响在经过远大于相干长度的距离后最终平均为零），将式（8.5-2）改写为

$$\frac{\mathrm{d}E_1}{\mathrm{d}z}=-\frac{i\omega_1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_1}}d_{\text{体}}c_m\exp\left[i\left(m\frac{2\pi}{\Lambda}-k_3+k_2+k_1\right)z\right] \tag{8.5-4}$$

$$c_m=\frac{1}{\Lambda}\int_0^{\Lambda}\frac{\mathrm{d}(z)}{d}\exp(-im\frac{2\pi}{\Lambda}z)\mathrm{d}z \tag{8.5-5}$$

式中 m 是整数，并且满足方程（8.5-3）。

$d(z)$ 空间周期性最简单的情形是，每隔 $\Lambda/2$ $d(z)$ 在 $d_{\text{体}}$ 和 $-d_{\text{体}}$ 两个值之间变化。在这种情形下

$$c_m=\frac{1-\cos m\pi}{m\pi}\quad \text{for } m\neq 0 \tag{8.5-6}$$

由此，选择 $m=1$，有效非线性常数为

$$d_{\text{有效}}=c_m d_{\text{体}}=\frac{2}{\pi}d_{\text{体}} \tag{8.5-7}$$

对于 m=1 的准相位匹配，根据式（8.5-3）空间周期为 $\Lambda=2\pi/\Delta k=2L_c$。从式（8.5-4）可以清楚地看出，理论上准相位匹配结构可以获得与理想的相位匹配（$\Delta k=0$）下同样的转换效率，只是要求较长的相互作用长度，其长度补偿因子为 $d_{\text{体}}/d_{\text{有效}}=c_m^{-1}$。

为了从直观上理解准相位匹配，我们注意到在

$$z=L_c, 2L_c,\cdots \qquad \text{和} \qquad L_c=\frac{\pi}{\Delta k} \tag{8.5-8}$$

在相位不匹配的情况下，新产生的二次谐波的振幅与已经产生的二次谐波的振幅在这些位置符号相反。新产生的二次谐波的振幅的符号反转，导致 $E^{2\omega}(z)$ 逐渐累积。由准相位匹配导致 $E^{2\omega}(z)$ 的累积，可通过互作用的相量图来说明。以二次谐波的产生为特例，我们将互作用长度 L 分成足够小的段，每段长度为 δz，这样 $(\Delta k)\delta z\ll\pi$，由式（8.3-23）可得

$$\Delta E^{(2\omega)}(z)=-i\omega\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,d(E^{(\omega)})^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Delta k)z}\delta z \tag{8.5-9}$$

其中 $\Delta E^{(2\omega)}$ 为相量 $E^{2\omega}(z)$ 由于以 z 为中心的段长 δz 的复增量，通过加上 $\Delta E^{(2\omega)}$ 增量，我们得到如图 8.7 的相量图。在相位不匹配情形下（图 8.7（a）），产生的二次谐波场持续增强，在 $z=\pi/\Delta k$ 达到最大值（通常很小），通过较长距离后，$E^{(2\omega)}$ 开始减小，在 $z=2\pi/\Delta k$ 处回到零。在准相位匹配中（图 8.7（b）），相互作用的符号在每隔 $z=\pi/\Delta k$ 处反转。这通过反转 $d(z)$ 的符号实现，其结果虽然增长率比理想体相位匹配小，但 $E^{(2\omega)}$ 保持单调增长（图 8.7（c））。

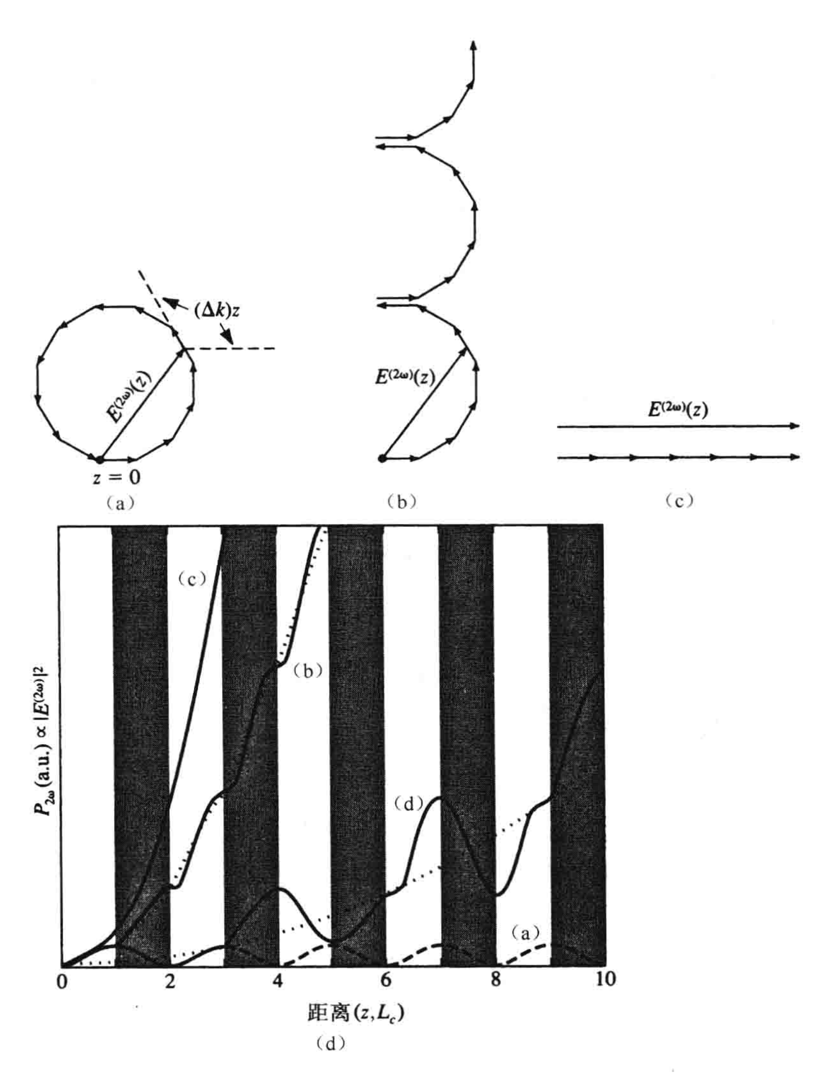


图 8.7　（a）相位不匹配情形，（b）准相位匹配情形，（c）体双折射相位匹配 $\Delta k=0$ 情形下二次谐波相量 $E^{(2\omega)}(z)$ 的演变过程；（d）为（a），（b）和（c）三种情形下，晶体中的二次谐波场 $E^{(2\omega)}(z)$，（d）曲线为取三阶傅里叶系数（$m=3, L_c=\dfrac{\pi}{\Delta k}$）的准相位匹配下的情形。（d）引自文献[14]）

晶体介质波导中的准相位匹配

准相位匹配的主要实际应用是在介质波导结构中，这主要由于在单模波导中，即使在输入能量较小的情况下，小的截面面积（约 10^{-8}cm^2）仍将导致非常大的能量密度。这使得在合理的晶体长度（如 1cm）下可以获得足够的转换效率。其次由于没有衍射，可以在整个晶体长度上保持高的能量密度。目前，绝大多数的研究工作集中在铌酸锂晶体（$LiNbO_3$）制作的光波导[15]。非线性系数的空间调制可以通过应用周期性的电场来反转晶体 c 轴的方向[16,17]或通过钛的渗透引入周期为 $\Lambda=2L_c$ 的波导[17]。这种周期性反转是由电场周期性（空间上）反转和杂质渗透引起的晶体电极化方向的周期性反转引起的。

8.6　三阶非线性过程

三阶非线性极化项由下式表示

$$P_i^{(3)} = 4\chi_{ijkl}E_jE_kE_l \tag{8.6-1}$$

这引起了三阶非线性效应，包括三次谐波产生（THG），受激拉曼散射（SRS），受激布里渊散射（SBS），四波混频（FWM）和光克尔效应，等等。本节将研究三阶非线性引起的光波耦合问题。特别地，我们将要研究一些非常重要的跟光通信有关的三阶非线性过程。

光克尔效应

1875 年，J.Kerr 首次发现在强的电场的透明液体中出现双折射效应。由于效应与电场 E 的二次方有关，后来通常称其为二次电光效应。由于克尔效应引起的双折射量可以写成

$$\Delta n = n_{\parallel} - n_{\perp} = \lambda K E^2 \tag{8.6-2}$$

这里 K 就是克尔常量，λ 是真空中的波长。在方程（8.6-2）中，$n_{\parallel}$ 是光偏振方向沿着电场方向的折射率，$n_{\perp}$ 是光偏振方向垂直于电场方向的折射率。

根据方程（8.6-1），在非线性介质中的光波可以引起折射率的变化。设光场可以写成

$$E_j(t) = \mathrm{Re}(E_{0j}^{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}) = \tfrac{1}{2}(E_{0j}^{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{c.c.}) \quad (j = x, y, z) \tag{8.6-3}$$

这里 E_{0j}^{ω} 是常量。三阶非线性极化项可以写成

$$P_i^{(3)}(t) = 4\chi_{ijkl}\tfrac{1}{2}(E_{0j}^{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{c.c.})\tfrac{1}{2}(E_{0k}^{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{c.c.})\tfrac{1}{2}(E_{0l}^{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{c.c.}) \tag{8.6-4}$$

这里假设求和对三个重复的指数 (j,k,l) 进行。

下面重点研究，当输入光频率为 ω，在同一频率振荡的非线性项的振幅上。忽略其他项，可以得到光频率为 ω 时振荡在同一频率的非线性极化项的振幅为

$$P_{\mathrm{NL}i}^{(\omega)} = \chi_{ijkl}\{E_{0j}^{\omega}E_{0k}^{\omega}E_{0l}^{\omega *} + E_{0j}^{\omega *}E_{0k}^{\omega}E_{0l}^{\omega} + E_{0j}^{\omega}E_{0k}^{\omega *}E_{0l}^{\omega}\} \tag{8.6-5}$$

这里假设求和对三个重复的指数 (j,k,l) 进行。这个在频率 ω 的非线性极化振荡相当于在介质极化率中的自诱导变化。

考虑一个简单的情况，振幅为 E_{0x}^{ω} 的光波在各项同性的介质中传播，偏振方向沿着 x 轴。

频率为 ω 的非线性极化波振幅可以写成

$$P_{\mathrm{NL}x}^{(\omega)} = 3\chi_{xxxx}E_{0x}^{\omega}(E_{0x}^{\omega}E_{0x}^{\omega *}) \tag{8.6-6}$$

这相当于线性电极化率的一个变化 $\Delta\chi$。我们记得 $n^2 = 1+\chi$。这样三阶非线性极化导致了折射率的变化

$$\Delta n = n_2 I = \frac{\Delta\chi}{2n} = \frac{3\chi_{xxxx}}{2n\varepsilon_0}|E_{0x}|^2 = \frac{3c\mu_0\chi_{xxxx}}{n^2\varepsilon_0}I \tag{8.6-7}$$

这里 I 是光束的强度，n_2 是光的克尔系数。在一个掺锗氧化物的硅的光纤中，克尔系数大约（取决于掺杂浓度）为

$$n_2 \approx 3.0 \times 10^{-20}\ \mathrm{m^2/W} \tag{8.6-8}$$

与大多数三阶非线性过程一样，克尔效应在大多数介质中都相对较弱。在光纤中，因为在芯层传导的高强度光波和波导中的长作用距离，克尔效应可以很大。在光纤中的三阶非线性可以导致四波混频、自相位调制和交叉相位调制，等等。

根据方程（8.6-7），线性偏振光的克尔系数由下式给出

$$n_2 = \frac{3c\mu_0\chi_{xxxx}}{n^2\varepsilon_0} = \frac{3}{cn^2\varepsilon_0^2}\chi_{xxxx} \tag{8.6-9}$$

对于一般的偏振状态，克尔系数只与式（8.6-9）稍微不同。任意偏振态光波的电场可以写成

$$\boldsymbol{E}(t) = \frac{1}{2}(\hat{x}E_{0x}^{\omega}\mathrm{e}^{i\omega t} + \hat{y}E_{0y}^{\omega}\mathrm{e}^{i\omega t} + \mathrm{c.c.}) \tag{8.6-10}$$

其中 E_{0x} 和 E_{0y} 是电场分量。一个相似的推导产生了下面的在 ω 处的非线性极化的振幅（见 14.2 节）

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{NL}x}^{(\omega)} &= \chi_{xxxx}\{(3|E_{0x}^{\omega}|^2 + 2|E_{0y}^{\omega}|^2)E_{0x}^{\omega} + E_{0y}^{\omega 2}E_{0x}^{\omega *}\} \\ P_{\mathrm{NL}y}^{(\omega)} &= \chi_{xxxx}\{(3|E_{0y}^{\omega}|^2 + 2|E_{0x}^{\omega}|^2)E_{0y}^{\omega} + E_{0x}^{\omega 2}E_{0y}^{\omega *}\} \end{aligned} \tag{8.6-11}$$

其中我们使用了下面的对称性关系（见 14.2 节和习题 14.8）：

$$\chi_{1111} = \chi_{1122} + \chi_{1212} + \chi_{1221}, \qquad \chi_{1111} = \chi_{2222} \tag{8.6-12}$$

我们注意到，当两个偏振分量都存在时，交叉相位调制存在。换句话说，x 分量的振幅能引起 y 偏振光的折射率变化，反之亦然。圆偏振光和非偏振光的克尔系数也可以定义。应用方程（8.6-10），克尔系数由下式给出（见习题 8.14）

$$n_{2,\mathrm{unpolarized}} = \frac{5}{6}n_2 = \frac{5}{2cn^2\varepsilon_0^2}\chi_{xxxx} \tag{8.6-13}$$

和

$$n_{2,\mathrm{circular}} = \frac{2}{3}n_2 = \frac{2}{cn^2\varepsilon_0^2}\chi_{xxxx} \tag{8.6-14}$$

表 8.5　一些材料的克尔系数

材料名称	波长（μm）	折射率	χ_{1111}（esu）（10^{-13}）	χ_{1111}（MKS）（10^{-33}）	n_2（MKS）（$10^{-18}\mathrm{m^2/W}$）
CCl_4	0.694	1.454	0.05	0.62	0.04
CS_2	1.06	1.594	4.65	57.50	2.89
	0.694	1.612	3.57	44.10	2.16
Lucite	1.06	1.49	0.11	1.34	0.08
Ruby	1.06	1.76	0.07	0.85	0.04
SF_6 glass	1.06	1.77	0.42	5.22	0.21
SiO_2	0.694	1.455	0.01	0.15	0.01
YAG	1.06	1.83	0.15	1.90	0.07
	0.694	1.829	0.06	0.74	0.03

数据取自参考文献[18]。

受激拉曼散射

拉曼效应在 1928 年由 Chandrasekhera Venkata Raman 发现，它是由物质分子引起的光的非弹性散射。当一个光子与原子系统（如分子）相互作用，它的散射将是下面三种情况之一：（1）弹性散射，保持其光子能量（瑞利散射）；（2）由原子系统的准粒子激发（例如，分子振动）引起的非弹性散射，因而传给介质能量（斯托克斯散射）；或者（3）由介质移除能量引起散射（反斯托克斯散射）。所以拉曼效应包括入射光子和准粒子激发例如声子（晶格振动）的相互作用。就能级图而言，拉曼效应可以用图 8.8 表示。

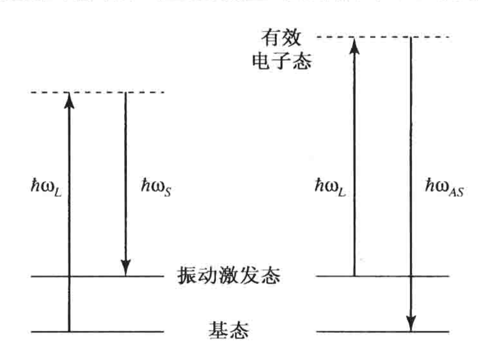


图 8.8　拉曼散射能级图。对于斯托克斯散射，原子系统从基态激发到激发态（振动激发态）；对于反斯托克斯散射，原子系统从激发态跃迁到基态并释放能量给光子

拉曼频移$(\omega_L-\omega_S)$，在$10^{12}\sim10^{13}$Hz 的范围内，取决于分子的不同振动频率。拉曼光谱学可成功用于研究物质中低能量原子激发，同时也可用于研究物质的结构、电子、振动和磁场特性。正如在图 8.8 中所描述的，对每个分子振动，我们观察到两条拉曼谱线。斯托克斯线和反斯托克斯线分别由基态到第一个受激振动态的跃迁和相反过程所引起。由于室温下激发态上的粒子数较少，反斯托克斯线强度与斯托克斯线强度相比较弱。分子振动的寿命可由拉曼谱线宽度推出。

像克尔效应一样，拉曼散射在大多数介质中相对较弱。在光纤中，由于激光束光强高和作用距离长（可达 100km）拉曼散射引起的非线性效应可以相当大。当进入光纤的光功率超过各自的阈值时，受激拉曼散射（SRS）和受激布里渊散射（SBS）可以同时发生。在受激散射的条件下，光能量可以更有效地从输入泵浦波转换为散射斯托克斯波。

散射波对泵浦波的频移，在受激布里渊散射（SBS）中频移方向相反。这意味着光纤远端的光功率不再随着输入光功率线性增加。最大输入光功率被限制，超过率部分的功都将反射出光纤。在长距离或者多分支的光纤网络中，使尽可能多的光功率输入光纤以补偿损耗和功率分流显得尤其重要，因此必须避免 SBS 引起的最大输出功率限制。

在受激拉曼散射（SRS）中，斯托克斯波与泵浦波之间频移的典型值为10～100nm，它将沿着光纤和泵浦波一起传播。如果泵浦波是波分复用传输系统的一个信道，斯托克斯波可以与其他信道上较长波长的信号波重叠，这将引起串音干扰和拉曼放大。拉曼放大引起短波信道的能量损耗，又将作为长波长信道放大的泵浦。这将引起波分复用（WDM）系统各信道之间功率分配的不均衡，降低低频信道的信噪比以及对高频信道引起串音干扰。这些效应都将降低光通信系统的信息承载容量。另外，合理配置信道之间的间隔，受激拉曼散射可以

用来对信号光波进行放大。这将在第 17 章讨论。

现在考虑受激拉曼散射中的能量的耦合。为了简单起见，假设激光和斯托克斯散射光都沿着 x 轴偏振。电场可以写成

$$E_x(t) = \mathrm{Re}(E_L \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_L t - k_L z)} + E_S \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_S t - k_S z)}) = \frac{1}{2}(E_L \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_L t - k_L z)} + E_S \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_S t - k_S z)} + \mathrm{c.c.}) \tag{8.6-15}$$

E_L 和 E_s 是电场振幅，ω_L 和 ω_S 是频率，k_L 和 k_S 是波数。利用方程（8.6-1），频率为 ω_L 和 ω_S 的非线性极化振荡的振幅为

$$P_{\mathrm{NL}}^{(\omega_L)} = E_L(6\chi_{R1}^{(3)} E_S E_S^* + 3\chi_1^{(3)} E_L E_L^*) \tag{8.6-16}$$

$$P_{\mathrm{NL}}^{(\omega_S)} = E_S(3\chi_2^{(3)} E_S E_S^* + 6\chi_{R2}^{(3)} E_L E_L^*) \tag{8.6-17}$$

式中我们使用不同的有效三阶非线性极化率来考虑频率的影响。通过考察上述方程，我们注意到非线性极化项 $\chi_1^{(3)}$ 和 $\chi_2^{(3)}$ 只是对介电常量（或者折射率）的修正。他们对前面讨论的光学克尔效应起作用。这两个非线性极化率对受激拉曼散射没有直接的影响，在下面的讨论中可以忽略。另外，非线性极化项 $\chi_{R1}^{(3)}$ 和 $\chi_{R2}^{(3)}$ 有效地耦合了 E_L 和 E_s，引起了这两个光波的能量交换。这两个非线性极化率是产生受激拉曼过程的原因，称为拉曼极化率。根据量子力学理论，可以证明

$$\chi_{R1}^{(3)} = \chi_{R2}^{*(3)} \tag{8.6-18}$$

换句话说，这两个拉曼极化率互为复共轭。

按照 8.3 节中推导耦合方程的过程，可以得到

$$\frac{\mathrm{d}E_L}{\mathrm{d}z} = -\frac{1}{2}\alpha_L E_L + i\frac{6\mu_0\omega_L^2}{k_L}\chi_{R1}^{(3)}|E_S|^2 E_L \tag{8.6-19}$$

$$\frac{\mathrm{d}E_S}{\mathrm{d}z} = -\frac{1}{2}\alpha_S E_S + i\frac{6\mu_0\omega_S^2}{k_S}\chi_{R2}^{(3)}|E_L|^2 E_S \tag{8.6-20}$$

这里我们考虑了吸收和散射引起的线性损耗（α_L 和 α_S）。这两个方程决定了激光泵浦波和斯托克斯波的能量耦合。

为了理解斯托克斯增益，我们先考虑一个简单的问题，激光振幅 E_L 是一个与 z 无关的常量。这种情况适用于非线性相互作用引起的激光（频率为 ω_L）能量损耗跟激光能量相比足够小。这样方程（8.6-20）可以对斯托克斯场 (ω_S) 进行积分。根据方程（8.6-20）我们得到

$$|E_S|^2(z) = |E_S|^2(0)\exp(G_R z - \alpha_S z) \tag{8.6-21}$$

这里拉曼增益 G_R 由下式给出

$$G_R = \frac{12\mu_0\omega_S^2}{k_S}|E_L|^2\,\mathrm{Im}(\chi_{R1}^{(3)}) = -\frac{12\mu_0\omega_S^2}{k_S}|E_L|^2\,\mathrm{Im}(\chi_{R2}^{(3)}) \tag{8.6-22}$$

我们注意到斯托克斯波被一个指数增益系数 G_R 增大，G_R 跟激光光强成正比。因此，拉曼介质被激光泵浦后，可以用作斯托克斯线附近光谱区域的光放大器。

在受激拉曼散射（SRS）中，没有输入斯托克斯光。激光束被聚集在拉曼介质中，并被限制在直径几微米细丝中。这种自诱导捕获是由光的克尔效应和激光束的高斯分布共同作用引起的。这种效应极大地提高了激光束的强度，因此在斯托克斯线附近有一个极大的拉曼增益系数。这个增益非常大以至于任何在斯托克斯线附近的电磁辐射都被显著放大，导致受激

拉曼散射。

正如我们前面所指出，拉曼散射包括输入激光束和分子振动的共同作用。散射过程在低频端产生了斯托克斯光。一旦斯托克斯光产生，它以频率 $\omega_L-\omega_S$ 激励输入激光波，这个频率跟分子振动频率相同。因此，一个正反馈循环建立了，激励项作为驱动进一步增加了分子振动的振幅，反过来分子的振动又使拉曼散射波的振幅增大。

在非线性光学相互作用中，不同频率的光子都参与其中，我们可以方便地以光子通量来描述能量的交换，光子通量是单位时间、单位面积通过的光子数。一个电场振幅为 E 的光束其光子通量定义为

$$\phi=\frac{I}{\hbar\omega}=\frac{I}{\hbar\omega}\frac{k}{2\mu_0\omega}|E|^2 \tag{8.6-23}$$

式中 I 表示光束的强度。应用光子通量，耦合方程可以写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\phi_L=-\alpha_L\phi_L-G_R'\phi_L\phi_S \tag{8.6-24}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\phi_S=-\alpha_S\phi_S+G_R'\phi_L\phi_S \tag{8.6-25}$$

这里用光子通量表示的拉曼增益系数由下式给出

$$G_R'=\frac{12\hbar\mu_0^2\omega_L^2\omega_S^2}{k_Lk_S}\mathrm{Im}(\chi_{R1}^{(3)})=-\frac{12\hbar\mu_0^2\omega_L^2\omega_S^2}{k_Lk_S}\mathrm{Im}(\chi_{R2}^{(3)}) \tag{8.6-26}$$

我们注意当线性衰减系数消失时（$\alpha_L=\alpha_S=0$），方程式（8.6-24）和式（8.6-25）与光子通量守恒一致。换句话说，一个激光光子（ω_L）转换成一个斯托克斯光子（ω_S）。

当两个线性衰减系数的差异可以忽略时（$\alpha_L=\alpha_S=\alpha$），耦合方程式（8.6-24）和式（8.6-25）可以精确求解。它们可以写成

$$\phi_L(z)=\phi_L(0)\frac{1+m^{-1}}{1+m^{-1}\exp\left(\frac{\gamma}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha z})\right)}\exp(-\alpha z) \tag{8.6-27}$$

$$\phi_S(z)=\phi_S(0)\frac{1+m}{1+m\exp\left(-\frac{\gamma}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha z})\right)}\exp(-\alpha z) \tag{8.6-28}$$

式中指数增益系数 γ 由下式给出

$$\gamma=G_R'[\phi_S(0)+\phi_L(0)] \tag{8.6-29}$$

m 为在输入（z=0）端，光子通量的比值

$$m=\phi_L(0)/\phi_S(0) \tag{8.6-30}$$

当线性衰减系数为零（$\alpha=0$），上述解简化为

$$\phi_L(z)=\phi_L(0)\frac{1+m^{-1}}{1+m^{-1}\exp(\gamma z)} \tag{8.6-31}$$

$$\phi_S(z)=\phi_S(0)\frac{1+m}{1+m\exp(-\gamma z)} \tag{8.6-32}$$

在典型的受激拉曼散射中，初始的斯托克斯光子通量非常小，$\phi_S(0)\ll\phi_L(0)$（或者 $1\ll \mathrm{m}$）。根据方程（8.6-32），我们注意到开始时斯托克斯光子通量指数增加，到达一个饱和

值，而激光束通量大大减小。

图 8.9 显示了能量交换按照光子通量随相互作用距离函数变化的曲线。

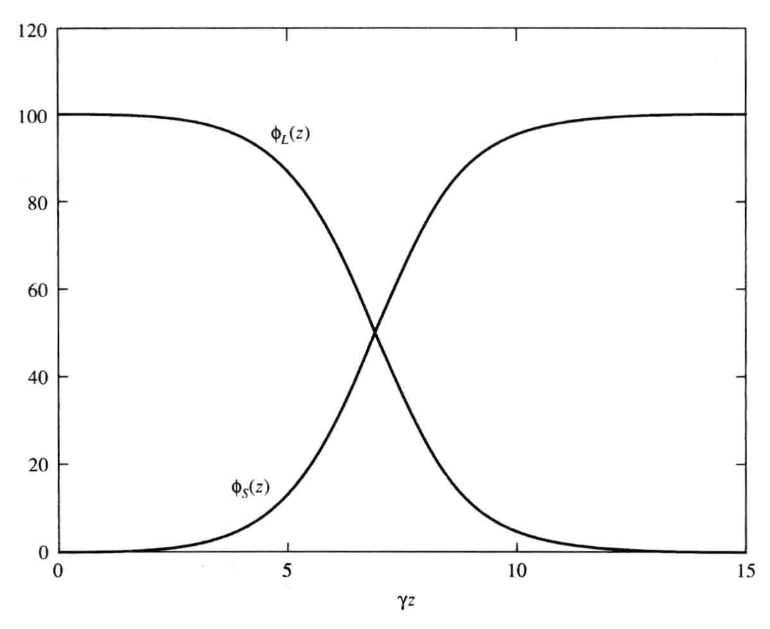


图 8.9　衰减系数为零（$\alpha = 0$）时，激光束和斯托克斯波的光子通量随相互作用距离 γ_z 变化的理论曲线

基于量子力学的能级图见图 8.8，当在频率移动量与分子振动频率相同时，可产生拉曼辐射的峰值。换句话说，

$$\omega_L - \omega_S = \omega_v \tag{8.6-33}$$

式中 ω_V 为分子振动频率。

我们可以得出结论：非线性极化方程（8.6-17）在斯托克斯线（频率为 ω_S）与空间和时间有关，即依赖于 $\exp(i\omega_S t - ik_S z)$，这与斯托克斯场完全相同。这可以用来解释为什么相位匹配条件在受激拉曼散射中自动满足。表 8.6 给出了某些材料的拉曼特性。

表 8.6　某些材料的拉曼特性

材料名称	拉曼移动（THz）	线宽（GHz）	拉曼增益（10^{-3}cm/MW）
液体氧 O_2	46.6	3.5	14.5±4
液体氮 O_2	69.8	2.01	17±5
苯 C_6H_6	29.8	64.5	2.8
CS_2	19.7	15	24
硝基苯	40.4	198	2.1
铌酸锂	7.74	210	28.7
钽酸锂	6.45	360	10
二氧化硅	14		0.8

引自文献[19]。

例：二氧化硅（Sio$_2$）中的拉曼增益。

考虑一束功率为 10mW 的激光束输入到有效面积为100μm^{2}单模光纤中，强度为$I=10^8\,\mathrm{W/m^2}$。二氧化硅的增益系数为0.8×10^{-3}cm/MW，我们获得拉曼增益系数为$8\times10^{-4}\,\mathrm{m^{-1}}$。

8.7　受激布里渊散射

在拉曼散射中，入射光子跟介质分子相互作用，引起了分子振动。散射光子频率减小的量与内部分子振动频率相同。频率移动的范围在$10^{12}\sim10^{13}$Hz。当频率移动是由于分子或原子的物理运动引起时，也会发生类似的非弹性散射。例如，自发布里渊散射包括热激发的声波。这种光的散射早在 1922 年就由布里渊发现。布里渊散射中的频率变化范围在10^{10}Hz。

类似于受激拉曼散射（SRS），受激布里渊散射（SBS）只有在泵浦激光束足够强时才会发生。受激布里渊散射中非线性作用的理论与 8.6 节中的受激拉曼散射的形式相似。一般来说，受激布里渊散射在任何方向发生。这里我们考虑最重要的反向布里渊发射的情形。设电场（假设 x 方向极化）可以写成

$$E_x(t)=\mathrm{Re}(E_L\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_L t-k_L z)}+E_B\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_B t+k_B z)})=\frac{1}{2}(E_L\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_L t-k_L z)}+E_B\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_B t+k_B z)}+\mathrm{c.c.})\tag{8.7-1}$$

这里E_L和E_B是电场振幅，ω_L和ω_B代表频率，k_L和k_B是波数。注意到布里渊波束是向后传播的。利用方程（8.6-1），频率在ω_L和ω_B非线性极化振荡的振幅可以写成

$$P_{\mathrm{NL}}^{(\omega_L)}=E_L(6\chi_B^{(3)}E_BE_B^*+3\chi_1^{(3)}E_LE_L^*)\tag{8.7-2}$$

$$P_{\mathrm{NL}}^{(\omega_B)}=E_B(3\chi_2^{(3)}E_BE_B^*+6\chi_B^{(3)}E_LE_L^*)\tag{8.7-3}$$

这里我们使用不同的有效三阶非线性极化率来考虑与频率的可能联系。通过考察上述方程，我们注意到非线性极化项$\chi_1^{(3)}$和$\chi_2^{(3)}$只是对介电常量（或者折射率）的修正。它们对前面讨论的光学克尔效应起作用。这两个非线性极化率对受激布里渊散射没有直接的影响，在下面的讨论中可以忽略。另外，非线性极化项$\chi_B^{(3)}$有效地耦合了E_L和E_B，引起了这两个光波的能量交换。这两个非线性极化率是产生受激布里渊过程的原因，称为受激布里渊极化率。

根据前面推导 SRS 的耦合方程类似的过程，可以得到

$$\frac{\mathrm{d}E_L}{\mathrm{d}z}=-\frac{1}{2}\alpha E_L+i\frac{6\mu_0\omega_L^2}{k_L}\chi_B^{(3)}|E_B|^2E_L\tag{8.7-4}$$

$$\frac{\mathrm{d}E_B^*}{\mathrm{d}z}=+\frac{1}{2}\alpha E_B^*+i\frac{6\mu_0\omega_B^2}{k_B}\chi_B^{(3)}|E_L|^2E_B^*\tag{8.7-5}$$

式中α代表由于吸收和其他散射损耗引起的线性衰减。这两个方程决定了激光泵浦波和布里渊光束的能量耦合。

为了理解布里渊增益，我们先考虑一个简单的问题，激光振幅E_L是一个与 z 无关的常量。这种情况适用于非线性相互作用引起的激光（频率为ω_L）能量损耗跟激光能量相比足够小。这样方程（8.7-5）可以对布里渊场(ω_B)进行积分。根据方程（8.7-5）我们得到

$$|E_B|^2(z)=|E_B|^2(L)\exp[(G_B-\alpha)(L-z)]\tag{8.7-6}$$

或者

$$\frac{|E_B|^2(0)}{|E_B|^2(L)}=\exp[G_BL-\alpha L]$$

布里渊增益系数 G_B 由下式给出

$$G_B=\frac{12\mu_0\omega_B^2}{k_B}|E_L|^2\,\mathrm{Im}(\chi_B^{(3)}) \tag{8.7-7}$$

我们注意到布里渊波被一个指数增益系数 G_B 增大，G_B 跟激光光强成正比。因此，布里渊线介质被激光泵浦后，可以用作布里渊线附近光谱区域的光放大器。但是，增益带宽相对较窄。

实际上，可以忽略 ω_L 和 ω_B 之间的微小差别。根据场振幅的耦合方程，我们可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}|E_L|^2=-\alpha|E_L|^2-G_B|E_L|^2|E_B|^2 \tag{8.7-8}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}|E_B|^2=+\alpha|E_B|^2-G_B|E_L|^2|E_B|^2 \tag{8.7-9}$$

或者等价地，以光强表示

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}I_L=-\alpha I_L-gI_LI_B \tag{8.7-10}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}I_B=+\alpha I_B-gI_LI_B \tag{8.7-11}$$

式中 g 是布里渊增益系数，单位是 cm/MW 。

当线性衰减系数为零（$\alpha=0$），光强耦合方程可以得到解析解。其解可以写成

$$I_L(z)=\frac{c_0}{1-\rho\exp(-gc_0z)} \tag{8.7-12}$$

$$I_B(z)=\frac{c_0}{1-\rho\exp(-gc_0z)}\rho\exp(-gc_0z) \tag{8.7-13}$$

式中 c_0 和 ρ 是常数，它们与 z=0 处的激光束强度 $I_L(0)$ 和 z=L 处的布里渊噪声强度 $I_B(0)$ 有关

$$\frac{I_B(L)}{c_0+I_B(L)}=\frac{I_L(0)-c_0}{I_L(0)}\exp(-gc_0L) \tag{8.7-14}$$

$$\rho=\frac{I_L(0)-c_0}{I_L(0)}=\frac{I_B(0)}{I_L(0)} \tag{8.7-15}$$

参数 ρ 实际上就是输入光束能量转化为 SBS 光束的比率。图 8.10 说明光强度是作用距离 z 的函数。

对于光网络中的传输，我们对入射强度（或能量）$I_L(0)$ 和转换强度（或能量）$I_L(L)$ 的关系特别感兴趣。应用方程式（8.7-12）～式（8.7-15），可以得到

$$I_L(0)=I_L(L)\frac{I_L(L)-I_B(L)}{I_L(L)-I_B(L)\exp\{g[I_L(L)-I_B(L)]L\}} \tag{8.7-16}$$

式中 $I_B(L)$ 是 z=L 时，由一个微小的噪声引起的 SBS 强度。

虽然由这个方程很难由这个方程反过来推出输出强度和输入强度的函数表达式，但是这个方程仍然很有用。图 8.11 和图 8.12 表示输入和输出关系曲线。我们注意到，当输入强度增大，非线性布里渊作用也增加。非线性相互作用导致一个非常强的受激布里渊散射光束，因此，转换波是输入强度的非线性函数。在强度较低时，转换光束一开始随着输入强度线性

增加。在高强度时，转换光束（例如：$I_L(0) > 15\text{kW/cm}^2$），转换强度按对数增加（几乎是平坦的）。换句话说，转换强度不随输入强度按比例增加。受激布里渊散射是一个非线性光学过程。考察转换激光束强度 $I_L(L)$ 作为输入激光束强度 $I_L(0)$ 的函数比较有意义。这在单模光纤中尤其重要，在单模光纤中的作用距离可以达到几千米，累计的非线性光学效应相当强。

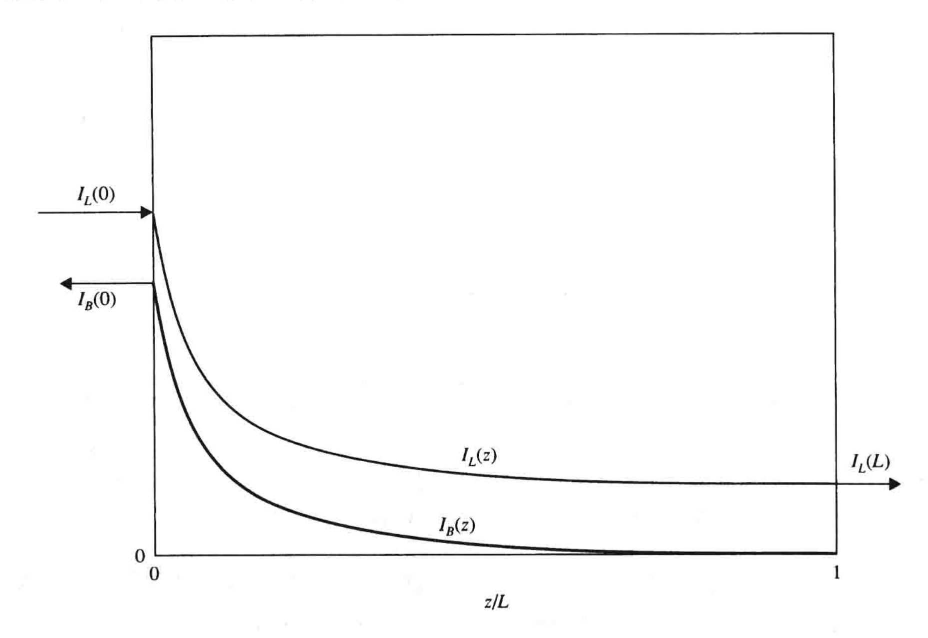


图 8.10　衰减系数为零（$\alpha = 0$）时，SBS 光强的理论曲线。注意到 SBS 光强从非常低的噪声强度 $I_B(L)$（$z=L$），增加到非常大的 $I_B(0)$（$z=0$）

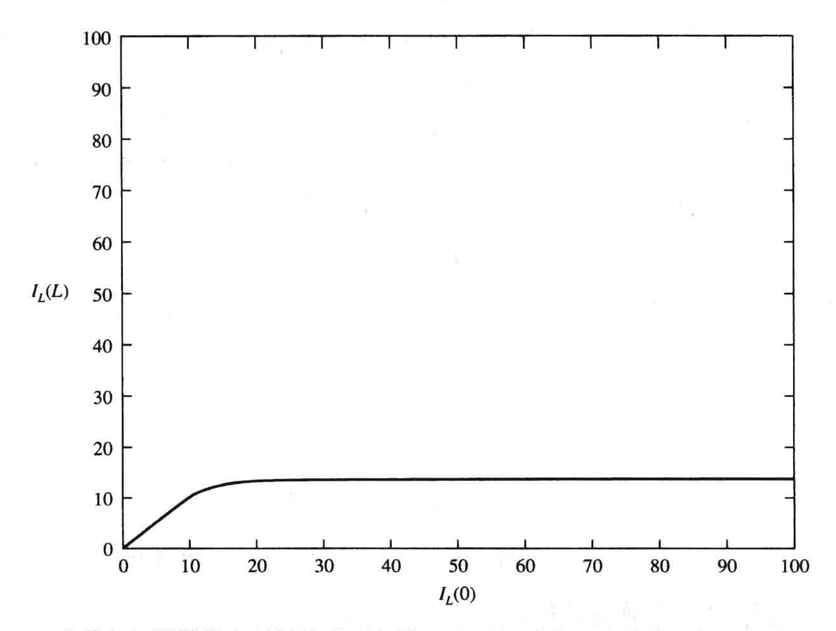


图 8.11　受激布里渊散射中的转换光强与输入光强关系的理论曲线（单位：kW/cm^2）。假设 $gL = 0.00135\text{cm}^2/\text{W}$。初始 $I_B(L) = 0.0001\text{kW/cm}^2$

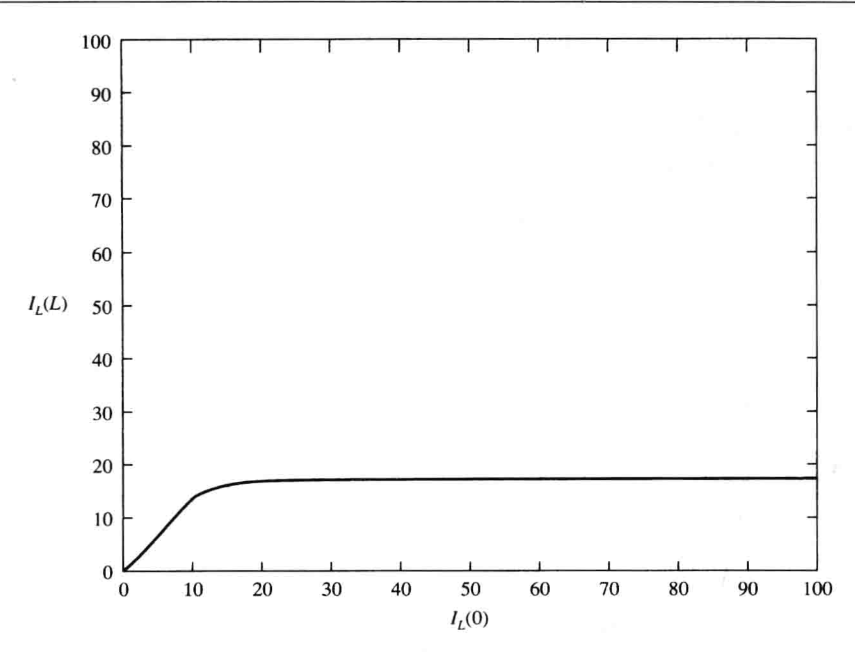


图 8.12　受激布里渊散射中的转换光强与输入光强关系的理论曲线（单位： kW/cm^2 ）。假设 gL =0.00135cm^2/W 。初始 $I_B(L) = 0.000001\text{kW/cm}^2$

正如我们所指出的那样，布里渊散射包括非线性介质中与声波的相互作用。散射过程必须遵守能量和动量守恒，因此，这三个波的频率和波矢的关系为

$$\begin{aligned} \Omega_A &= \omega_L - \omega_B \\ K_A &= k_L - (-k_B) \end{aligned} \tag{8.7-17}$$

我们注意到，布里渊波是向后传播的，ω_L 和 ω_B ，k_L 和 k_B 分别是激光和布里渊波的频率和波数。电致伸缩力 $\propto \chi_B^{(3)} E_L E_B^*$ 由于激光束和布里渊波的存在而产生。它产生了声波，频率为 $\Omega_A = \omega_L - \omega_B$ 。这个声波调制了介电常数 ε ，建立了边（频）带，带宽为 $\omega_L - (\omega_L - \omega_B) = \omega_B$ 。正向反馈循环建立，电致伸缩力增加了声波的振幅，声波又反过来增加了布里渊波的振幅。声波的频率 Ω_A 和波矢量 K_A 满足色散关系

$$\Omega_A = v_A K_A \tag{8.7-18}$$

式中 v_A 是声波在介质中的速度。既然 k_L 和 k_B 几乎相等，布里渊频率移动可以写成

$$\Omega_A = 2v_A k_L = \frac{4\pi n}{\lambda_L} v_A \tag{8.7-19}$$

等价于

$$f_A = \frac{2n}{\lambda_L} v_A \quad \text{(in Hz)} \tag{8.7-20}$$

表 8.7 提供了一些材料的布里渊特性，包括增益，频率移动和带宽。

例：SiO_2 的受激布里渊散射增益。

根据表 8.7，布里渊增益系数是0.0045cm/MW 。假设功率为 10 mW ，面积为100μm^2，光束的强度为10^8 W/m^2 。布里渊增益由 $g_B I_L = 0.0045\text{cm/MW} \times 10^8\ \text{W/m}^2 = 4.5\times10^{-3}\ \text{m}^{-1}$ 。

表 8.7　一些材料的布里渊增益，频率移动和增益带宽

材料名称	声速（km/s）	频移（GHz）	带宽（MHz）	增益（cm/MW）
二硫化碳		5.85	52.3	0.13
丙酮		4.6	224	0.02
四氯化碳		4.39	520	0.006
苯		6.47	289	0.018
水	1.5	5.69	317	0.0048
光学玻璃		11～16	10～106	0.004～0.025
二氧化硅		23	26	0.0045
硅	5.95	11.2		
砷化镓	5.15	23.3		
铌酸锂	6.57	18.7		
钽酸锂	6.19	17.6		
α-三氧化二铝	11.15	25.3		

8.8　四波混频和相位共轭

到目前为止，我们已经讨论了一些特殊的三阶非线性光学现象，包括 Kerr 效应、SRS 和 SBS。一般情况下，三阶非线性过程需要四个光波的参与。这样的一般三阶过程可以被看成利用三种光波产生第四种光波。设三种输入光波的频率和波矢分别为（ω_1, $\boldsymbol{k}_1$）、（ω_2, $\boldsymbol{k}_2$）和（ω_3, $\boldsymbol{k}_3$），则第四种波的频率和波矢（ω_4, $\boldsymbol{k}_4$）可以被写成

$$\omega_4 = \omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3 \tag{8.8-1}$$

$$\boldsymbol{k}_4 = \boldsymbol{k}_1 \pm \boldsymbol{k}_2 \pm \boldsymbol{k}_3 \tag{8.8-2}$$

这两个方程表示能量和动量守恒。因为波矢（$\boldsymbol{k}_4$）和频率（ω_4）之间存在色散关系，这两个方程不能被同时满足。因此非线性光学四波混频只有在两个方程同时满足的特别的输入装置时才有可能发生。本节将讨论一个非常有趣且有用的相位匹配条件得到满足的非线性光学四波混频问题。特别地，我们将讨论简并（或准简并）四波混频过程，该过程有许多重要的应用，包括相位共轭和频谱反转。

我们现在考虑一种特殊的四波混频情况，其中输入光波的频率是 ω_1、ω_2 和 ω_3 的混合，并且产生频率为 $\omega_1+\omega_2-\omega_3$ 的第四种光波。为了更详细地表达，我们假设一个非线性光介质同时被三个输入光场入射

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r},t) &= \tfrac{1}{2}A_1(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1 t-\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r})} + \text{c.c.}\\ \boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r},t) &= \tfrac{1}{2}A_2(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_2 t-\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r})} + \text{c.c.}\\ \boldsymbol{E}_3(\boldsymbol{r},t) &= \tfrac{1}{2}A_3(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_3 t-\boldsymbol{k}_3\cdot\boldsymbol{r})} + \text{c.c.}\end{aligned} \tag{8.8-3}$$

这里 $\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}_2$ 和 $\boldsymbol{A}_3$ 是光波的振幅。根据方程（8.1-1）的三阶项，一个在频率为 $\omega_1+\omega_2-\omega_3$ 的非线性极化振荡产生

$$\begin{aligned}P_i^{(\mathrm{NL})}(\boldsymbol{r},t) &= 3\chi_{ijkl}^{(3)}A_{1j}A_{2k}A_{3l}^{*}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\omega_1+\omega_2-\omega_3)t-(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_3)\cdot\boldsymbol{r}]} + \text{c.c.}\\ &= \mathrm{Re}[6\chi_{ijkl}^{(3)}A_{1j}A_{2k}A_{3l}^{*}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\omega_1+\omega_2-\omega_3)t-(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_3)\cdot\boldsymbol{r}]}]\end{aligned} \tag{8.8-4}$$

这里 i、j、k、l 指直角坐标，并且假设求和对重复指标进行。$\chi_{ijkl}^{(3)}$ 是表征介质特性[18]的第四阶张量，它取决于输入频率 ω_1、ω_2 和 ω_3。如果我们将式（8.8-4）的变量运用到方程式（8.2-8），我们可以相信，和二次谐波产生（SHG）现象不一样，这里考虑的三阶光学效应在所有介质中都存在，包括中心对称晶体和各向同性介质。x_{ijkl} 的形式但并不是大小是由介质的对称性决定的，这在参考文献[18，19]中有所讨论和比较。该非线性极化项实际上是振荡偶极子的大量分布，这些振荡偶极子能够发射出频率为 $\omega_4=\omega_1+\omega_2-\omega_3$ 的新光波，而新光波的波矢须满足动量守恒条件 $\boldsymbol{k}_4=\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_3$。

这里我们考虑一种感兴趣的特殊情况。在这种情况下，三种输入波的频率是相同的。换句话说，$\omega_1=\omega_2=\omega_3\equiv\omega_0$ 并且 $\omega_4=\omega_0$。假设介质是光学各向同性的，那么所有的波矢都有相同的模。因此，动量守恒要求波矢形成一个等边平行四边形（见图 8.13（b））。在一个典型的简并四波混频中（图 8.13（a）所示），两个输入光束（$\boldsymbol{k}_1$，$\boldsymbol{k}_2$）是反向传播的，因此 $\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2=0$。第三个波到达相互作用区。第四个波在与第三个波相反的方向发射。如果我们将第三个波看成是一种信号波，那么新产生的波（第四个波）将总是相对于信号波反向传播。换句话说，产生的波（ω_4，$\boldsymbol{k}_4$）沿着第三个输入波（ω_3，$\boldsymbol{k}_3$）的路径折回。产生的波相对于第三个输入波的反向反射对应于相位共轭现象。

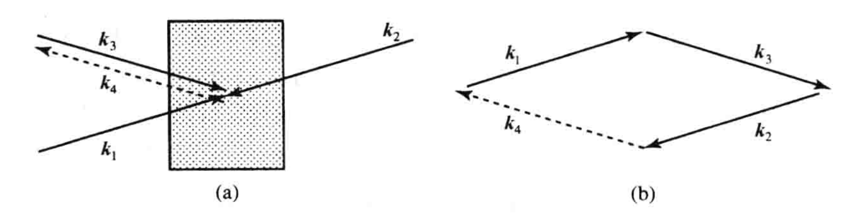


图 8.13　（a）各向同性非线性介质中的简并四波混频示意图。（b）动量守恒的矢量图

表 8.8 中列出了一些光学材料的非线性系数。这个表中也包含了一个克尔常量 n_2[18]。按照 8.6 节中的讨论，这个常量描述了各向同性介质的折射率与光强 I 之间的关系

表 8.8　一些材料的非线性光学系数 $\chi_{ijkl}^{(3)}(-\omega,\omega,\omega,-\omega)$

材料名称	波长λ（μm）	折射率	$\chi_{ijkl}^{(3)}$（esu）	$\chi_{ijkl}^{(3)}$（MKS）	n_2（m²/W）
二硫化碳	1.06	1.594	$\chi_{1111}=4.65\times10^{-13}$	$\chi_{1111}=5.7\times10^{-32}$	2.9×10^{-18}
	0.694	1.612	$\chi_{1221}=3.6\times10^{-13}$	$\chi_{1221}=4.4\times10^{-32}$	
YAG	1.06	1.83	$\chi_{1111}=0.15\times10^{-13}$	$\chi_{1111}=19\times10^{-34}$	7.2×10^{-20}
	0.694	1.829	$\chi_{1221}=0.06\times10^{-13}$	$\chi_{1221}=7.4\times10^{-34}$	
四氯化碳	0.694	1.454	$\chi_{1221}=0.05\times10^{-13}$	$\chi_{1221}=6.2\times10^{-34}$	
熔融石英	0.694	1.455	$\chi_{1111}=4\times10^{-15}$	$\chi_{1111}=5\times10^{-34}$	3×10^{-20}
			$\chi_{1221}=1.2\times10^{-15}$	$\chi_{1221}=1.5\times10^{-34}$	
红宝石	1.06	1.76	$\chi_{1111}=6.9\times10^{-14}$	$\chi_{1111}=8.5\times10^{-34}$	3.5×10^{-20}
六氟硫玻璃	1.06	1.77	$\chi_{1111}=4.2\times10^{-14}$	$\chi_{1111}=5.2\times10^{-34}$	2.1×10^{-19}
路赛特	10.6	1.49	$\chi_{1111}=1.1\times10^{-14}$	$\chi_{1111}=1.3\times10^{-33}$	7.7×10^{-20}
二甲基-4 硝基苯胺					
（MNA）		1.8	$\chi_{1111}=1.19\times10^{-11}$	$\chi_{1111}=1.5\times10^{-30}$	5.8×10^{-17}
聚丁二炔（PTS）		1.88	$\chi_{1111}=4.0\times10^{-11}$	$\chi_{1111}=4.9\times10^{-30}$	1.8×10^{-16}

数据引自文献[18]。

$$n = n_0 + n_2 I \tag{8.8-5}$$

它可从方程（8.6-1）直接得到（同时参见方程（8.6-7））

$$n_2 = \frac{3}{n_0^2\varepsilon_0}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\chi_{1111}(\mathrm{MKS}) = \frac{3}{cn_0^2\varepsilon_0^2}\chi_{1111}(\mathrm{MKS}) \tag{8.8-6}$$

这里最后一个等号对于非磁性物质成立。MNA 中 χ_{1111} 的值较大的是由于比较大的电荷分离（约为 30 Å），因此较大的诱导偶极子可以从某些有机分子获得。

许多三阶非线性系数的公布数据以 esu 单位表示。根据定义，这两个单位能按如下关系式转换：

$$\chi_{ijkl}^{(3)}(\mathrm{MKS}) = \frac{4\pi\varepsilon_0}{9\times 10^8}\chi_{ijkl}^{(3)}(\mathrm{esu}) \quad (P_i = \chi_{ijkl}^{(3)}E_jE_kE_l) \tag{8.8-7}$$

许多作者定义 $P_i = \varepsilon_0\chi_{ijkl}^{(3)}E_jE_kE_l$。在这种情况下，非线性系数 $\chi_{ijkl}^{(3)}$ 以 $\mathrm{m}^2/\mathrm{V}^2$ 为单位并且转换公式如下：

$$\varepsilon_0\chi_{ijkl}^{(3)}(\mathrm{m}^2/\mathrm{V}^2) = \frac{4\pi\varepsilon_0}{9\times 10^8}\chi_{ijkl}^{(3)}(\mathrm{esu}) \quad (P_i = \varepsilon_0\chi_{ijkl}^{(3)}E_jE_kE_l) \tag{8.8-8}$$

简并四波混频相位共轭的耦合模方程

参照图 8.14，我们考虑一个介于 $z=0$ 和 $z=L$ 之间的非线性介质中的四波混频过程。我们将发现结果是一个在非线性介质中产生并发射新的光波。因为习惯的因素，波 1 和波 2 被称为泵浦光束，波 4 是一个输入光束。由非线性极化新产生的波被标注为波 3。这些光波的电场写成

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r},t) &= \frac{1}{2}A_1(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r})} + \mathrm{c.c.}\\
\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r},t) &= \frac{1}{2}A_2(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r})} + \mathrm{c.c.}\\
\boldsymbol{E}_3(\boldsymbol{r},t) &= \frac{1}{2}A_3(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+kz)} + \mathrm{c.c.}\\
\boldsymbol{E}_4(\boldsymbol{r},t) &= \frac{1}{2}A_4(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kz)} + \mathrm{c.c.}\\
k^2 &\equiv \omega^2\mu\varepsilon
\end{aligned} \tag{8.8-9}$$

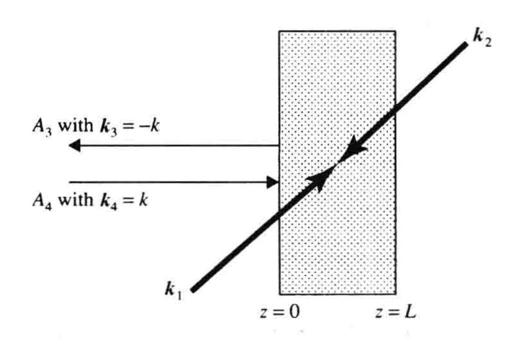


图 8.14　四波混频相位共轭的“典型”装置

波 1 和波 2 分别沿 $\boldsymbol{k}_1$ 和 $\boldsymbol{k}_2$ 方向传播。在后面的分析中，这两个波对应泵浦光束，它们

的振幅$|A_1|$和$|A_2|$，并被考虑为比$|A_3|$和$|A_4|$大很多，因而将几乎不受相互作用的影响，因此它们在相互作用区域中可以看做常量。进一步可取$|A_1|=|A_2|$。这将使得两个波的相速度相互影响而导致$k_2=k_1$[20]。更进一步，泵浦波 1 和 2 在线性介质中沿相反方向传播，因此

$$\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2=0 \tag{8.8-10}$$

稍后我们将观察到，这个条件对于产生相位共轭波很重要。

波 4 对应输入光束，接下来是波 3，它是由于波 1、2 和 4 的相互作用而产生的，是所需要的波 4 的相位共轭波。

现在我们考察与波 3 和波 4 之间相互作用有关的非线性极化项。三阶非线性极化由方程式（8.6-1）给定，这里 E 是四种波电场式（8.8-9）的总和。这里总共有 512 项。$P_i^{(\mathrm{NL})}$相关项的选择需要合理的推理。首先，由于我们假定振幅 A_3 和 A_4 与时间无关，$P_i^{(NL)}$必须包含指数时间因子$\exp(i\omega t)$以便有效地发射到这两个波中；其次，为了让 A_3（z）和 A_4（z）不在一个光波长范围内发生很大的变化（即“慢”变化），$P_i^{(\mathrm{NL})}$也必须包含因子$\exp(-ikz)$和$\exp(+ikz)$，因此我们必须寻找包含波因子$\exp\left[i(\omega t-kz)\right]$和$\exp\left[i(\omega t+kz)\right]$的非线性极化项。

回想前面的$\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2=0$，从方程（8.6-1）得到包含因子$\exp\left[i(\omega t-kz)\right]$和$\exp\left[i(\omega t+kz)\right]$的场 E_1、E_2、E_3 和 E_4 的三阶非线性的结果是（见习题 8.12）

$$\begin{aligned}P_i^{(\mathrm{NL})}(\boldsymbol{r},t)=&\tfrac{1}{2}\chi_{ijkl}^{(3)}\times\{6A_{1j}A_{2k}A_{3l}^*+6A_{1j}A_{1k}^*A_{4l}+6A_{2j}A_{2k}^*A_{4l}+6A_{3j}A_{3k}^*A_{4l}\\&+3A_{4j}A_{4k}^*A_{4l}\}\exp[i(\omega t-kz)]+\tfrac{1}{2}\chi_{ijkl}^{(3)}\times\{6A_{1j}A_{2k}A_{4l}^*+6A_{1j}A_{1k}^*A_{3l}+6A_{2j}A_{2k}^*A_{3l}\\&+6A_{4j}A_{4k}^*A_{3l}+3A_{3j}A_{3k}^*A_{3l}\}\exp[i(\omega t+kz)]+\mathrm{c.c.}\end{aligned} \tag{8.8-11}$$

这里假设求和对重复指数进行，并且利用了三阶非线性系数的循环对称

$$\chi_{ijkl}^{(3)}=\chi_{[ijkl]}^{(3)} \tag{8.8-12}$$

这里$[ijkl]$是（$ijkl$）的任意置换。

为了清楚地介绍这个概念，我们考虑一个重要的简单情况。这个简单情形让我们忽略张量符号，并限制在包含单个$\chi_{ijkl}(\chi_{1111})$的情形。在这种情形下，我们将所有的波假定为 s 偏振波（垂直于入射平面）。将波 1 作为与入射平面垂直的轴，这个线性极化可以写成

$$\begin{aligned}P_i^{(\mathrm{NL})}(\boldsymbol{r},t)=&\tfrac{1}{2}\chi_{1111}^{(3)}\times\{6A_1A_2A_3^*+6A_1A_1^*A_4+6A_2A_2^*A_4+6A_3A_3^*A_4+3A_4A_4^*A_4\}\exp[i(\omega t-kz)]+\\&\tfrac{1}{2}\chi_{1111}^{(3)}\times\{6A_1A_2A_4^*+6A_1A_1^*A_3+6A_2A_2^*A_3+6A_4A_4^*A_3+3A_3A_3^*A_3\}\exp[i(\omega t+kz)]+\mathrm{c.c.}\end{aligned} \tag{8.8-13}$$

进一步，我们将忽略方程式（8.8-13）右边较小的项，这将导致

$$\begin{aligned}P_i^{(\mathrm{NL})}(\boldsymbol{r},t)=&3\chi_{1111}^{(3)}\times\{A_1A_2A_3^*+A_1A_1^*A_4+A_2A_2^*A_4\}\exp[i(\omega t-kz)]+\\&3\chi_{1111}^{(3)}\times\{A_1A_2A_4^*+A_1A_1^*A_3+A_2A_2^*A_3\}\exp[i(\omega t+kz)]+\mathrm{c.c.}\end{aligned} \tag{8.8-14}$$

因为$|A_3|,|A_4|<<|A_1|,|A_2|$。在波动方程（8.3-2）中应用方程（8.8-14）得到

$$\frac{\mathrm{d}A_4}{\mathrm{d}z}=-i\frac{\omega}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\chi^{(3)}(|A_1|^2+|A_2|^2)A_4-i\frac{\omega}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\chi^{(3)}A_1A_2A_3^* \tag{8.8-15}$$

$$\frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}z}=+i\frac{\omega}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\chi^{(3)}(|A_1|^2+|A_2|^2)A_3+i\frac{\omega}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\chi^{(3)}A_1A_2A_4^* \tag{8.8-16}$$

这里$\chi^{(3)}=6\chi_{1111}$。

我们注意到方程（8.8-15）和式（8.8-16）右边的第一项，单独作用，仅将波 3 和波 4 的传播常量从 k 修改为 $k+(\omega/2)\sqrt{\mu/\varepsilon}\chi^{(3)}(|A_1|^2+|A_2|^2)$。这是一个先前讨论过的光学 Kerr 效应。使用修改后的波数，我们可以通过移去方程（8.8-15）和方程（8.8-16）右边的第一项来简化分析。这导致如下两个耦合方程

$$\frac{\mathrm{d}A_4}{\mathrm{d}z}=-i\frac{\omega}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\chi^{(3)}A_1A_2A_3^* \tag{8.8-17}$$

$$\frac{\mathrm{d}A_3^*}{\mathrm{d}z}=-i\frac{\omega}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\chi^{(3)*}A_1^*A_2^*A_4 \tag{8.8-18}$$

定义

$$\kappa^*\equiv\frac{\omega}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\chi^{(3)}A_1A_2 \tag{8.8-19}$$

并且对方程式（8.8-17）和式（8.8-18）取复杂共轭，可得到光学相位共轭耦合模方程的最终表达式[21]

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}A_4^*}{\mathrm{d}z}&=i\kappa A_3\\ \frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}z}&=i\kappa^*A_4^*\end{aligned} \tag{8.8-20}$$

学生应该在一点上仔细考虑，即如何将包含四光束相对复杂的物理实验通过介质的非线性光效应用与式（8.8-20）一样简单的方程来描述。这是可行的，通过对于那些在物理上可以忽略但是会妨碍分析相互作用的数学项的“无情的”而又合理的省略能够实现。这是数学和物理之间的明显区别。

因为波 4 沿$+z$ 方向传播，而波 3 沿$-z$ 方向传播。我们可以确定它们在各自输入平面 $z=0$ 和 $z=L$（见图 8.14）的复振幅。这些复振幅可以取为 A_4（0）和 A_3（L）。

在服从这些边界条件下，方程（8.8-20）的解为

$$\begin{aligned}A_3(z)&=\frac{\cos|\kappa|z}{\cos|\kappa|L}A_3(L)+i\frac{\kappa^*\sin|\kappa|(z-L)}{|\kappa|\cos|\kappa|L}A_4^*(0)\\ A_4(z)&=-i\frac{|\kappa|\sin|\kappa|z}{\kappa\cos|\kappa|L}A_3^*(L)+\frac{\cos|\kappa|(z-L)}{\cos|\kappa|L}A_4(0)\end{aligned} \tag{8.8-21}$$

在基础的相位共轭实验中，只有单一的输入 A_4（0）（“泵浦”光束 A_1 和 A_2 在这里被考虑成装置的一部分并且被归结到耦合常量κ中）。取 $A_3(L)=0$，从输入处的反射波的方程式（8.8-21），我们得到

$$A_3(0)=-i\left(\frac{\kappa^*}{|\kappa|}\tan|\kappa|L\right)A_4^*(0) \tag{8.8-22}$$

而在输出（$z=L$）处，可以得到

$$A_4(L)=\frac{A_4(0)}{\cos|\kappa|L} \tag{8.8-23}$$

注意到$|A_4(L)|>|A_4(0)|$；即该器件可以作为一个增益为$|(\cos|\kappa|L)^{-1}|$的相位相干光放大

器。当

$$\frac{\pi}{4}\leqslant|\kappa|L\leqslant\frac{3\pi}{4} \qquad (8.8\text{-}24)$$

结果为$|A_3(0)|>|A_4(0)|$，因此相位共轭镜的反射率超过 1。$|\kappa|L$的值满足方程（8.8-24）时，非线性介质内两波的强度分布曲线如图 8.15 所示。

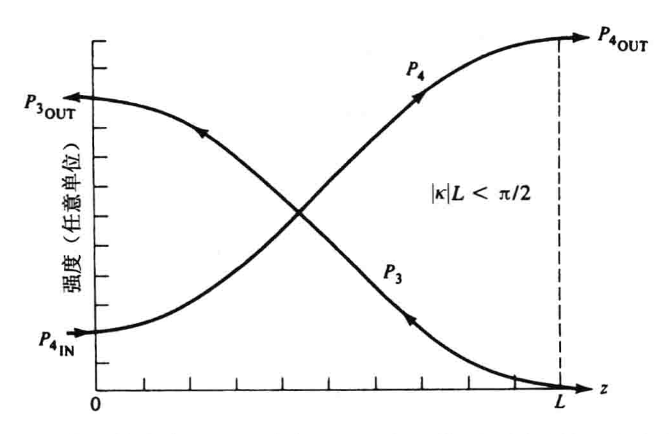


图 8.15　对应于放大情形$\pi/4<|\kappa|L<\pi/2$相互作用区域内的强度分布曲线

特别感兴趣的是条件$|\kappa|L=\pi/2$，在这种情形下，

$$\frac{A_3(0)}{A_4(0)}=\infty \quad \frac{A_4(L)}{A_4(0)}=\infty \qquad (8.8\text{-}25)$$

即传输增益$[A_4(L)/A_4(0)]$和反射增益$[A_3(0)/A_4(0)]$变成无限大，因此即使在输入 A_4（0）为零时仍能得到有限的输出 A_3（0）和 A_4（L）。这与振荡对应。振荡在没有镜反馈的情况下发生。因为波 3 和波 4 沿相反的方向传播，因此反馈过程对于振荡是很重要的，因此，比如说$A_4(z_1)$，即使在$z_2>z_1$时也受$A_4(z_2)$的影响，信息由反向波 3 从z_2到z_1传播。满足线性振荡条件时的强度分布曲线如图 8.16 所示。

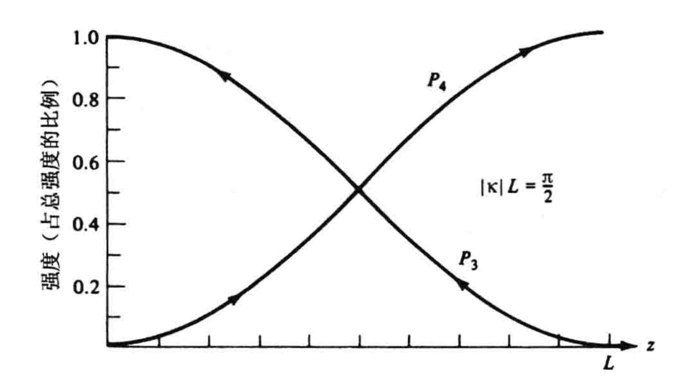


图 8.16　满足振荡条件$|\kappa|L=\pi/2$时，作用区域内的强度分布曲线

物理上感兴趣的另一点是能量的来源。因为能量守恒，因此光波 3 和光波 4 的输出能量增加必须与其输入值从泵浦波 1 和 2 的能量损失中获得。不忽略光束 1 和 2 的空间相关性的

一个更详细的分析表明情况确实如此。这个过程的量子力学描述[20]表明在原子线度范围内的基本过程是这样一个过程，两个光子，一个来自光束 1 而另一个来自光束 2 同时湮没，同时产生两个光子——一个添加到光束 3，另一个添加到光束 4。

我们某种程度上偏离了主要目的，我们的主要目的是证明图 8.14 四波混频装置可以实时产生输入波束的相位共轭的波。回到我们的基本平面波结果式（8.8-22）

$$A_3(0) = -i\left(\frac{\kappa^*}{|\kappa|}\tan|\kappa|L\right)A_4^*(0) \qquad (8.8\text{-}26)$$

这表示，在 z=0 平面后向波 3 的振幅 A_3 与在同一平面的输入波 4 的复振幅 A_4^* 成比例。既然输入波的随意的波阵面 $A_4(x,y,z)$ 可以以平面波分量的形式展开（这里采用的傍轴近似将通过一个小跨度立体角为中心的 z 轴），我们可以方程（8.8-26）扩展到包含每个平面波分量[21]，得到

$$A_3(x,y,z<0) = -i\left(\frac{\kappa^*}{|\kappa|}\tan|\kappa|L\right)A_4^*(x,y,z<0) \qquad (8.8\text{-}27)$$

这是四波混频相位共轭的基本结果。它表明非线性介质左边 $(z<0)$ 的反射波 $A_3(\boldsymbol{r})$ 是输入波 $A_4(\boldsymbol{r})$ 的相位共轭波（见图 8.17）。

在这本书的另外部分，我们利用 MKS 制单位来分析相位共轭。很多研究文献，不幸地采用 esu 制。本节前面的方程式（8.8-7）和式（8.8-8）可使得两种单位制之间的转换比较方便。

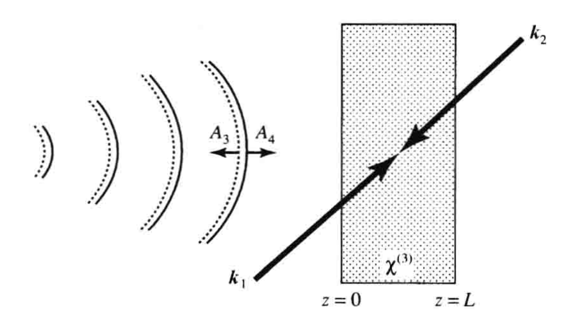


图 8.17　四波混频的相位共轭。实线代表入射波 A_4 的波阵面，虚线代表相位共轭波 A_3

例：二硫化碳（CS_2）中的相位共轭。

许多第一个相位共轭的光学实验都是在二硫化物中进行的。当所有的偏振都沿着同样的 x 方向，相关的非线性系数是 χ_{1111}，在 MKS 单位里值为（表 8.8）

$$\chi_{1111} = 5.7\times10^{-32}$$

根据方程（8.8-16），在我们的分析中使用的系数 $\chi^{(3)}$ 等于 $6\chi_{1111}$。我们进一步假设实验进行时所用波长为 $\lambda = 1.06\mu\text{m}$，两个泵浦波的光强相同为 $I_1 = I_2 = 5\times10^{10}\,\text{W}/\text{m}^2$（$5\times10^6\,\text{W}/\text{cm}^2$）。二硫化碳（$CS_2$）的折射率 $n = 1.594$，使用这些数据，我们得到

$$A_1 = A_2 = \sqrt{\frac{2I_1}{\varepsilon_0 cn}} = 4.86\times10^6\,\text{V/m}$$

从方程式（8.8-22）可得，$|\kappa| = 1.1\text{m}^{-1}$。

所以在CS_2中，我们为了满足条件$|\kappa|L\sim1$，需要使用泵浦波的强度为每平方厘米兆瓦，路径长度为1m，这个条件是根据方程式（8.8-22）的相位共轭反射率需要而建立的。

8.9　参变振荡的频率调谐

在本章的前面我们曾证明信号波（ω_1）和空闲波（ω_2），可以由参量泵浦光波（ω_3）产生振荡，它们之间满足条件$k_3=k_1+k_2$。利用$k_i=n_i\omega_i/c$我们可以写出

$$\omega_3 n_3=\omega_1 n_1+\omega_2 n_2 \tag{8.9-1}$$

这里$n_1=n_1(\omega_1)$，$n_2=n_2(\omega_2)$，$n_3=n_3(\omega_3)$都是折射率，这就是相位匹配条件。如8.3节所证明，晶体的折射率一般与频率、晶体取向（如果是非寻常波）、晶体中的电场（电光晶体中）以及温度有关。作为一个例子，如果我们改变图8.16所示振荡器中晶体的取向，则振荡频率ω_1和ω_2将改变以补偿折射率的变化，因此条件式（8.9.1）将在新的频率下得到满足．下面我们考虑一个特定的参变振荡器，它由固定频率为ω_3的非寻常光束泵浦，信号光波ω_1和空闲光波ω_2为寻常波。在某一晶体取向θ_0（c轴与传播方向之间的夹角）时，它会在ω_{10}和ω_{20}频率下发生振荡。假设该条件下与频率ω_{10}、ω_{20}和ω_{30}相应的折射率分别为n_{10}、n_{20}和n_{30}。我们希望求出当晶体取向有一个小的角度改变$\Delta\theta$时频率ω_1和ω_2的变化。

在$\theta=\theta_0$时，由式（8.9-1）有

$$\omega_3 n_{30}=\omega_{10}n_{10}+\omega_{20}n_{20} \tag{8.9-2}$$

当晶体取向由θ_0变到$\theta_0+\Delta\theta$时，下列变化就会发生

$$n_{30}\to n_{30}+\Delta n_3$$
$$n_{10}\to n_{10}+\Delta n_1$$
$$n_{20}\to n_{20}+\Delta n_2$$
$$\omega_{10}\to\omega_{10}+\Delta\omega_1$$

因为$\omega_1+\omega_2=\omega_3=$常量

$$\omega_{20}\to\omega_{20}+\Delta\omega_2=\omega_{20}-\Delta\omega_1$$

即$\Delta\omega_2=-\Delta\omega_1$。由于在$\theta=\theta_0+\Delta\theta$时，式（8.9-1）必须满足，因此有

$$\omega_3(n_{30}+\Delta n_3)=(\omega_{10}+\Delta\omega_1)(n_{10}+\Delta n_1)+(\omega_{20}-\Delta\omega_1)(n_{20}+\Delta n_2)$$

忽略$\Delta n_1\Delta\omega_1$和$\Delta n_2\Delta\omega_1$的二次项并应用式（8.9-2），可得

$$\Delta\omega_1\Big|_{\substack{\omega_1\approx\omega_{10}\\ \omega_2\approx\omega_{20}}}=\frac{\omega_3\,\Delta n_3-\omega_{10}\,\Delta n_1-\omega_{20}\,\Delta n_2}{n_{10}-n_{20}} \tag{8.9-3}$$

按照我们一开始的假设，泵浦光是非寻常光，因此，根据式（8.3-32）它的折射率与夹角θ的依赖关系由下式给出

$$\Delta n_3=\frac{\partial n_3}{\partial\theta}\bigg|_{\theta_0}\Delta\theta \tag{8.9-4}$$

信号光与空闲光为寻常光，它们的折射率只依赖于频率而与方向无关，于是

$$\Delta n_1=\frac{\partial n_1}{\partial\omega_1}\bigg|_{\omega_{10}}\Delta\omega_1$$

$$\Delta n_2 = \left.\frac{\partial n_2}{\partial \omega_2}\right|_{\omega_{20}} \Delta\omega_2 \tag{8.9-5}$$

将上面二式应用于式（8.9-3），结果为

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \theta} = \frac{\omega_3(\partial n_3/\partial\theta)}{(n_{10}-n_{20})+[\omega_{10}(\partial n_1/\partial\omega_1)-\omega_{20}(\partial n_2/\partial\omega_2)]} \tag{8.9-6}$$

这就是振荡频率相对于晶体取向的变化率的公式。利用式（8.3-32）和关系式 $\mathrm{d}(1/x^2) = -(2/x^3)\mathrm{d}x$，可得

$$\frac{\partial n_3}{\partial \theta} = -\frac{n_3^3}{2}\sin(2\theta)\left[\left(\frac{1}{n_e^{\omega 3}}\right)^2 - \left(\frac{1}{n_o^{\omega 3}}\right)^2\right]$$

将它代入式（8.9-6），得

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \theta} = \frac{-\frac{1}{2}\omega_3 n_{30}^3\left[\left(\frac{1}{n_e^{\omega_3}}\right)^2 - \left(\frac{1}{n_o^{\omega_3}}\right)^2\right]\sin(2\theta_0)}{(n_{10}-n_{20})+\left(\omega_{10}\frac{\partial n_1}{\partial \omega_1}-\omega_{20}\frac{\partial n_2}{\partial\omega_2}\right)} \tag{8.9-7}$$

图 8.18 示出了 $NH_4H_2PO_4$（ADP）晶体中信号光频率和空闲光频率与θ关系的实验曲线。同时还给出了基于方程（8.9-7）的二级近似下的理论曲线，它是利用了 ADP 的色散（n 随ω变化）数据画出的（见参考文献[22]）。用与角度调谐表达式（8.9-7）类似的推导的方法，可确定振荡频率对温度的依赖关系。这里我们需要知道各种折射率随温度的变化关系。这将在习题 8.6 中作进一步的讨论。温度调谐的实验曲线示于图 8.19。

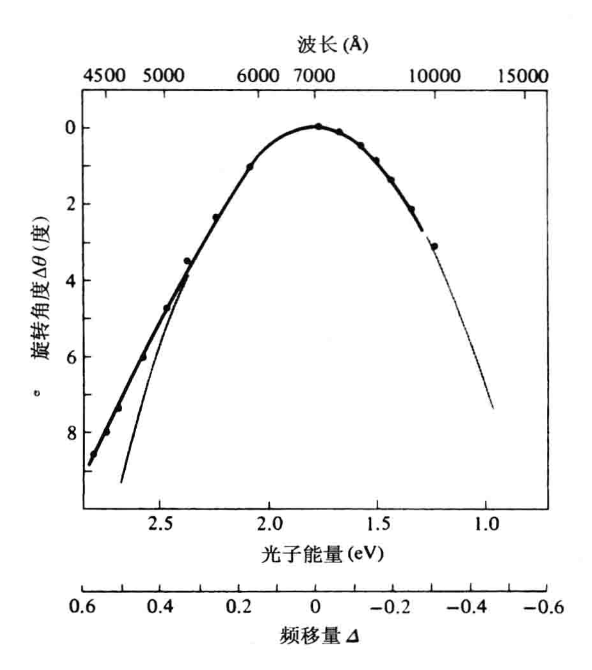


图 8.18　对于 ADP 晶体，信号频率（ω_1）与泵浦光传播方向和晶体光轴夹角的关系。角度θ是以与 $\omega_1 = \omega_3/2$ 相应的角为基准而度量的，$\Delta \equiv (\omega_1 - \omega_3/2)/(\omega_3/2)$（引自文献[22]）

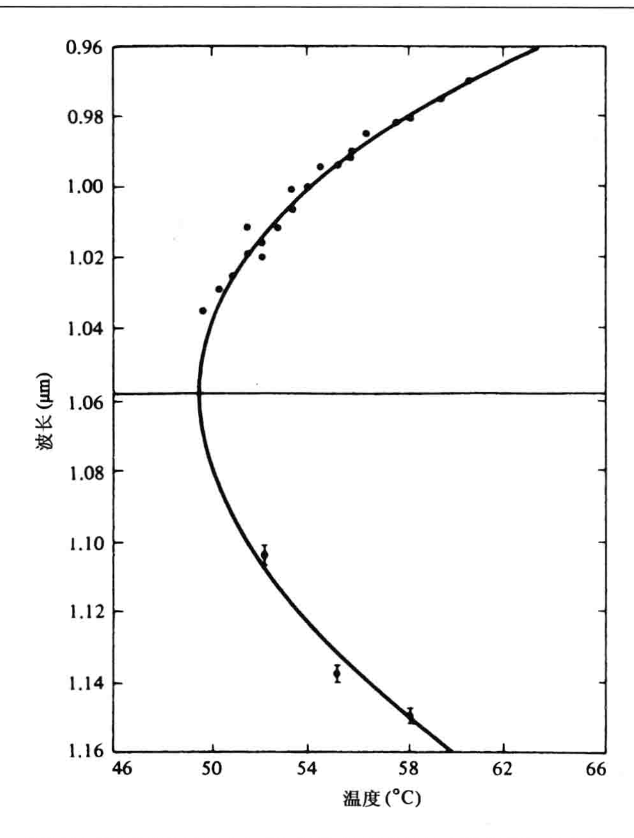


图 8.19　信号波长和空闲波长与振荡晶体温度的函数关系（引自文献[23]）

习题

8.1　证明如果 θ_m 是频率为 ω 的寻常波和频率为 2ω 的非寻常波的相位匹配角，则有

$$\Delta k(\theta)l\ \Big|_{\theta\approx\theta_m}=-\frac{2\omega l}{c_0}\sin(2\theta_m)\frac{(n_e^{2\omega})^{-2}-(n_o^{2\omega})^{-2}}{2(n_o^{\omega})^{-3}}(\theta-\theta_m)$$

8.2　在一个使用 KDP 晶体的参变放大器中有两个波为非寻常波，第三个波为寻常波，试推导其相位匹配角的表达式。三个波中的哪一个（信号，空闲，或泵浦）应该选成寻常波？当 $\omega_3=10000\text{cm}^{-1}$　$\omega_1=\omega_2=5000\text{cm}^{-1}$ 时，相位匹配是可能的吗？如果可能，θ_m 是多少？

8.3　证明方程　(8.4-12) 与下列事实一致：频率为 ω_1 和 ω_2 的光子通量的增加是相同的，即

$$A_1^*(z)A_1(z)-A_1^*(0)A_1(0)=A_2^*(z)A_2(z)-A_2^*(0)A_2(0)$$

直接从耦合方程（8.4-10）推导得到同样的结果。

8.4　完成方程　(8.4-21) 的推导。

8.5　根据 8.1 节的理论，证明由方程式（8.8-4）定义的三阶光学效应同样存在于所有的均匀介质。

8.6　考虑一个如图 8-19 所示的参变振荡器的装置。晶体取向角为 θ，温度为 T，信号光

和空闲光的频率分别为 ω_{10} 和 ω_{20}，以及 $\omega_{10}+\omega_{20}=\omega_3$。证明小的温度变化 ΔT 引起信号频率的变化如下

$$\Delta\omega_1=\Delta T\times\left\{\omega_3\left[\cos^2\theta\left(\frac{n_e^{\omega_3}(\theta)}{n_o^{\omega_3}}\right)^3\frac{\partial n_o^{\omega_3}}{\partial T}+\sin^2\theta\left(\frac{n_e^{\omega_3}(\theta)}{n_e^{\omega_3}}\right)^3\frac{\partial n_e^{\omega_3}}{\partial T}\right]-\omega_{10}\frac{\partial n_o^{\omega_1}}{\partial T}-\omega_{20}\frac{\partial n_o^{\omega_2}}{\partial T}\right\}\times\frac{1}{n_{10}-n_{20}}$$

泵浦光为非寻常光，信号光和空闲光为寻常光。[提示：从方程（8.9-3）出发，它在各种微扰的情形下都是成立的。]

8.7　利用发表了的淡红银矿的色散数据（见参考文献[12]），计算频率为 ν_1 的输入光束偏离平行的泵浦光束 ν_2 的角度之极大值，这时转换效率下降到原来的一半。设 $\lambda_1=10.6\mu\text{m}$，$\lambda_2=1.06\mu\text{m}$，$\lambda_3=0.964\mu\text{m}$。[提示：应适当地选择 ω_1，ω_2，ω_3 三个波的偏振，使沿某一角度的相位匹配条件能够满足。]角度偏离极大值须使下式成立

$$\frac{\sin^2[\Delta k(\theta)l/2]}{[\Delta k(\theta)l/2]}=\frac{1}{2}$$

在相位匹配角 θ_m 处，$\Delta k(\theta_m)=0$。利用泰勒级数在频率 $\Delta k=0$ 附近的展开来得到色散数据的近似值。

8.8　利用参考文献[12]中的色散数据，讨论一下在上变换实验中由于输入频率偏离，相位匹配会受到什么影响。当输入光谱密度（单位频率范围内的功率）在 ν_{10} 附近是均匀分布时，推导输出光谱宽度的表达式。[提示：利用在相位匹配（$\Delta k=0$）频率附近的色散数据的泰勒级数展开，来获得 $\Delta k(\nu_3)$ 的表达式。]输出光谱宽度的定义是输出为峰值（$\Delta k=0$）一半时相应的频率偏移的两倍。

8.9　以相似于推导式（8.8-15）和式（8.8-16）的方式，推导耦合模方程，入射波频率 ω_4 从泵浦波 ω 中的失谐为

$$\omega_4=\omega-\delta$$

（a）证明反射波频率为 $\omega_3=\omega+\delta$。

（b）求解耦合模方程的反射系数 $|A_3(0)/A_4(0)|$。画出它作为频率补偿 δ 的函数变化曲线。

8.10

（a）求解简并 $(\omega_1=\omega_2=\omega_3=\omega_4)$ 耦合模方程式（8.8-15）和式（8.8-16），对光损耗进行修正。新方程是

$$\frac{\mathrm{d}A_4^*}{\mathrm{d}z}=i\kappa\mathrm{e}^{-\alpha L}A_3-\alpha A_4^*$$

$$\frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}z}=i\kappa^*\mathrm{e}^{-\alpha L}A_4^*+\alpha A_3$$

$$\kappa^*=\frac{\omega}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\chi^{(3)}A_1(L)A_2(0)$$

α 代表光振幅损耗系数（假定四个波是一样的）。

（b）画出反射系数 $|A_3(0)/A_4(0)|$ 作为 κL 的函数变化曲线，αL 为 0.1，0.5，1，2。讨论损耗的影响。

8.11

（a）推导方程式（8.3-8）和式（8.3-9）。

（b）证明 KDP 中 SHG 的相位匹配，$d = d_{36}\sin\theta_m$。

8.12　从方程（8.8-9）的三阶和四波存在的定义。证明非线性极化和空间时间 $\exp[i(\omega t - kz)]$ 的关联性如下

$$
\begin{aligned}
P_i^{(\mathrm{NL})}(\boldsymbol{r}, t) = \tfrac{1}{2}\chi_{ijkl}^{(3)} \times \{&(A_{1j}A_{2k}A_{3l}^* + A_{1j}A_{2l}A_{3k}^* + A_{1k}A_{2j}A_{3l}^* \\
&+ A_{1k}A_{2l}A_{3j}^* + A_{1l}A_{2k}A_{3j}^* + A_{1l}A_{2j}A_{3k}^*) \\
&+ (A_{1j}A_{1k}^*A_{4l} + A_{1k}A_{1j}^*A_{4l} + A_{1j}A_{1l}^*A_{4k} + A_{1l}A_{1j}^*A_{4k} \\
&+ A_{1l}A_{1k}^*A_{4j} + A_{1k}A_{1l}^*A_{4j}) + (A_{2j}A_{2k}^*A_{4l} + A_{2k}A_{2j}^*A_{4l} \\
&+ A_{2j}A_{2l}^*A_{4k} + A_{2l}A_{2j}^*A_{4k} + A_{2l}A_{2k}^*A_{4j} + A_{2k}A_{2l}^*A_{4j}) \\
&+ (A_{3j}A_{3k}^*A_{4l} + A_{3k}A_{3j}^*A_{4l} + A_{3j}A_{3l}^*A_{4k} + A_{3l}A_{3j}^*A_{4k} \\
&+ A_{3l}A_{3k}^*A_{4j} + A_{3k}A_{3l}^*A_{4j}) + (A_{4j}A_{4k}^*A_{4l} + A_{4j}A_{4l}^*A_{4k} \\
&+ A_{4l}A_{4j}^*A_{4k})\}\exp[i(\omega t - kz)]
\end{aligned}
$$

[提示：使用对称关系 $\chi_{ijkl}^{(3)} = \chi_{[ijkl]}^{(3)}$，[$ijkl$] 是 $ijkl$ 的任何的排列。] 导出一个与 $\exp[i(\omega t - kz)]$ 相似的表达式。

8.13　极化包括线性和三阶电极化率，极化和折射率可以写成表 P.13 里的形式。

表 P8.13

MKS	esu (CGS)
$P = \varepsilon_0\chi E + \chi^{(3)}E^3$	$P = \chi E + \chi^{(3)}E^3$
$n^2 = 1 + \chi$	$n^2 = 1 + 4\pi\chi$

（a）把三阶极化率作为对 Δn^2 的修正。证明

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\chi_{\mathrm{MKS}}^{(3)}E_{\mathrm{MKS}}^2 = 4\pi\chi_{\mathrm{esu}}^{(3)}E_{\mathrm{esu}}^2$$

（b）$E_{\mathrm{esu}} = 1$ 相当于 $E_{\mathrm{MKS}} = 3\times10^4\,\mathrm{V/m}$，证明 $\chi_{\mathrm{MKS}}^{(3)} = \dfrac{4\pi\varepsilon_0}{9\times10^8}\chi_{\mathrm{esu}}^{(3)}$

8.14

（a）从方程（8.6-11）出发，证明非偏振光，三阶项平均为 0。推导方程（8.6-13）。

（b）对圆偏振光，让 $E_{ox}^{\omega} = A$ 和 $E_{oy}^{\omega} = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}$，$A$ 和 $\delta = \pi/2$ 都是实数，证明

$$P_{NLx}^{(\omega)} = 4\chi_{xxxx}\,|A|^2\,E_{ox}^{(\omega)}$$
$$P_{NLy}^{(\omega)} = 4\chi_{xxxx}\,|A|^2\,E_{oy}^{(\omega)}$$

我们注意到三阶非线性极化跟电场强度矢量平行。这确保偏振态不变。推导方程式（8.6-14）。

（c）对于线性偏振光，$E_{ox}^{\omega} = A$，$E_{oy}^{\omega} = B$，A 和 B 都是实数。证明三阶非线性极化跟电场强度矢量平行。这在各向同性介质中是不变的。

（d）考虑一个椭圆偏振光，不失一般性，我们选择椭圆偏振光的长轴跟 x 轴平行。让

$E_{ox}^{\omega} = A$， $E_{oy}^{\omega} = Be^{i\delta}$， A, B 和 $\delta = \pi/2$ 都是实数。证明

$$P_{NLx}^{(\omega)} = \chi_{xxxx}(3A^2 + B^2)E_{ox}^{(\omega)}$$
$$P_{NLy}^{(\omega)} = \chi_{xxxx}(3B^2 + A^2)E_{oy}^{(\omega)}$$

注意到三阶非线性极化不再跟电场矢量平行。所以，光在 Kerr 介质中传播时，存在一个相位延迟。

（e）利用邦加球，光在 Kerr 介质中传播时，证明偏振椭圆将保持椭圆率并旋转。证明每传播单位距离旋转率为

$$\frac{d\psi}{dz} = -\frac{1}{3}\frac{2AB}{A^2 + B^2}\frac{2\pi}{\lambda}n_2 I$$

I 是光强，旋转的指向与椭圆偏振态的旋向性一样。线性偏振光的旋转率为 0（A 或者 B=0）。

8.15　考虑一个非线性介质 $P_i = \varepsilon_0\chi_{ij}E_j + 2d_{ijk}E_jE_k$。根据习题 1.6，在电介质中有电场时单位体积的功是 $W = \int \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{P}$ 是极化量。在二维情况下使用两种不同的路径执行从 $(0,0)$ 到 (E_{10}, E_{20}) 的积分：

Path A：先从 $(0,0)$ 到 $(E_{10},0)$，然后从 $(E_{10},0)$ 到 (E_{10},E_{20})。

Path B：先从 $(0,0)$ 到 $(0,E_{20})$，然后从 $(0,E_{20})$ 到 (E_{10},E_{20})。

（a）证明：对于路径 A，非线性极化所做的功是

$$W = \frac{4}{3}d_{111}E_{10}^3 + \frac{4}{3}d_{222}E_{20}^3 + 4d_{112}E_{10}^2E_{20} + 2d_{122}E_{10}E_{20}^2 + 2d_{212}E_{10}E_{20}^2$$

（b）证明：对于路径 B，非线性极化所做的功是

$$W = \frac{4}{3}d_{111}E_{10}^3 + \frac{4}{3}d_{222}E_{20}^3 + 2d_{112}E_{10}^2E_{20} + 2d_{211}E_{20}E_{10}^2 + 4d_{212}E_{10}E_{20}^2$$

在一个无损耗介质中，积分应该与路径无关。这导致 $d_{122} = d_{212}$， $d_{121} = d_{211}$。在三维的情形中的分析得到 $d_{ijk} = d_{jik}$。把这个结果与方程（8.1-2）联系起来，我们得到 $d_{ijk} = d_{[ijk]}$，$[ijk]$ 代表下标指数的任何排列。

参考文献

1. Franken, P. A., A. E. Hill, C. W. Peters, and G. Weinreich, Generation of optical harmonics. *Phys. Rev. Lett.* **7**:118 (1961).
2. Zemike, F., Jr., Refractive indices of ammonium dihydrogen phosphate and potassium dihydrogen phosphate between 2000 Å and 1.5 μ. *J. Opt. Soc. Am.* **54**:1215 (1964).
3. Maker, P. D., R. W. Terhune, M. Nisenoff, and C. M. Savage, Effects of dispersion and focusing on the production of optical harmonics. *Phys. Rev. Lett.* **8**:21 (1962).
4. Giordmaine, J. A., Mixing of light beams in crystals. *Phys. Rev. Lett.* **8**:19 (1962).
5. Ashkin, A., G. D. Boyd, and J. M. Dziedzic, Observation of continuous second harmonic generation with gas lasers. *Phys. Rev. Lett.* **11**:14 (1963).
6. Seka, W., S. D. Jacobs, J. E. Rizzo, R. Boni, and R. S. Craxton, Demonstration of high efficiency third harmonic conversion of high power Nd–glass laser radiation. *Opt. Commun.* **34**:469 (1980). Also see R. S. Craxton, High efficiency frequency tripling schemes for high power Nd:glass lasers. *IEEE J. Quantum Electron.* **17**:177 (1981). (Additional articles on doubling and frequency

conversion are to be found in the same issue.)

7. Geusic, J. E., H. J. Levinstein, S. Singh, R. G. Smith, and L. G. Van Uitert, Continuous 0.53 μm solid-state source using $Ba_2NaNb_5O_{15}$. *IEEE J. Quantum Electron.* **4**:352 (1968).
8. Thorsos, E. I. (ed.), *Laboratory for Laser Analytics Review*, Vol. II, p. 7, 1979–1980.
9. Johnson, F. M., and J. A. Durado, Frequency up-conversion. *Laser Focus* **3**:31 (1967).
10. Midwinter, J. E., and J. Warner, Up-conversion of near infrared to visible radiation in lithium–meta-niobate. *J. Appl. Phys.* **38**:519 (1967).
11. Warner, J., Photomultiplier detection of 10.6 μm radiation using optical up-conversion in proustite. *Appl. Phys. Lett.* **12**:222 (1968).
12. Hulme, K. F., O. Jones, P. H. Davies, and M. V. Hobden, Synthetic proustite (Ag_3AsS_3): a new material for optical mixing. *Appl. Phys. Lett.* **10**:133 (1967).
13. Somekh, S., and A. Yariv, Phase matching by periodic modulation of the nonlinear optical properties. *Opt. Commun.* **6**(3):301 (1972).
14. Bonz, M. L., *Quasi Phase Matched Optical Frequency Conversion in Lithium Niobate Waveguides*. Ph.D. thesis, Stanford University, 1994.
15. Jackel, J. L., C. E. Rice, and J. J. Vesseka, Proton exchange for high index waveguides in $LiNbO_3$. *Appl. Phys. Lett.* **41**:607 (1982).
16. Fiesst, A., and P. Koidl, Current induced periodic ferroelectric domain reversal in $LiNbO_3$ for efficient second harmonic generation. *Appl. Phys. Lett.* **47**:1125 (1985).
17. Yamada, M., N. Nada, M. Saito, and K. Watanabe, First order quasi phase-matched $LiNbO_3$ waveguide periodically poled by applying an external field for efficient blue second harmonic generation. *Appl. Phys. Lett.* **62**:435 (1993).
18. Hellwarth, R. W., Third order susceptibilities of liquids and gases. *Progr. Quantum Electron.* **5**:1 (1977).
19. See, for example, Y. R. Shen, *Principles of Nonlinear Optics*. Wiley, New York, 1984, Chapter 10.
20. Fisher, R. A. (ed.), *Optical Phase Conjugation*. Academic Press, New York, 1983. A comprehensive collection of material covering many aspects of phase conjugation.
21. Yariv, A., and D. M. Pepper, Amplified reflection, phase conjugation, and oscillation in degenerate four-wave mixing. *Opt. Lett.* **1**:16 (1977).
22. Magde, D., and H. Mahr, Study in ammonium dihydrogen phosphate of spontaneous parametric interaction tunable from 4400 to 16000 Å. *Phys. Rev. Lett.* **18**:905 (1967).
23. The first demonstration of optical parametric oscillation is that of J. A. Giordmaine and R. C. Miller Tunable optical parametric oscillation in $LiNbO_3$ at optical frequencies. *Phys. Rev. Lett.* **14**:973 (1965).

第 9 章　激光光束的电光调制

9.0　引言

本书第 1 章论述了电磁波在各向异性晶体介质中的传播。业已证明，波的传播特性决定于电介质张量ε_{ij}，或者由折射率椭球面决定。本章研究光辐射在有外加电场的晶体中的传播问题。我们发现，在某类晶体中，其折射率的改变与外加电场的大小成正比，这称为线性电光效应（也就是波克耳斯效应，这是用 1893 年发现该效应的波克耳斯的名字命名的）。人们可以方便和广泛地应用这一现象来控制传播辐射的强度和相位。它的应用范围与日俱增，比如将信息加到光束上，激光锁模用于产生超短光脉冲，光束的偏转。这些应用中的某些部分将在本章中进一步讨论，利用声束对激光束进行调制和偏转的问题也将在本章后面部分中讨论。

9.1　线性电光效应

晶体中的光辐射传播可用介电张量来描述。在第 1 章中我们发现：对于晶体中一个给定的方向上，一般存在着两个可能的线性偏振模，即所谓的正常模传播。每一个模具有特定的偏振方向（即 $\boldsymbol{D}$ 的方向），和与之相应的折射率（即传播速度）。相互正交的偏振方向（$\boldsymbol{D}$ 矢量）和两个模式的折射率可以由折射率椭球方便地求得，假设在主坐标系中其最简单的形式为

$$\frac{x^2}{n_x^2}+\frac{y^2}{n_y^2}+\frac{z^2}{n_z^2}=1 \tag{9.1-1}$$

其中 x、y、z 的方向为介质的主轴，也就是说晶体内在这些方向上的矢量 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 是相互平行的。我们注意到$(1/n_x^2)$，$(1/n_y^2)$和$(1/n_z^2)$是不可渗透性张量主值，定义如下

$$\eta=\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \tag{9.1-2}$$

其中$\boldsymbol{\varepsilon}$是介电张量。

根据固体量子理论，光学介电张量依赖于晶体中的电荷分布。外加电场可以引起电荷的重新分配和晶格可能地轻微变形，最终引起光学不可渗透性张量的改变。这就是电光效应。线性电光系数定义如下

$$\Delta\eta_{ij}=\eta(\boldsymbol{E})-\eta(0)\equiv\Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_{ij}\equiv r_{ijk}E_k \tag{9.1-3}$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 是外加电场，E_k是电场的 k（k=x，y，z）分量，并假设对下标重复求和。在上面的方程中，我们忽略了高阶项。常量r_{ijk}是线性电光系数。为了方便，我们习惯使用 1=x，2=y，3=z。

因此在外加电场作用下，晶体的折射率椭球表示如下

$$\eta_{ij}(E)x_i x_j = 1 \tag{9.1-4}$$

或者等价表示为

$$\left(\frac{1}{n_x^2}+r_{1 1k}E_k\right)x^2+\left(\frac{1}{n_y^2}+r_{22k}E_k\right)y^2+\left(\frac{1}{n_z^2}+r_{33k}E_k\right)z^2+2xyr_{12k}E_k+2yzr_{23k}E_k+2zxr_{13k}E_k=1 \tag{9.1-5}$$

其中 E_k 是电场的 k 分量（k=x，y，z）且假设对下标重复求和。在方程（9.1-5）中，我们利用了不可渗透性张量的对称特性（$\eta_{ij}=\eta_{ji}$）。方程（9.1-5）中的“交叉项”说明：晶体主轴（x，y，z）不再是折射率椭球的主轴。

倘若为低损耗且不旋光（即没有旋光性或者旋光能量）媒质，那么不可渗透性张量是对称的。因此线性电光系数满足如下对称关系

$$r_{ijk}=r_{jik} \tag{9.1-6}$$

由于对称性，引入简略符号更为方便。它们定义如下

$$\begin{aligned}
1 &= (11) = (xx)\\
2 &= (22) = (yy)\\
3 &= (33) = (zz)\\
4 &= (23) = (32) = (yz) = (zy)\\
5 &= (13) = (31) = (xz) = (zx)\\
6 &= (12) = (21) = (xy) = (yx)
\end{aligned} \tag{9.1-7}$$

使用这些简略符可以写出

$$\left.\begin{aligned}
r_{1k} &= r_{11k}\\
r_{2k} &= r_{22k}\\
r_{3k} &= r_{33k}\\
r_{4k} &= r_{23k} = r_{32k}\\
r_{5k} &= r_{13k} = r_{31k}\\
r_{6k} &= r_{12k} = r_{21k}
\end{aligned}\right\}\quad (k = 1, 2, 3) \tag{9.1-8}$$

需要注意，这些简略符号的引入仅仅是为了表示的方便。这些矩阵元（6×3）没有一般的张量变换或者倍增特性。置换对称性减少了从 27 到 18 若干 r_{ijk} 的独立元。

依照方程（9.1-5），在外加电场作用下的正常模的传播和相应的与模式联合的折射率将依赖于外加电场的大小和方向。使用折射率椭球的方法，可以求出传播的正常模的折射率。线性电光效应是指寻常光和非常光的折射率的改变由外加电场引起，且与电场成正比。这种效应只在不具有反演对称性的晶体（中心对称晶体）中存在。在反演变换下（坐标变换将 $\boldsymbol{r}$ 变换成$-\boldsymbol{r}$）晶体结构保持不变。该命题可以证明如下：假设晶体具有反演对称性，沿某一方向施加的电场 $\boldsymbol{E}$ 造成折射率的变化为 $\Delta n_1 = sE$，s 是描述线性电光效应的常数。如果将电场改成相反方向，折射率的变化就为 $\Delta n_2 = s(-E)$，由于反演对称，这两个方向在物理上是等价的，所以 $\Delta n_1 = \Delta n_2$。于是，它要求 $s=-s$，而这只有在 $s=0$ 时才成立，因此具有反演对称的

晶体中不存在线性电光效应。所有晶体可分为具有反演对称性和不具有反演对称性，这种划分是结晶学的一个基本的内容，有关的结果早已编成表格[1]。

使用简略符号，有外加电场存在时的折射率椭球可以写成

$$\left[\frac{1}{n_x^2}+\Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_1\right]x^2+\left[\frac{1}{n_y^2}+\Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_2\right]y^2+\left[\frac{1}{n_z^2}+\Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_3\right]z^2+$$
$$2yz\,\Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_4+2zx\,\Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_5+2xy\,\Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_6=1$$

或等价表示成

$$\left(\frac{1}{n_x^2}+r_{1k}E_k\right)x^2+\left(\frac{1}{n_y^2}+r_{2k}E_k\right)y^2+\left(\frac{1}{n_z^2}+r_{3k}E_k\right)z^2+$$
$$2yzr_{4k}E_k+2zxr_{5k}E_k+2xyr_{6k}E_k=1 \tag{9.1-9}$$

这里同样假设对下标重复求和。

此外，由一任意直流电场 $E(E_x,E_y,E_z)$ 所引起系数 $\left(\frac{1}{n^2}\right)_i$， $i=1,2,\cdots,6$ 的线性变化表示成如下矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\Delta(1/n^2)_1\\ \Delta(1/n^2)_2\\ \Delta(1/n^2)_3\\ \Delta(1/n^2)_4\\ \Delta(1/n^2)_5\\ \Delta(1/n^2)_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_{11}&r_{12}&r_{13}\\ r_{21}&r_{22}&r_{23}\\ r_{31}&r_{32}&r_{33}\\ r_{41}&r_{42}&r_{43}\\ r_{51}&r_{52}&r_{53}\\ r_{61}&r_{62}&r_{63}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_x\\ E_y\\ E_z\end{bmatrix} \tag{9.1-10}$$

运用矩阵乘法规则可以得到

$$\Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_6=r_{61}E_x+r_{62}E_y+r_{63}E_z \tag{9.1-11}$$

矩阵元为 r_{ij} 的 6×3 矩阵称为电光张量。我们在本节中曾证明，具有反演对称性(中心对称)的晶体，其矩阵元 $r_{ij}=0$。张量 r_{ij} 的形式（而不是其数值大小）可以从对称性关系推导出来[1]，它可以决定 18 个 r_{ij} 中哪些为零，也可以决定其余系数间的关系。在表 9.1 中，我们列出了所有非中心对称类型晶体的电光张量。表 9.2 中给出了某些晶体的电光系数。

表 9.1 用简略符号表示的所有对称类型晶体的电光系数 [a]

中心对称系： $(\bar{1}, 2/m. mmm. 4/m. 4/mmm, \bar{3}, \bar{3}m, 6/m, 6/mmm, m3, m3m)$

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

续表

三斜晶系：

(1)

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} \\ r_{61} & r_{62} & r_{63} \end{bmatrix}$$

单斜晶系：

$2\ (2 \parallel x_2)$　　$2\ (2 \parallel x_3)$

$$\begin{bmatrix} 0 & r_{12} & 0 \\ 0 & r_{22} & 0 \\ 0 & r_{32} & 0 \\ r_{41} & 0 & r_{43} \\ 0 & r_{52} & 0 \\ r_{61} & 0 & r_{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ r_{41} & r_{42} & 0 \\ r_{51} & r_{52} & 0 \\ 0 & 0 & r_{63} \end{bmatrix}$$

$m\ (m \perp x_2)$　　$m\ (m \perp x_3)$

$$\begin{bmatrix} r_{11} & 0 & r_{13} \\ r_{21} & 0 & r_{23} \\ r_{31} & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{42} & 0 \\ r_{51} & 0 & r_{53} \\ 0 & r_{62} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & 0 \\ 0 & 0 & r_{43} \\ 0 & 0 & r_{53} \\ r_{61} & r_{62} & 0 \end{bmatrix}$$

正交晶系：

222　　$2mm$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{52} & 0 \\ 0 & 0 & r_{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{42} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

四方晶系：

4　　$\bar{4}$　　422

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ r_{41} & r_{51} & 0 \\ r_{51} & -r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & -r_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & -r_{51} & 0 \\ r_{51} & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & -r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$4mm$　　$\bar{4}2m\ (2 \parallel x_1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{51} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{63} \end{bmatrix}$$

续表

三角晶系：

3

$$\begin{bmatrix} r_{11} & -r_{22} & r_{13} \\ -r_{11} & r_{22} & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ r_{41} & r_{51} & 0 \\ r_{51} & -r_{41} & 0 \\ -r_{22} & -r_{11} & 0 \end{bmatrix}$$

32

$$\begin{bmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ -r_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & -r_{41} & 0 \\ 0 & -r_{11} & 0 \end{bmatrix}$$

$3m\ (m \perp x_1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & -r_{22} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{51} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ -r_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$3m\ (m \perp x_2)$

$$\begin{bmatrix} r_{11} & 0 & r_{13} \\ -r_{11} & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{51} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ 0 & -r_{11} & 0 \end{bmatrix}$$

六方晶系：

6

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ r_{41} & r_{51} & 0 \\ r_{51} & -r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$6mm$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{51} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

622

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & -r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\bar{6}$

$$\begin{bmatrix} r_{11} & -r_{22} & 0 \\ -r_{11} & r_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -r_{22} & -r_{11} & 0 \end{bmatrix}$$

$\bar{6}m2\ (m \perp x_1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & -r_{22} & 0 \\ 0 & r_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -r_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\bar{6}m2\ (m \perp x_2)$

$$\begin{bmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ -r_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_{11} & 0 \end{bmatrix}$$

立方晶系：

$\bar{4}3m$, 23

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{41} \end{bmatrix}$$

432

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a. 在每个张量左上角的符号为惯用的对称群的记号。

表 9.2　一些常用晶体的线性电光系数

物质	对称性	波长 λ (μm)	电光系数 r_{lk} (10^{-12} m/V)	折射率 n_i	n^3r (10^{-12} m/V)	介电常数[a] $\varepsilon_i(\varepsilon_0)$
CdTe	$\bar{4}3m$	1.0	$(T)\ r_{41} = 4.5$	$n = 2.84$	103	$(S)\ \varepsilon = 9.4$
		3.39	$(T)\ r_{41} = 6.8$			
		10.6	$(T)\ r_{41} = 6.8$	$n = 2.60$	120	
		23.35	$(T)\ r_{41} = 5.47$	$n = 2.58$	94	
		27.95	$(T)\ r_{41} = 5.04$	$n = 2.53$	82	

续表

物质	对称性	波长 λ (μm)	电光系数 r_{lk} (10^{-12} m/V)	折射率 n_i	n^3r (10^{-12} m/V)	介电常数[a] $\varepsilon_i(\varepsilon_0)$
GaAs	$\bar{4}3m$	0.9	$r_{41}=1.1$	$n=3.60$	51	$(S)\ \varepsilon=13.2$
		1.15	$(T)\ r_{41}=1.43$	$n=3.43$	58	$(T)\ \varepsilon=12.3$
		3.39	$(T)\ r_{41}=1.24$	$n=3.3$	45	
		10.6	$(T)\ r_{41}=1.51$	$n=3.3$	54	
GaP	$\bar{4}3m$	0.55–1.3	$(T)\ r_{41}=-1.0$	$n=3.66–3.08$		$(S)\ \varepsilon=10$
		0.633	$(S)\ r_{41}=-0.97$	$n=3.32$	35	
		1.15	$(S)\ r_{41}=-1.10$	$n=3.10$	33	
		3.39	$(S)\ r_{41}=-0.97$	$n=3.02$	27	
β-ZnS (sphalerite)	$\bar{4}3m$	0.4	$(T)\ r_{41}=1.1$	$n=2.52$	18	$(T)\ \varepsilon=16$
		0.5	$(T)\ r_{41}=1.81$	$n=2.42$		$(S)\ \varepsilon=12.5$
		0.6	$(T)\ r_{41}=2.1$	$n=2.36$		
		0.633	$(S)\ r_{41}=-1.6$	$n=2.35$		
		3.39	$(S)\ r_{41}=-1.4$			
ZnSe	$\bar{4}3m$	0.548	$(T)\ r_{41}=2.0$	$n=2.66$		$(T)\ \varepsilon=9.1$
		0.633	$(S)\ r_{41}=2.0$	$n=2.60$	35	$(S)\ \varepsilon=9.1$
		10.6	$(T)\ r_{41}=2.2$	$n=2.39$		
ZnTe	$\bar{4}3m$	0.589	$(T)\ r_{41}=4.51$	$n=3.06$		$(T)\ \varepsilon=10.1$
		0.616	$(T)\ r_{41}=4.27$	$n=3.01$		$(S)\ \varepsilon=10.1$
		0.633	$(T)\ r_{41}=4.04$	$n=2.99$	108	
			$(S)\ r_{41}=4.3$			
		0.690	$(T)\ r_{41}=3.97$	$n=2.93$		
		3.41	$(T)\ r_{41}=4.2$	$n=2.70$	83	
		10.6	$(T)\ r_{41}=3.9$	$n=2.70$	77	
$Bi_{12}SiO_{20}$	23	0.633	$r_{41}=5.0$	$n=2.54$	82	
CdSe	6mm	3.39	$(S)\ r_{13}=1.8$	$n_o=2.452$		$(T)\ \varepsilon_1=9.70$
						$(T)\ \varepsilon_3=10.65$
			$(T)\ r_{33}=4.3$	$n_e=2.471$		$(S)\ \varepsilon_1=9.33$
						$(S)\ \varepsilon_3=10.20$
α-ZnS (wurtzite)	6mm	0.633	$(S)\ r_{13}=0.9$	$n_o=2.347$		$(T)\ \varepsilon_1=\varepsilon_2=8.7$
			$(S)\ r_{33}=1.8$	$n_e=2.360$		$(S)\ \varepsilon_1=8.7$
$Pb_{0.814}La_{0.214}(Ti_{0.6}Zr_{0.4})O_3$ (PLZT)	∞m	0.546	$n_e^3r_{33}-n_o^3r_{13}=2320$	$n_o=2.55$		
$LiIO_3$	6	0.633	$(S)\ r_{13}=4.1$ $(S)\ r_{33}=6.4$	$n_o=1.8830$		
			$(S)\ r_{41}=1.4$ $(S)\ r_{51}=3.3$	$n_o=1.7367$		
Ag_3AsS_3	3m	0.633	$(S)\ n_o^3r_e=70$	$n_o=3.019$		
			$(S)\ n_e^3r_{22}=29$	$n_e=2.739$		
$LiNbO_3$ ($T_c=1230$ °C)	3m	0.633	$(T_4)\ r_{13}=9.6$ $(S)\ r_{13}=8.6$	$n_o=2.286$		$(T)\ \varepsilon_1=\varepsilon_2=78$
			$(T)\ r_{22}=6.8$ $(S)\ r_{22}=3.4$	$n_e=2.200$		$(T)\ \varepsilon_2=32$
			$(T)\ r_{33}=30.9$ $(S)\ r_{33}=30.8$			$(S)\ \varepsilon_1=\varepsilon_2=43$
			$(T)\ r_{51}=32.6$ $(T)\ r_{51}=28$			$(S)\ \varepsilon_3=28$
			$(T)\ r_c=21.1$			
		1.15	$(T)\ r_{22}=5.4$	$n_o=2.229$		
			$(T)\ r_c=19$	$n_e=2.150$		
		3.39	$(T)\ r_{22}=3.1$ $(S)\ r_{33}=28$	$n_o=2.136$		
			$(T)\ r_c=18$ $(S)\ r_{22}=3.1$	$n_e=2.073$		
			$(S)\ r_{13}=6.5$			
			$(S)\ r_{51}=23$			
$LiTaO_3$	3m	0.633	$(T)\ r_{13}=8.4$ $(S)\ r_{13}=7.5$	$n_o=2.176$		$(T)\ \varepsilon_1=\varepsilon_2=51$
			$(T)\ r_{33}=30.5$ $(S)\ r_{33}=33$	$n_e=2.180$		$(T)\ \varepsilon_3=45$
			$(T)\ r_{22}=-0.2$ $(S)\ r_{51}=20$			$(S)\ \varepsilon_1=\varepsilon_2=41$
			$(T)\ r_c=22$ $(S)\ r_{22}=1$			$(S)\ \varepsilon_3=43$
		3.39	$(S)\ r_{33}=27$	$n_o=2.060$		
			$(S)\ r_{13}=4.5$	$n_e=2.065$		
			$(S)\ r_{51}=15$			
			$(S)\ r_{22}=0.3$			

续表

物质	对称性	波长 λ (μm)	电光系数 r_{lk} (10^{-12} m/V)	折射率 n_i	n^3r (10^{-12} m/V)	介电常数[a] $\varepsilon_i(\varepsilon_0)$
$AgGaS_2$	$\bar{4}2m$	0.633	$(T)\ r_{41}=4.0$ $(T)\ r_{63}=3.0$	$n_o=2.553$ $n_e=2.507$		
CsH_2AsO_4 (CDA)	$\bar{4}2m$	0.55	$(T)\ r_{41}=14.8$ $(T)\ r_{63}=18.2$	$n_o=1.572$ $n_e=1.550$		
KH_2PO_4 (KDP)	$\bar{4}2m$	0.546	$(T)\ r_{41}=8.77$ $(T)\ r_{63}=10.3$	$n_o=1.5115$ $n_e=1.4698$		$(T)\ \varepsilon_1=\varepsilon_2=42$ $(T)\ \varepsilon_3=21$
		0.633	$(T)\ r_{41}=8$ $(T)\ r_{63}=11$	$n_o=1.5074$ $n_e=1.4669$		$(S)\ \varepsilon_1=\varepsilon_2=44$ $(S)\ \varepsilon_3=21$
		3.39	$(T)\ r_{63}=9.7$ $(T)\ n_o^3r_{63}=33$			
KD_2PO_4 (KD*P)	$\bar{4}2m$	0.546	$(T)\ r_{63}=26.8$ $(T)\ r_{41}=8.8$	$n_o=1.5079$ $n_e=1.4683$		$(T)\ \varepsilon_3=50$ $(S)\ \varepsilon_1=\varepsilon_2=58$
		0.633	$(T)\ r_{63}=24.1$	$n_o=1.502$ $n_e=1.462$		$(S)\ \varepsilon_3=48$
$(NH_4)H_2PO_4$ (ADP)	$\bar{4}2m$	0.546	$(T)\ r_{41}=23.76$ $(T)\ r_{63}=8.56$	$n_o=1.5266$ $n_e=1.4808$		$(T)\ \varepsilon_1=\varepsilon_2=56$ $(T)\ \varepsilon_3=15$
		0.633	$(T)\ r_{41}=23.41$ $(T)\ n_o^3r_{63}=27.6$	$n_o=1.5220$ $n_e=1.4773$		$(S)\ \varepsilon_1=\varepsilon_2=58$ $(S)\ \varepsilon_3=14$
$(NH_4)D_2PO_4$ (AD*P)	$\bar{4}2m$	0.633	$(T)\ r_{41}=40$ $(T)\ r_{63}=10$	$n_o=1.516$ $n_e=1.475$		
$BaTiO_3$ ($T_c=395$ K)	$4mm$	0.546	$(T)\ r_{51}=1640$　$(S)\ r_{51}=820$ $(T)\ r_c=108$　$(S)\ r_c=23$	$n_o=2.437$ $n_e=2.365$		$(T)\ \varepsilon_1=\varepsilon_2=3600$ $(T)\ \varepsilon_3=135$
$(KTa_xNb_{1-x}O_3)$ (KTN), $x=0.35$ ($T_c=40$–60 °C)		0.633	$(T)\ r_{51}=8000(T_c-28)$ $(T)\ r_c=500(T_c-28)$ $(T)\ r_{51}=3000(T_c-16)$ $(T)\ r_c=700(T_c-16)$	$n_o=2.318$ $n_e=2.277$ $n_o=2.318$ $n_e=2.281$		
$Ba_{0.25}Sr_{0.75}Nb_2O_6$ ($T_c=395$ K)	$4mm$	0.633	$(T)\ r_{13}=67$　$(T)\ r_{51}=42$ $(T)\ r_{33}=1340$　$(S)\ r_c=1090$	$n_o=2.3117$ $n_e=2.2987$		$\varepsilon_3=3400$ (15 MHz)
α-HIO_3	222	0.633	$(T)\ r_{41}=6.6$　$(S)\ r_{41}=2.3$ $(T)\ r_{52}=7.0$　$(S)\ r_{52}=2.6$ $(T)\ r_{63}=6.0$　$(S)\ r_{63}=4.3$	$n_1=1.8365$ $n_2=1.984$ $n_3=1.960$		
$KNbO_3$	$2mm$	0.633	$(T)\ r_{13}=28$　$(T)\ r_{23}=1.3$ $(T)\ r_{33}=64$ $(T)\ r_{42}=380$　$(S)\ r_{42}=270$ $(T)\ r_{51}=105$	$n_1=2.280$ $n_2=2.329$ $n_3=2.169$		
KIO_3	1	0.500	$r_{62}=90$	$n_1=1.700$ $n_2=1.828$ (5893 Å) $n_3=1.832$		

a.（T）=从直流到音频范围的低频；（S）=高频。

例：KH_2PO_4 晶体的电光效应。

讨论磷酸二氢钾（KH_2PO_4），又称为 KDP 晶体的具体例子。该晶体具有四重对称轴（C_4），按惯例取 z（光）轴；它还有两个互相垂直的二重对称轴，位于与 z 垂直的平面内，这两个轴表示为 x 和 y 轴。此晶体的对称群是 $\bar{4}2m$。对具有 n 重对称轴的晶体而言，沿此轴旋转 $2\pi/n$ 不会使晶体结构发生改变。利用表 9.1 可将电光张量写成如下形式

$$r_{ij}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\r_{41}&0&0\\0&r_{41}&0\\0&0&r_{63}\end{bmatrix} \tag{9.1-12}$$

因此不为零的矩阵元仅为 $r_{41}=r_{52}$ 和 r_{63}。利用式（9.1-9），得到有外加电场 $\boldsymbol{E}(E_x,E_y,E_z)$ 存在时的折射率椭球方程

$$\frac{x^2}{n_o^2}+\frac{y^2}{n_o^2}+\frac{z^2}{n_e^2}+2r_{41}E_xyz+2r_{41}E_yxz+2r_{63}E_zxy=1 \tag{9.1-13}$$

式中前三项中的常数与电场无关，且因为是单轴晶体，常数取为 $n_x=n_y=n_0,n_z=n_e$。可见，由于外加电场的存在，导致折射率椭球中出现了“交叉”项，它们是与 xy，xz 和 yz 有关的项。这就意味着外加电场的存在使得椭球的主轴不再与 x，y 和 z 轴平行，有必要求出存在外加电场 $\boldsymbol{E}$ 时新主轴的方向和各个折射率的大小，从而确定电场对传播的影响。为了明确起见，将外加电场的方向选成与 z 轴平行，所以式（9.1-13）变成

$$\frac{x^2+y^2}{n_o^2}+\frac{z^2}{n_e^2}+2r_{63}E_zxy=1 \tag{9.1-14}$$

下面的问题是寻找新的坐标系——x'，y'，z'，使得新坐标系下的椭球方程式（9.1-14）中不含交叉项，具有如下形式：

$$\frac{x'^2}{n_{x'}^2}+\frac{y'^2}{n_{y'}^2}+\frac{z'^2}{n_{z'}^2}=1 \tag{9.1-15}$$

其中 x'，y' 和 z' 为外加电场的方向与 z 轴平行时椭球主轴的方向。由式（9.1-15）可知，椭球主轴长为 $2n_{x'}$，$2n_{y'}$，$2n_{z'}$，一般来说，它们与外加电场有关。

对于式（9.1-14）的情况，为了使之变成对角形式，显然需要选取坐标系 x'，y'，z'，其中 z' 平行于 z 轴。又由于式（9.1-14）中 x 与 y 的对称性，x' 与 y' 相对于 x，y 旋转45°，如图9.1所示。从 x，y 到 x'，y' 的变换关系式是

$$x=x'\cos 45^\circ+y'\sin 45^\circ$$

$$y=-x'\sin 45^\circ+y'\cos 45^\circ$$

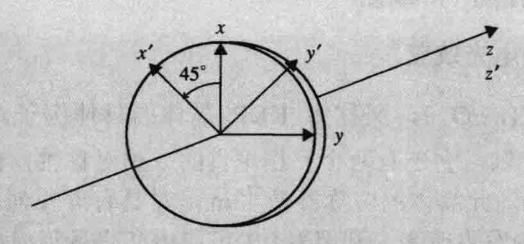


图 9.1　坐标转换将二次方程式化成对角形式。在本例中，z 轴是四重对称轴，x 和 y 是具有 $\bar{4}2m$ 对称性晶体的二重对称轴

将其代入式（9.1-16）可得

$$\left(\frac{1}{n_o^2}-r_{63}E_z\right)x'^2+\left(\frac{1}{n_o^2}+r_{63}E_z\right)y'^2+\frac{z^2}{n_e^2}=1 \tag{9.1-16}$$

式（9.1-16）表明，若外加场沿着 z 方向，则 x'，y' 和 z 为椭球的主轴。按照式（9.1-16），椭球的 x' 轴的长度为 $2n_{x'}$，其中

$$\frac{1}{n_{x'}^2}=\frac{1}{n_o^2}-r_{63}E_z$$

假设 $r_{63}E_z \ll n_0^{-2}$，并利用微分关系 $dn=-(n^3/2)d(1/n^2)$，$n_{x'}$ 微小变化，$dn_{x'}=(n_o^3/2)r_{63}E_z$，因此

$$n_{x'}=n_o+\frac{n_o^3}{2}r_{63}E_z \tag{9.1-17}$$

类似地有

$$n_{y'}=n_o-\frac{n_o^3}{2}r_{63}E_z \tag{9.1-18}$$

$$n_{z'}=n_z=n_e \tag{9.1-19}$$

现在讨论外加电场平行于 x 轴的情况，那么方程（9.1-13）变为

$$\frac{x^2}{n_o^2}+\frac{y^2}{n_o^2}+\frac{z^2}{n_e^2}+2r_{41}E_x yz=1 \tag{9.1-20}$$

对于式（9.1-20）的情况，因为“交叉项”仅仅包含 y 和 z，故新的主轴 x' 与 x 轴重叠。yz 平面有旋转，因此需要转换成对角形式。令 θ 角为新坐标系中 $y'z'$ 平面与旧坐标系中 yz 平面间的夹角。从 x，y，z 到 x',y',z' 的变换关系为

$$\begin{aligned} x&=x' \\ y&=y'\cos\theta-z'\sin\theta \\ z&=y'\sin\theta+z'\cos\theta \end{aligned} \tag{9.1-21}$$

利用式（9.1-21），式（9.1-20）可以化简如下

$$\frac{x'^2}{n_o^2}+\left(\frac{1}{n_o^2}+r_{41}E_x\tan\theta\right)y'^2+\left(\frac{1}{n_e^2}-r_{41}E_x\tan\theta\right)z'^2=1 \tag{9.1-22}$$

θ 可以表示如下

$$\tan\theta=\frac{2n_e^2n_o^2}{n_e^2-n_o^2}r_{41}E_x \tag{9.1-23}$$

当外加场 E_x 沿着 x 轴，新的折射率椭球方程（9.1-22）其主轴沿 x 轴旋转了 θ 角度。即使是相对较高的外加场，这一角度都很小。对于 KDP 晶体，当外加场 $E_x=10^6$ V/m 时，这一角度仅为 0.04°。根据式（9.1-23），这一角度仅仅对 $n_o \approx n_e$ 的材料有意义。特别地，$n_o=n_e$ 时 $\theta=45°$。依据式（9.1-22），新的主折射率为

$$n_{x'}=n_o$$

$$n_{y'} = n_o - \frac{1}{2}n_o^3 r_{41} E_x \tan\theta$$
$$n_{z'} = n_e + \frac{1}{2}n_e^3 r_{41} E_x \tan\theta \qquad (9.1\text{-}24)$$

适度的电场 E_x 作用于 KDP 晶体时，θ 角很小，根据式（9.1-23）其值随着 $r_{41}E_x$ 成线性变化。因此折射率随着 E_x 的二次方变化。

例：$LiNbO_3$ 晶体的光电效应。

$LiNbO_3$ 晶体具有 $3m$ 的晶体对称性。依据表 9.1 可知，其电光系数具有如下形式

$$r_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -r_{22} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{51} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ -r_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (9.1\text{-}25)$$

下面讨论晶体的外加场沿着 c 轴（z 轴）时的情况：依据式（9.1-9），折射率椭球方程具有如下表达式

$$\left(\frac{1}{n_o^2} + r_{13}E\right)x^2 + \left(\frac{1}{n_o^2} + r_{13}E\right)y^2 + \left(\frac{1}{n_e^2} + r_{33}E\right)z^2 = 1 \qquad (9.1\text{-}26)$$

其中 n_o 和 n_e 分别是正常和非常折射率指数。新折射率椭球的主轴保持不变，因此式（9.1-26）中无交叉项。新的椭球半轴长为

$$n_x = n_o - \frac{1}{2}n_o^3 r_{13} E$$
$$n_y = n_o - \frac{1}{2}n_o^3 r_{13} E \qquad (9.1\text{-}27)$$
$$n_z = n_e - \frac{1}{2}n_e^3 r_{33} E$$

注意上面讨论的情况为：外加场沿着 c 轴方向，且晶体保持单轴非均质性。如果光束沿着 x 轴传播，双折射表示为

$$n_z - n_y = (n_e - n_o) - \frac{1}{2}(n_e^3 r_{33} - n_o^3 r_{13})E \qquad (9.1\text{-}28)$$

通过调整外电场可以改变双折射。

实用的 $\overline{4}3m$ 类晶体（GaAs，InP，ZnS）电光效应的详细处理在附录 F 中给出。

通解

现在研究晶体中有任意方向直流电电场时，光波的传播问题。晶体中有任意方向直流电场作用时的折射率椭球方程由式（9.1-4）给出，将其改写成二次式

$$\eta_{ij} x_i x_j = 1 \qquad (9.1\text{-}29)$$

η_{ij} 是外加电场作用下的不可渗透性张量，这里还是使用惯用的假设对下标重复求和。现在的问题是要求出式（9.1-29）表示的椭球各主轴的方向和长度。这可以通过旋转坐标系完

成。在新的坐标系下，二次方程式（9.1-29）变成

$$\eta'_{11}x_1'^2+\eta'_{22}x_2'^2+\eta'_{33}x_3'^2=1 \tag{9.1-30}$$

新坐标系的轴是折射率椭球的主轴，主轴的长度分别为：$2\sqrt{1/\eta'_{11}}$，$2\sqrt{1/\eta'_{22}}$，$2\sqrt{1/\eta'_{33}}$。

将二次方程式（9.1-29）转换成它的主要形式——所有的交叉项都为零的数学过程，等价于矩阵η_{ij}的对角化：

$$\eta_{ij}=\begin{bmatrix}\eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13}\\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23}\\ \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{n_x^2}+r_{1k}E_k & r_{6k}E_k & r_{5k}E_k\\ r_{6k}E_k & \dfrac{1}{n_y^2}+r_{2k}E_k & r_{4k}E_k\\ r_{5k}E_k & r_{4k}E_k & \dfrac{1}{n_z^2}+r_{3k}E_k\end{bmatrix} \tag{9.1-31}$$

假设对下标重复求和。不可渗透性张量（矩阵）的对角化常常通过求解下述本征问题获得：

$$\begin{bmatrix}\eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13}\\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23}\\ \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33}\end{bmatrix}V=\eta V \tag{9.1-32}$$

对于实数对称矩阵（或张量），上述方程求解出三个实数本征矢量和三个实数本征值。其本征值分别为：η'_{11},η'_{22}和η'_{33}，而本征矢量平行于椭球的主轴。

例：KH_2PO_4 中的电光效应。

下面以KH_2PO_4（KDP）为例来描述矩阵对角化方法，沿 z 轴方向对 $\mathbf{KH_2PO_4}$ 施加一直流电电场。这个问题前面已作过近似讨论。

由式（9.1-14），折射率椭球可表示为

$$\frac{x^2}{n_o^2}+\frac{y^2}{n_o^2}+\frac{z^2}{n_e^2}+2r_{63}E_zxy=1 \tag{9.1-33}$$

从而不可渗透性矩阵为

$$\eta_{ij}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{n_o^2} & r_{63}E_z & 0\\ r_{63}E_z & \dfrac{1}{n_o^2} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{n_e^2}\end{bmatrix} \tag{9.1-34}$$

按照式（9.1-32），该矩阵的本征值是下列方程的根

$$\det\begin{vmatrix} \dfrac{1}{n_o^2}-\eta & r_{63}E_z & 0 \\ r_{63}E_z & \dfrac{1}{n_o^2}-\eta & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{n_e^2}-\eta \end{vmatrix} \tag{9.1-35}$$

演算后得

$$\left(\frac{1}{n_e^2}-\eta\right)\left[\left(\frac{1}{n_o^2}-\eta\right)^2-(r_{63}E_z)^2\right]=0 \tag{9.1-36}$$

可求得方程的根是

$$\begin{aligned} \eta'_{11} &= \frac{1}{n_e^2} \\ \eta'_{22} &= \frac{1}{n_o^2}+r_{63}E_z \\ \eta'_{33} &= \frac{1}{n_o^2}-r_{63}E_z \end{aligned} \tag{9.1-37}$$

这与式（9.1-16）一致，将其依次代入方程（9.1-32）可以求出本征矢量（或者椭球主轴）。

线性电光效应（波克耳斯效应）也可以根据介电常量的改变而表示如下。从式（9.1-2）介电不可渗透性张量的定义开始，$\eta\varepsilon=\varepsilon_0$，进行微分得到

$$(\Delta\eta)\varepsilon+\eta(\Delta\varepsilon)=0 \tag{9.1-38}$$

在方程（9.1-38）两边分别乘以ε，得到

$$\Delta\varepsilon=-\frac{\varepsilon(\Delta\eta)\varepsilon}{\varepsilon_0} \tag{9.1-39}$$

其中$\Delta\eta$是由于外加电场引起的介电不可渗透性张量变化。根据张量元素，上述方程可以写成

$$\Delta\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{E})-\varepsilon_{ij}(0)=-\sum_k \varepsilon_0 n_i^2 n_j^2 r_{ijk}E_k \tag{9.1-40}$$

其中n_i和n_j是分别平行于主轴i，j的主折射率。

9.2　电光调制——相位和振幅

我们已经在前面章节中证明：外加电场可以改变某些晶体的折射率椭球。我们也知道传播特性是由折射率椭球控制的，因此，可以利用这类晶体的电光效应来控制光波的传播，其实质是控制它们相位和偏振态。如果需要，可以把这种调制转换成对振幅的调制。举个例子，我们考虑在外加电场作用下的 KDP 晶体中偏振光束的传播。图 9.2 给出了 c 切割 KDP 晶体薄片的示意图（切出的晶面垂直于 c 轴），该晶体处于平行于 z 轴（z 轴平行于 c 轴）的

外加电场 $\boldsymbol{E}$ 的作用下。

对图 9.2 所示的在平行于 z 轴的外加电场 $\boldsymbol{E}$ 作用下的 KDP 晶体，其新的主轴为（x', y', z）。如果考虑沿着 z 方向传播的情况，依据第 1 章所描述的步骤，我们需要确定由 $z=0$ 平面（一般，这个平面包含原点并且垂直于传播方向）和椭球相交形成的椭圆形状。令 $z=0$，从式（9.1-16）获得如下椭圆方程

$$\left(\frac{1}{n_o^2} - r_{63}E_z\right)x'^2 + \left(\frac{1}{n_o^2} + r_{63}E_z\right)y'^2 = 1 \tag{9.2-1}$$

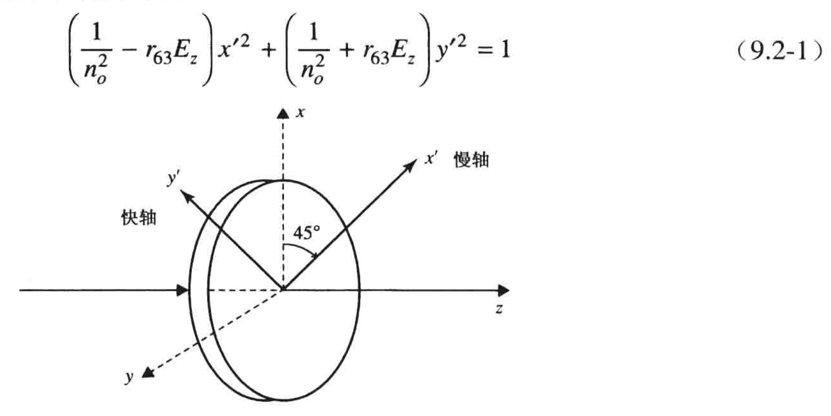


图 9.2　c 切割 KDP 晶体的一个薄片，图中给出了外加电场沿 z 轴时的介电主轴 x', y', z。假设 $r_{63}E_z$ 为正，x' 轴是慢轴，y' 轴是快轴

按照折射率椭球方法：在其中传播的两个正常模分别沿着 x' 轴和 y' 轴偏振，通过方程（9.1-17）和式（9.1-18）可以求出它们的折射率分别是 $n_{x'}$ 和 $n_{y'}$。

现在可以提出电光相位延迟的概念。考虑一个垂直入射到 $x'y'$ 平面上的光场。对于该类传播，双折射形式如下

$$n_{x'} - n_{y'} = n_o^3 r_{63} E \tag{9.2-2}$$

令 KDP 晶片的厚度为 l。则该平面的相位延迟为

$$\Gamma = \frac{\omega}{c}(n_{x'} - n_{y'})l = \frac{2\pi}{\lambda}(n_{x'} - n_{y'})l = \frac{2\pi}{\lambda}n_o^3 r_{63} E l = \frac{2\pi}{\lambda}n_o^3 r_{63} V \tag{9.2-3}$$

其中 V 是外加电压，$V = El$。从第一章的讨论可知，相滞后板就是偏振态的变换。这里薄片引起的相位延迟与外加电场的变化成比例。因此，可以利用外加电场，将入射光束的偏振态变换成所需的偏振态。为了证明这点，假设入射光束随沿着 x 方向的矢量 E_{in} 成线性变化。在入射平面（z=0）处，偏振态可以用琼斯矢量（在主坐标轴 x', y' 中）表示

$$\boldsymbol{E}_{\text{in}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \tag{9.2-4}$$

在出射平面（z=d）处，出射光束的偏振态（在主坐标轴 x', y' 中）为

$$\boldsymbol{E}_{\text{out}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Gamma/2}\\ \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\Gamma/2}\end{bmatrix} \tag{9.2-5}$$

其中 Γ 由式（9.2-3）给出。图 9.3 给出了不同的相位延迟 Γ 值所对应的输出光束的偏振椭圆。产生 π 相位延迟的电压称为半波电压，在本例中为

$$V_\pi = \frac{\lambda}{2n_o^3 r_{63}} \tag{9.2-6}$$

其中 λ 是光波长。对于 z 切割 KDP 晶体的一个薄片，其半波电压在 $\lambda = 633\text{nm}$ 处大约为 9.3kV。注意：半波电压与波长成比例而且反比于相应的电光系数。获得大小为 π 的相位延迟需要将其偏振态调整到正交偏振态。

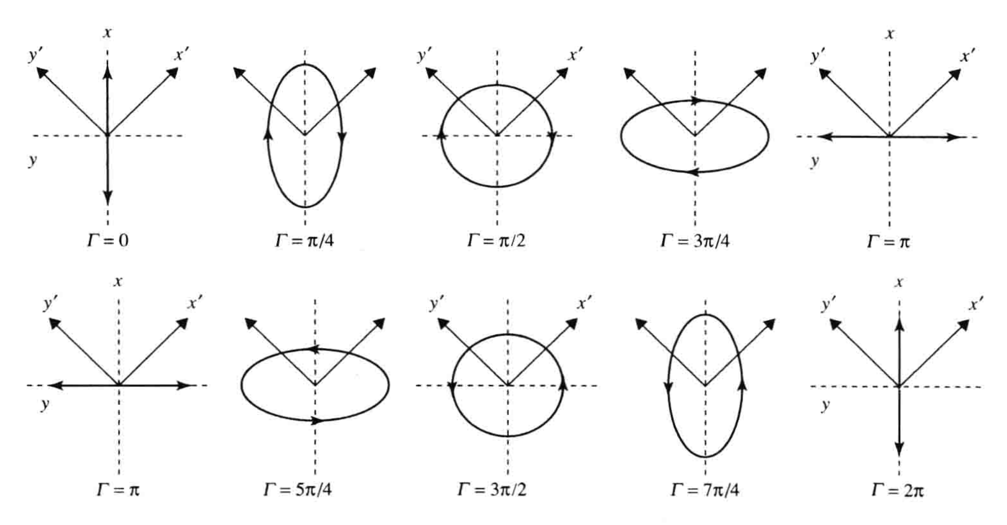


图 9.3　各种不同的相位延迟值所对应的出射光束的偏振椭圆

振幅调制

考察图 9.3 可以发现，电致双折射会使在 $z = 0$ 发射的波沿 x 方向偏振逐渐转到 y 方向的偏振，随着距离的增加 y 方向偏振的分量增加，同时 x 偏振分量减小，直到某一位置，此时 $\Gamma = \pi$，偏振方向平行于 y 轴。若该位置相当于晶体的出射平面，如在该处放置一个与入射偏振成直角的偏振器，即只允许 E_y 通过的偏振器，那么有电场时光束将无衰减地通过，而没有电场时（$\Gamma = 0$）输出光束则会被交叉的输出偏振器完全阻挡。这种控制光能流的方法是电光振幅调制的基础。

一个典型的电光振幅调制器装置如图 9.4 所示，电光晶体放在两个正交的偏振片之间，而偏振器的偏振方向分别与电致双折射轴 x' 和 y' 成 45° 角。为明确起见，假定装置中使用 KDP 晶体。在光路上还放上一块天然的双折射晶体，它引入一个固定的相位延迟，因此总的相位延迟 Γ 是此晶体引起的相位延迟以及电致相位延迟的总和。

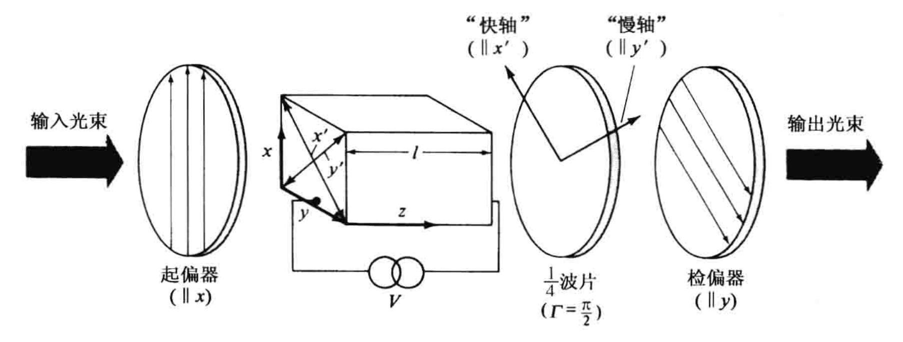


图 9.4　一个典型的电光振幅调制器，总相位延迟 Γ 是由"1/4 波片"引起的固定相位延迟（$\Gamma = \pi/2$）与由电光晶体本身引起的相位延迟之和

从晶体中出射的光束的偏振态可以由方程（9.2-5）给出。由于沿 y 轴方向的偏振存在，传输光束的幅度可以由以下简单的几何投影关系获得：

$$E'_{\text{out}} = \boldsymbol{E}_{\text{out}} \cdot \hat{\boldsymbol{y}} \tag{9.2-7}$$

利用

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{9.2-8}$$

可以得到

$$E'_{\text{out}} = -i \sin(\Gamma/2) \tag{9.2-9}$$

输出强度与输入强度之比为

$$\frac{I_o}{I_i} = \sin^2\left(\frac{\Gamma}{2}\right) = \sin^2\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{V}{V_\pi}\right] \tag{9.2-10}$$

方程（9.2-10）中的第二个等式是从方程（9.2-6）得到的。透射率（I_o/I_i）与外加电压的关系如图 9.5 所示。

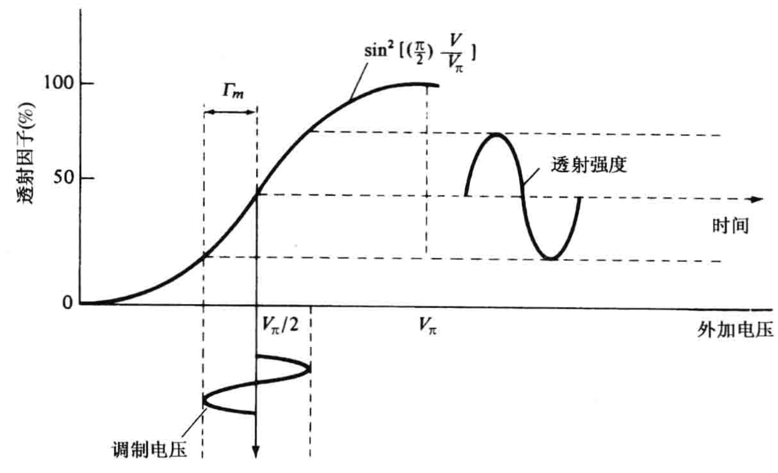


图 9.5　正交偏振电光调制器的透射率与外加电压的函数关系图。调制器被偏置在 $\Gamma = \pi/2$ 点上，使光强透射率为 50%。一个小的外加正弦电压围绕偏置点调制透射光强度

对光信号进行振幅调制的过程也在图 9.5 中予以说明。调制器通常以固定的相位延迟 $\Gamma = \pi/2$ 加偏压至 50% 透射率点处，该处斜率最大。这一偏压可以通过加大小为 $V = V_\pi/2$ 的外加电压获得；或者更为方便的，可以使用图 9.4 所示的自然双折射晶体，在 x' 和 y' 分量间引入 $\pi/2$ 的相位延迟。从图中可以看到，很小的正弦调制电压就可引起透射波的强度接近正弦的调制。

为了从数学上处理图 9.5 所描述的情况，可取

$$\Gamma = \frac{\pi}{2} + \Gamma_m \sin \omega_m t \tag{9.2-11}$$

式中相位延迟值取为 $\pi/2$，而 Γ_m 与调制电压 $V_m \sin\omega_m t$ 的振幅 V_m 有关，如式（9.2-6）所示，所以 $\Gamma_m = \pi(V_m/V_\pi)$。

利用式（9.2-10）可得

$$\frac{I_o}{I_i} = \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Gamma_m}{2}\sin\omega_m t\right) \tag{9.2-12}$$

$$= \frac{1}{2}[1 + \sin(\Gamma_m \sin\omega_m t)] \tag{9.2-13}$$

当 $\Gamma_m \ll 1$ 时，上式变为

$$\frac{I_o}{I_i} \approx \frac{1}{2}(1 + \Gamma_m \sin\omega_m t) \tag{9.2-14}$$

因此强度调制是调制电压 $V_m \sin\omega_m t$ 的线性复制。如果 $\Gamma_m \ll 1$ 的条件不能满足，则从图 9.4 或式（9.2-12）可见，光强变化会产生畸变，并将出现大量的高次（奇数的）谐波。畸变与 Γ_m 的依赖关系将在习题 9.3 中进一步讨论。

图 9.6 表示某一传输信号 $f(t)$（图中所示为一电唱机针的电输出）如何对激光束进行电光振幅调制，随后又由一个光探测器所检测。第 11 章中将详细讨论光探测器。

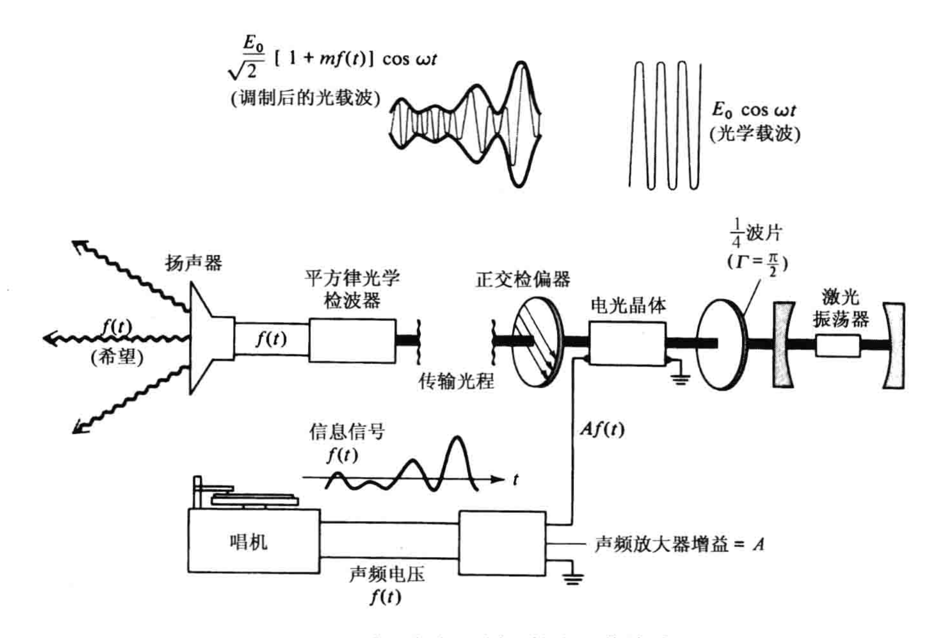


图 9.6　采用电光调制器的光通信线路

光的相位调制

从前一节的讨论可知，利用电光效应使光束的偏振态从线偏振变为椭圆偏振的调制是如何通过偏振器转变为光强度调制的。现在我们考虑图 9.7 所描述的情况，图中沿感生双折射轴（图 9.2 中的 x' 和 y'）没有相等的分量，入射光束的偏振方向平行于两轴之一，例如 x'。在这种情形下，外加电场并不改变光束的偏振态，而只改变出射光的相位

$$\Delta\varphi_{x'} = \frac{\omega}{c}\Delta n_{x'} l = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta n_{x'} l \tag{9.2-15}$$

其中 l 是晶体长度。从式（9.1-17）可得

$$\Delta\varphi_{x'} = \frac{\omega n_o^3 r_{63}}{2c} E_z l = \frac{\pi n_o^3 r_{63}}{\lambda} V = \pi \frac{V}{V_\pi} \tag{9.2-16}$$

如果外加电压是正弦的并可写成



$$V = V_m \sin \omega_m t \tag{9.2-17}$$

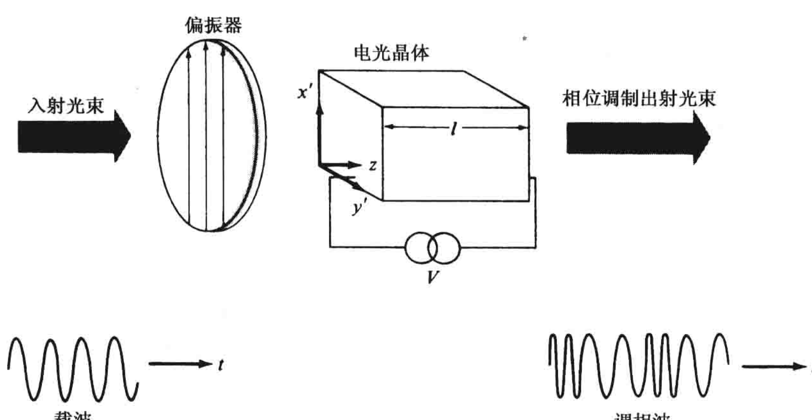


图 9.7　电光相位调制器。晶体取向和电压方向应满足 KDP 的要求。光偏振平行于电感应的介电主轴（x'）

于是在晶体入射表面（$z=0$）可以给出入射光场的表达式为 $E_{\text{in}} = A\exp(i\omega t)$，将会输出：

$$E_{\text{out}} = A \exp\left[i\left(\omega t - \frac{\omega}{c} n_o l - \frac{V_m}{V_\pi} \pi \sin \omega_m t\right)\right] \tag{9.2-18}$$

其中 l 是晶体的长度。略去恒定的相位因子，因为它对结果没有影响，将上式重写为

$$E_{\text{out}} = A \exp[i(\omega t - \delta \sin \omega_m t)] \tag{9.2-19}$$

其中

$$\delta = \frac{\omega n_o^3 r_{63} E_m l}{2c} = \frac{\pi n_o^3 r_{63} V_m}{\lambda} = \frac{V_m}{V_\pi} \pi \tag{9.2-20}$$

被称为调相指数，所以光场受到调相指数为 δ 的相位调制。如果引用贝塞尔函数恒等式

$$\exp(-i\delta \sin \omega_m t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\delta) \exp(-in\omega_m t) \tag{9.2-21}$$

可将式（9.2-20）重写成

$$E_{\text{out}} = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\delta) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega - n\omega_m)t} \tag{9.2-22}$$

此式给出了边频带内的能量分布，它是调相指数 δ 的函数。我们注意到，当 $\delta = 0$ 时，$J_0(0) = 1$ 且 $J_n(\delta) = 0$（$n \neq 0$）。另外有趣的一点是，由式（9.2-20）给出的调相指数 δ 是式（9.2-4）给出的相位延迟 Γ 的一半。

横向电光调制器

在前两节讨论的电光相位延迟的例子中，电场沿着光传播方向施加，即所谓的纵向调制。而更需要的工作方式是横向调制——外加电场垂直于传播方向，因为在该情况下，场电极不会妨碍光束的传播，而且通过选择长的晶体可以增加相位延迟（与电场强度和晶体长度的乘积成正比）。纵向调制的情况是，依据式（9.2-3），相位延迟正比于 $E_z l = V$，与晶体长度 l 无关。图 9.1 和图 9.2 中指出了如何利用 KPD 晶体得到横向相位延迟，实际装置如图 9.8 所示。光沿着 y' 方向传播，其偏振方向在 $x'z$ 平面内并与 z 轴成 45° 角。若沿 z 轴施加电场，由式（9.1-10）和式（9.1-12）可求得相位延迟为

$$\Gamma = \phi_{x'} - \phi_z = \frac{\omega l}{c}\left[(n_o - n_e) + \frac{n_o^3}{2} r_{63}\left(\frac{V}{d}\right)\right] \qquad (9.2\text{-}23)$$

式中 d 是沿着外加电场方向上晶体的尺寸。值得注意的是当外加电压值给定时，电光相位延迟与晶体长度成比例。总的相位延迟 Γ 包含一个与外加电压无关的项。这一点将在习题 9.2 中讨论。

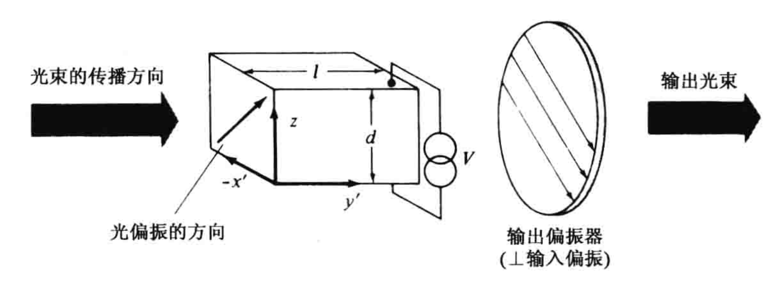


图 9.8　采用 KH_2PO_4（KDP）晶体的横向电光振幅调制器，其中电场方向与传播方向垂直

下面接着讨论用 $LiNbO_3$ 晶体制作的横向电光相位调制器（如图 9.9 所示）。该晶体按照其构造切割，因此外加电场沿着 c 轴方向（z 轴）。光束沿着 x 轴传播，其偏振方向平行于 z 轴。作上述选择是利用了 $LiNbO_3$ 晶体最大的电光系数 r_{33}。

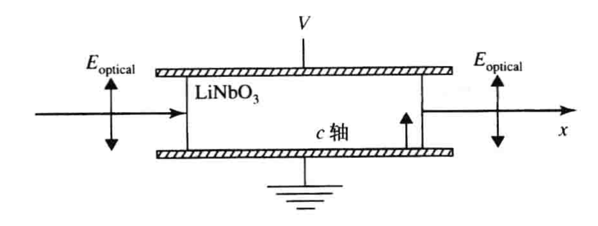


图 9.9　用铌酸锂（$LiNbO_3$）晶体制作的横向电光相位调制器结构图

依据式（9.1-27），主折射率为

$$\begin{aligned} n_x &= n_o - \tfrac{1}{2} n_o^3 r_{13} E \\ n_y &= n_o - \tfrac{1}{2} n_o^3 r_{13} E \\ n_z &= n_e - \tfrac{1}{2} n_e^3 r_{33} E \end{aligned} \qquad (9.2\text{-}24)$$

其中 E 沿着 z 轴的外加电场。对于沿着 z 轴方向偏振的光束，输出面上引起的相移为

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} n_z l = \frac{2\pi}{\lambda}\left(n_e - \frac{1}{2} n_e^3 r_{33} \frac{V}{d}\right) l \tag{9.2-25}$$

注意到：当给定外加电压值时，电光相移与晶体长度成比例。能提供大小为 π 的调相指数的半波电压在本例中具有如下表达式

$$V_\pi = \frac{\lambda}{n_e^3 r_{33}} \frac{d}{l} \tag{9.2-26}$$

其中 l 是耦合长度。若选择更小的电极间隔 d，使相互作用的长度更长，可以获得更小的半波电压。实际上，电极间的间隔受到光束尺寸和衍射问题的限制。这就是为什么导波能在电光调制中起到重要作用的原因。在介质波导中，横向尺寸在波长数量级，没有衍射的问题。接下来，我们将讨论使用马赫－曾德干涉测量法的横向调制器的波导类型。

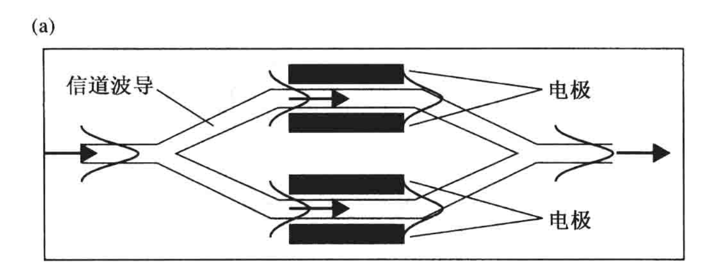
马赫－曾德干涉仪调制器

在光通信中，大多数外部电光调制是通过在光路中使用马赫－曾德干涉仪完成的。参考图 9.10，我们考虑某一马赫－曾德干涉仪的波导类型。制作特殊波导电路时，可以用第 3 章中讨论过的各种技术，例如，在铌酸锂晶片上生成钛掺杂的信道波导电路。信道波导经过 Y 形结线后分成两路。电极置于信道波导两侧的晶片表面。当有外加电压存在时，产生的电场平行于表面且横跨波导。相移与外加电压成比例。沿着电极，波导内的光束经过第二个 Y 形结线重新混合。输出强度与混合场的平方成比例

$$I_{\text{output}} \propto \left| \frac{1}{\sqrt{2}} E \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi_1} + \frac{1}{\sqrt{2}} E \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi_2} \right|^2 = \tfrac{1}{2}(1 + \cos \Delta\Phi) I_{\text{input}} \tag{9.2-27}$$

其中 I_{input} 和 I_{output} 分别为输入和输出光强，$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ 为两个干涉臂间的相对相移。在操作时，可以通过控制跨于其中某一波导两侧的一组电极获得固定的偏压，控制另一波导两侧的一组电极产生信号调制电压。

(a)



(b)

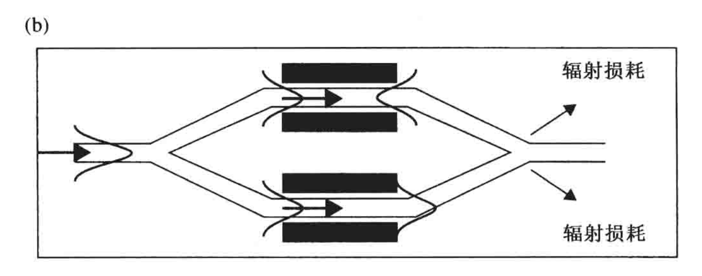


图 9.10 马赫－曾德干涉调制器的顶视图。(a) 同相光束再混合。(b) 不同相光束再混合

我们注意到在 Y 形结线处两束光重新混合，输出光强依赖于两束光之间的相差。当两束光同相（$\Delta\phi = 0$）时，混合场分布与波导模式匹配得很好。因此，混合场通过结线处时损耗很小。相反，当两束光不同相（$\Delta\phi = \pi$）时，混合场关于波导中线平面奇对称，因此在结线处将正交于波导基模且不会激发它。但是混合场将会激发无约束的辐射模式，导致通过结线处后波导内零输出。因此，控制电极处的电压，该干涉仪就可以用于信道波导内激光束的外部电光调制。

例：波导调制器内的半波电压。

以横向尺寸为 $d = 10\mu m$，耦合长度 $l = 5cm$ 的信道波导为例。由表 9.2，取 $n_e = 2.2$，$r_{33} = 30pm/V$。则当 $\lambda = 1.5\mu m$ 时，其半波电压为

$$V_\pi = \frac{\lambda}{n_e^3 r_{33}} \frac{d}{l} = 0.94V$$

9.3　高频调制的考虑

在前面几节的讨论中，我们推导了由低频电场引起的相位延迟的表达式。但在许多实际情形中，调制信号的频率通常很高，而且为了利用激光器的宽带频谱，调制信号常占有很宽的带宽。本节将讨论在某些典型实验情况下，限制最高可用调制频率的若干基本因素。首先讨论图 9.11 描述的情形。

电光晶体被放置在两个电极之间，频率为 $\omega_0 / 2\pi$ 的调制电场加到电极上。R_s 是调制源的内阻，C 代表电光晶体的平行板电容。如果 $R_s > (\omega_0 C)^{-1}$，大部分调制电压降加于 R_s 上，因为它对相位延迟并没有贡献，从而造成浪费。解决这个问题的办法是使晶体的两端并联一电感 L 使晶体电容与电感谐振[即 $\omega_0^2 = (LC)^{-1}$]，如图 9.11 所示。另外加一分流电阻 R_L，所以当 $\omega = \omega_0$ 时，并联的 RLC 电路的阻抗是 R_L，其值应选得比 R_s 大，则大部分调制电压将加于晶体两端。谐振电路具有有限的带宽，即电路只有在频率间隔 $\Delta\omega / 2\pi = 1 / 2\pi R_L C$（中心频率为 ω_0）内是高阻抗。因此如果要达到调制场与调制信号一样没有什么畸变，则最大的调制带宽（调制信号占据的频谱）必须小于

$$\Delta\nu = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \approx \frac{1}{2\pi R_L C} \tag{9.3-1}$$

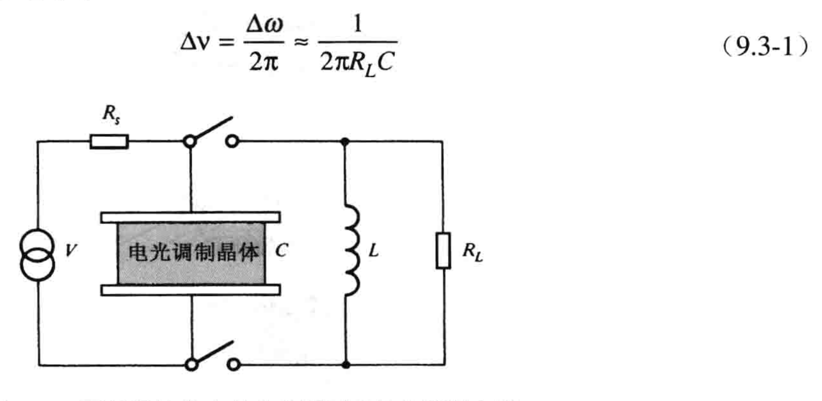


图 9.11　平行板结构中的电光调制晶体的等效电路

在实用上，调制带宽的大小 $\Delta\omega/2\pi$ 取决于具体应用。另外，还需要有一个确定的峰值相位延迟（或者相移）Γ_m。利用式（9.2-3）使 Γ_m 和峰值调制电压 $V_m=(E_z)_m L$ 联系起来，借助于式（9.3-1），可以证明为获得峰值相位延迟 Γ_m，KDP 类型晶体所需的功率与调制带宽 $\Delta\nu=\Delta\omega/2\pi$ 之间的关系是

$$P=\frac{\Gamma_m^2\lambda^2 A\varepsilon\,\Delta\nu}{4\pi L n^6 r_{63}^2} \tag{9.3-2}$$

其中 n 是有效折射率，L 是晶体内的光程，A 是垂直于 L 的晶体的截面积，ε 是调制频率为 ω_0 时的介电常数。

渡越时间对高频电光调制的限制

根据式（9.2-3），电场 E 所引起的电光相位延迟可写为

$$\Gamma=\frac{\omega}{c}n^3 r_{63}EL\equiv\alpha EL \tag{9.3-3}$$

式中 $\alpha=\omega n^3 r_{\text{eff}}/c$，$\omega$ 是光束的频率，r_{eff} 是有效电光系数，L 为晶体中的光程长度。如果在光穿过晶体的渡越时间 $\tau_d=nl/c$ 内，电场 E 的变化是略微的，就应该用下式来代替式（9.3-3）

$$\Gamma=\alpha\int_0^L E(z)\,\mathrm{d}z=\alpha\frac{c}{n}\int_{t-\tau}^{t}E(t')\,\mathrm{d}t' \tag{9.3-4}$$

其中 c/n 是调制媒质中的光速，$E(t')$ 是瞬时电场。上式的第二个积分是用对时间积分来代替对 z 积分，即认为在时刻 $t+\tau$ 时部分波到达出射面 $z=l$，而进入晶体的时刻为 t。此外假设在任意给定时刻，整个晶体有着相同的电场 $E(t)$ 值。若 $E(t')$ 呈正弦式变化

$$E(t')=E_m\cos(\omega_m t')$$

其中 ω_m 是调制频率。从式（9.3-4）可得

$$\Gamma=\alpha\frac{c}{n}E_m\int_t^{t+\tau}\cos(\omega_m t')\,\mathrm{d}t'=\Gamma_0\left(\frac{\sin(\omega_m\tau/2)}{\omega_m\tau/2}\right)\cos(\omega_m t+\omega_m\tau/2) \tag{9.3-5}$$

式中 $\Gamma_0=\alpha(c/n)\tau E_m=\alpha l E_m$ 为相移（或者相位延迟），它会在 $\omega_m\tau\ll 1$ 时出现。缩减因子

$$\eta=\frac{\sin(\omega_m\tau/2)}{\omega_m\tau/2} \tag{9.3-6}$$

表示由于有限的渡越时间而引起相移（或者峰值相位延迟）的减少。当 $\eta\approx 1$（如无减少的情况），就必须满足 $\omega_m\tau\ll 1$ 的条件，所以渡越时间必须小于最短的调制周期。系数 η 的变化曲线示于图 9.12。

如果选取最高的可用调制频率，对于此频率有 $\omega_m\tau=\pi/2$（根据图 9.12，在该点上 $|\eta|=0.9$），并利用关系式 $\tau=nL/c$，可得

$$(\nu_m)_{\max}=\frac{c}{4nL} \tag{9.3-7}$$

对 KDP 晶体（$n=1.5$），若取 $L=1\text{cm}$，则有 $(\nu_m)_{\max}=5\times10^9\,\text{Hz}$。

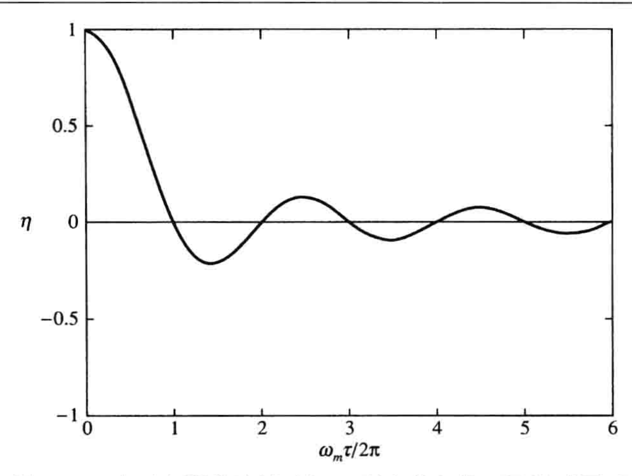


图 9.12　由于有限的渡越时间 τ_0 引出的相位延迟缩减因子

行波调制器

若调制信号以行波形式工作[2]，原则上就可以克服渡越时间限制，如图 9.13 所示。如果光场和调制场的相速度相等，任意给定的光波阵面将有相同的瞬时电场，该瞬时电场与入射面处的光场有关。当光波阵面在晶体中传播时，先前讨论过的渡越时间问题就消除了。这类调制方法主要用于上节中所讨论的横向几何结构，因为在大多数传播结构中 RF（射频）场是以横向场为主的。

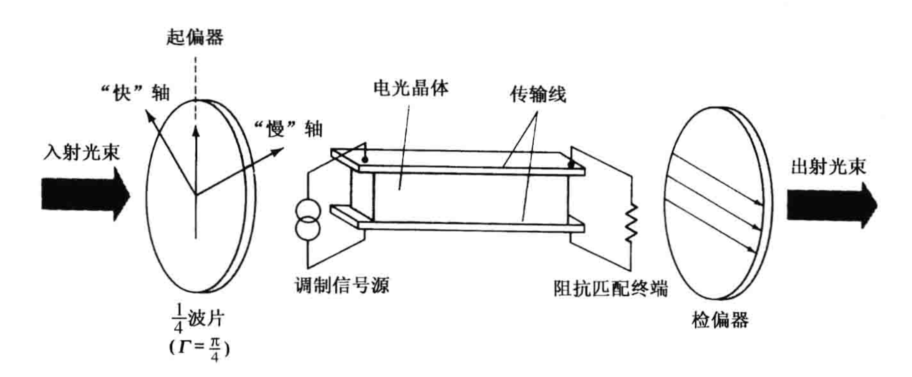


图 9.13　行波电光调制器

考虑在 $z = 0$，时间为 t 时进入晶体的一个光波阵面元，在稍后的时刻 t' 该面元的位置 z 为

$$z(t') = \frac{c}{n}(t' - t) \tag{9.3-8}$$

式中 c/n 是光场的相速度，该面元引起的相位延迟类似于式（9.3-4），可表示为

$$\Gamma = \alpha \frac{c}{n} \int_{t}^{t+\tau} E[t', z(t')]\mathrm{d}t' \tag{9.3-9}$$

式中 $e[t', z(t')]$ 是与波阵面一起行进的观察者所看到的瞬时调制场。将行波的调制场取为

$$E(t', z) = E_m \cos(\omega_m t' - k_m z) \tag{9.3-10}$$

其中 E_m 是常量，ω_m 是调制频率，k_m 是行波调制场的波数。利用式（9.3-8）可得

$$E(t', z) = E_m \cos[\omega_m t' - k_m (c/n)(t' - t)] \tag{9.3-11}$$

已知 $k_m = \omega_m / c_m$，c_m 是调制场的相速度。将式（9.3-11）代入式（9.3-9）并完成积分，有

$$\Gamma = \Gamma_0 \left(\frac{\sin[\omega_m \tau(1 - c/nc_m)/2]}{\omega_m \tau(1 - c/nc_m)/2} \right) \cos[\omega_m t + \omega_m \tau(1 - c/nc_m)/2] \tag{9.3-12}$$

式中 $\Gamma_0 = \alpha L E_m = \alpha (c/n) \tau E_m$ 是直流电场 E_m 引起的相位延迟。

行波调制器的折减系数的表达式就可以写成

$$\eta = \frac{\sin[\omega_m \tau(1 - c/nc_m)/2]}{\omega_m \tau(1 - c/nc_m)/2} = \frac{\sin[\omega_m \tau(\Delta n/n)/2]}{\omega_m \tau(\Delta n/n)/2} \tag{9.3-13}$$

其中 $n_m = c/c_m$ 是调制场的折射率，$\Delta n = (n - n_m)$。注意到折减系数与集总常量调制器的表达式（9.3-6）有着相同的形式，只不过 τ 由 $\tau \Delta n / n$ 代替。若使两者相速度相等，可以得到 $\Delta n = 0$，于是 $\eta = 1$，就可获得相位延迟的最大值，而与晶体的长度无关（或者渡越时间 τ）。这是在调制器中调制场（微波）和光束以相同的相速传播的情况。

为了求得最大的可用调制频率和最大的调制深度，把式（9.3-12）改写成

$$\Gamma = \delta \cos\left(\omega_m t + \omega_m \Delta n \frac{L}{2c} \right) \tag{9.3-14}$$

其中 $\Delta n = (n - n_m)$，δ 是调制深度具有如下表达式

$$\delta = \frac{2c\alpha E_m}{\omega_m \, \Delta n} \sin\left(\omega_m \, \Delta n \frac{L}{2c} \right) \equiv \delta_{\max} \sin\left(\omega_m \, \Delta n \frac{L}{2c} \right) \tag{9.3-15}$$

其中 $\delta_{\max}$ 是最大的调制深度

$$\delta_{\max} = \frac{2c\alpha E_m}{\omega_m \, \Delta n} = \frac{\omega}{\omega_m \, \Delta n} n^3 r_{\text{eff}} E_m \tag{9.3-16}$$

注意：调制深度 δ 是晶体长度 L 的正弦函数。最大的调制发生于 $\omega_m \Delta n L / 2c = \pi / 2$，依据式（9.3-15），晶体长度为

$$L = \frac{\pi c}{\omega_m \, \Delta n} = \frac{\lambda_m}{2\Delta n} \tag{9.3-17}$$

其中 λ_m 是调制场的波长，$\Delta n = (n - n_m)$。

利用推导式（9.3-7）的方法，令 $\omega_m \tau(1 - c/nc_m) = \pi/2$，则得到最高可用调制频率为

$$(\nu_m)_{\max} = \frac{c}{4L(n - n_m)} = \frac{c}{4L \, \Delta n} \tag{9.3-18}$$

与式（9.3-7）相比可以看出，频率界限增加或者可用晶体长度多乘了因子 $n_0 / \Delta n$。依据式（9.3-16）和式（9.3-18），高的调制深度在高频运行时需要与行波调制器速度匹配。关于行波电光调制器的设计问题可以参考文献[3~5]。对于电光调制包括行波和高频的例子的更多细节，读者可参考文献[6]。

9.4　电吸收和电吸收调制器

电吸收是半导体中的一种现象，外加电场可以引起线性吸收系数的改变。特别的，弗兰

兹一凯耳迪什效应（FKE）是在外加电场作用下半导体吸收域边缘向长波长处位移（常常叫红移）的现象。当电场作用于半导体时，电子的能带是倾斜的，倾斜度即为电场（V/cm）。由于倾斜，电子的波函数不再是正弦函数。事实上，电子的波函数变为艾里函数，如图 9.14 所示。电子进入经典禁区的概率为有限概率，在该区域内其能量小于势能（见图 9.14）。这就减少了有效能带 $(E_g)_{\text{eff}}$ 。由于倾斜的程度与外加电场大小有关，在强外加电场作用时有效能带变得很小。

能带的减少量可以按照以下方法估算，见图 9.14，考察电子从价带到导带的渡越过程。由于倾斜的原因，波函数变成了艾里函数。这些波函数进入带隙后其拖尾呈指数衰减。因此传输速率作为 $(E_{\text{gap}}-h\nu)^{3/2}/qE$ 的函数呈指数衰减，E 是外加电场，$h\nu$ 是光子能量。当传递速率降到其峰值点处的 1/e 时的光子能量为有效能带。因此得到

$$\Delta E_g = \frac{(3)^{2/3}}{(m^*)^{1/3}}(q\hbar E)^{2/3} \tag{9.4-1}$$

其中 E 是外加电场，m^* 是电子的有效质量，q 是电子电荷。光子能量在能带边缘附近，弗兰兹一凯耳迪什效应引起了吸收系数的增加。在弗兰兹一凯耳迪什效应中，当电场从 0 变化至数百 kV/cm 时，总的吸收系数的改变为几百 1/cm。

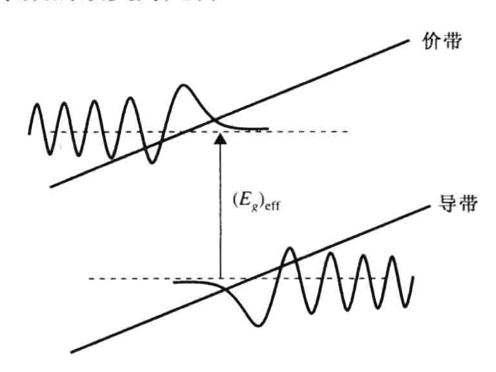


图 9.14　半导体中的弗兰兹一凯耳迪什效应（FKE）示意图。
进入禁带区域后载波的波函数变为艾里函数

可以基于 FKE（即所知的电吸收效应）来制造光调制器。这类电吸收调制器（EAMs）可以通过控制外加电场改变吸收系数，进而控制光强。因为在某些半导体中吸收系数能够随着外加电场剧烈地改变，所以 ESMs 是非常有效的而且尺寸可以做到很小。当电光调制器数厘米长时，ESMs 的长度一般为 200μm 左右。EAMs 的另一个优势就是和光源集成比较容易，因为激光二极管和 EAMs 都是基于很相似的材料和结构之上的（例如：基于 InP ）。

参考图 9.15，考虑工作波长为 λ_0 的光束传播的情况。没有外加电场时，线性吸收系数为 α_0（一般为 10cm^{-1} 左右）。如果有外加电场（一般取 10^3 V/cm ）时，吸收系数将会增加到 α_1（一般为 10^3 cm^{-1} 左右）。实际透射的改变将依赖于穿过调制器的波程长度。因为透射是波程长度的指数函数，调制比可以写为

$$\frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{e^{-\alpha_0 L}}{e^{-\alpha_1 L}} \tag{9.4-2}$$

其中 L 是调制器中的光程。

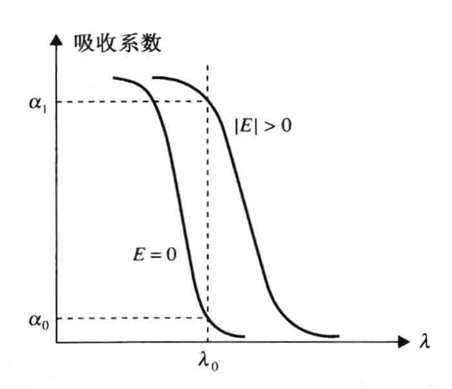


图 9.15　半导体中的弗兰兹－凯耳迪什效应导致能带边缘的位移（红移）。
对于能带边缘附近的工作波长（λ_0），外加电场导致吸收系数的增加

有效的光调制器，要求在无外加场时具有最小的吸收（$\alpha_0 L \ll 1$）而有外加电场时具有大的吸收（$\alpha_1 L \gg 1$）。为了获得上述性能，要求所选材料的能带（E_g）比载波光束的光子能量大。能带处于 1.3 或 1.55μm 范围内的最常用的材料是 InP 基底的半导体。

电吸收调制器也可以基于量子约束斯塔克效应（QCSE）。QCSE 是在量子阱中其能级可能随着外加电场而发生移位的一种现象。能级的移位和波函数导致吸收系数的改变类似，也与折射率类似。关于量子阱，将在 16 章中详细讨论（有关量子阱半导体激光器），通过半导体材料体制中的夹层可以方便地制成量子阱，在外延晶体生长时，薄的（典型的厚度为 10～100 Å）半导体激光器处于两个半导体之间，而这两个半导体的能带比薄层的能带要大。在界面处导带或者价带的不连续（有时也称为能带偏移）构成了势垒，这样就使得载流子（导带中的电子和价带中的空穴）在量子势阱中被捕获，例如 AlAs-GaAs-AlAs，或者 InP-InGaAs-InP。如果 AlAs 首先生长，其次是 GaAs 薄层，然后是另外一层 AlAs，那么 AlAs-GaAs-AlAs 这种夹层结构就构成了量子阱。为了能使 QCSE 在光调制器中生效，导带和价带中的量子势阱在空间上必须和 AlAs-GaAs-AlAs 或者 InP-InGaAs-InP 的情况（这个叫做类型 I 异质结）相一致。为了增强这种效应，常使用多个量子阱。当生成多个量子阱时，两个阱之间的势垒材料（上面例子中的 AlAs 或者 InP）应该足够厚，这样经过量子力学隧道作用，相邻的两个阱之间的耦合就可以忽略。在每个量子阱内，这类耦合可能会导致量子化的能级展宽（或者引起能级分裂其形成子能带）。当势垒层足够厚时，相邻量子阱之间的耦合可以忽略，那么这组量子阱就称为多量子阱（MQWs）。

多数 EAMs 是基于在肖特基二极管或者 PIN 结构上加反向偏压。当 PIN 二极管处于反向偏压下，几乎所有的电压降都落在本征层，因为它的电导率最低（因此有最高的阻抗）。结果，弗兰兹－凯耳迪什效应在本征层最为有效。如果激光束在本征层传输，那么 EAM 可以通过调制电压得到。图 9.16 给出了基于肖特基二极管或者 PIN 结构的 EAMs 示意图。本征层的厚度通常很薄，这样在较小的外加电压作用下就可以获得强电场。这限制了光束的光斑尺寸。小的光斑尺寸导致了因为衍射而出现的光束展宽。这一问题可以通过使用波导结构限制光束传播来解决，同时获得强电场。

与二极管一样，EAM 处于反向偏压时具有电容特性，该电容特性由器件尺寸和本征层的厚度决定。该电容可用平行板电容器的公式近似地计算。由于电容器能存储电荷，使得由

电压源驱动的电路响应有延迟。含有串联电阻 R 和电容器 C 的电路中的时间常数由 RC 给出。因此电容越大，驱动信号电路响应越慢。因而对于高速运行，器件尺寸应该更小而本征层的厚度不能太薄。除去考虑器件速度外，也必须考虑 EAM 的调制效率问题。对大多数应用而言，调制效率是根据输出强度与电压调制相对比值来衡量的。在数字应用中（例如对于远距离通信），如果调制效率很好，那么较小的电压就能改变光强使得它从开态变化到断开状态，反之亦然。在实际的 EAM 设计时，折衷方案就是确定本征层的厚度，使得 RC 时间常数和调制效率都能满足要求。

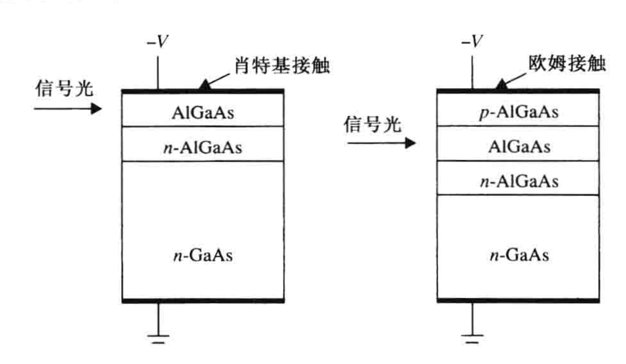


图 9.16　基于肖特基二极管或者 PIN 结构的 EAMs 的示意图

9.5　液晶中的电光效率

液晶是物质的一种状态，是处于结晶固体与非晶液体之间的媒质。它也可被看作一种分子有序排列存在的液体。液晶在有机物质中形成需要一定条件，它具有各向异性分子——棒状分子或者扁平分子。各向异性分子排序的直接结果就是各向异性的力学性能、电导性能、磁导性能、光学性能。该物质较好的一个实例是 hexy1-cyanobipheny1（也就是 6CB），在 15℃＜T＜29℃ 温度范围内，它是最简单的液晶相类型（向列型）。在这一温度范围内，6CB 常表现为乳状。乳状现象是由于介质中存在多重晶域，引起光散射的结果。当 6CB 在室温下加热，于 $T = 29$℃ 时发生向列至各向同性的转变。该材料“忽然就变得完全清亮”。6CB 具有如下棒状分子结构：

C_6H_{13}—⟨苯环⟩—⟨苯环⟩—CN

包含两个苯环和两个端基。在向列相中，仅分子的长轴具有统计最佳取向。

一般的，存在三种液晶相，即近晶相、向列相、胆甾相。为了更明确，我们假设液晶由棒状分子构成。图 9.17（a）图解了近晶相，它是一维直线、定向排列存在的。分子轴的本地平均取向即定向偶极子。图 9.17（b）给出向列相的示意图，在向列相中只有分子轴的长程定向排列。胆甾相也属于液晶的向列类型，除非它由手征性分子组成。因而，该结构关于垂直于定向偶极子的螺旋轴自发呈螺旋形。该螺旋形依赖于手征性分子，可能右旋或者左旋。图 9.17（c）给出了胆甾相晶体若干平面上分子的分布状态示意图，这些平面都垂直于螺旋轴。注意：液晶在每个垂直平面上均为向列相。

在结构上近晶型液晶是最接近于固晶的。有趣的是，从本质上无论向列相还是近晶相，

在温度上升时相的改变次序均为

固晶⟶近晶型液晶⟶向列型液晶⟶各向同性晶体

尽管近晶相具有最高的有序度，在电光应用中用得最多却是向列相和胆甾相。在向列相中，如果取向存在于不同的晶域，媒质可能表现为乳白色。仅当长程有序时，向列液晶的全部媒质才是清亮的。处于向列至各向同性的相变温度时，媒质各向同性，而且看起来清亮和透明。因此这一温度也就是所熟悉的清亮点。下面我们会讨论由取向不同引出的许多不同的物理特性。

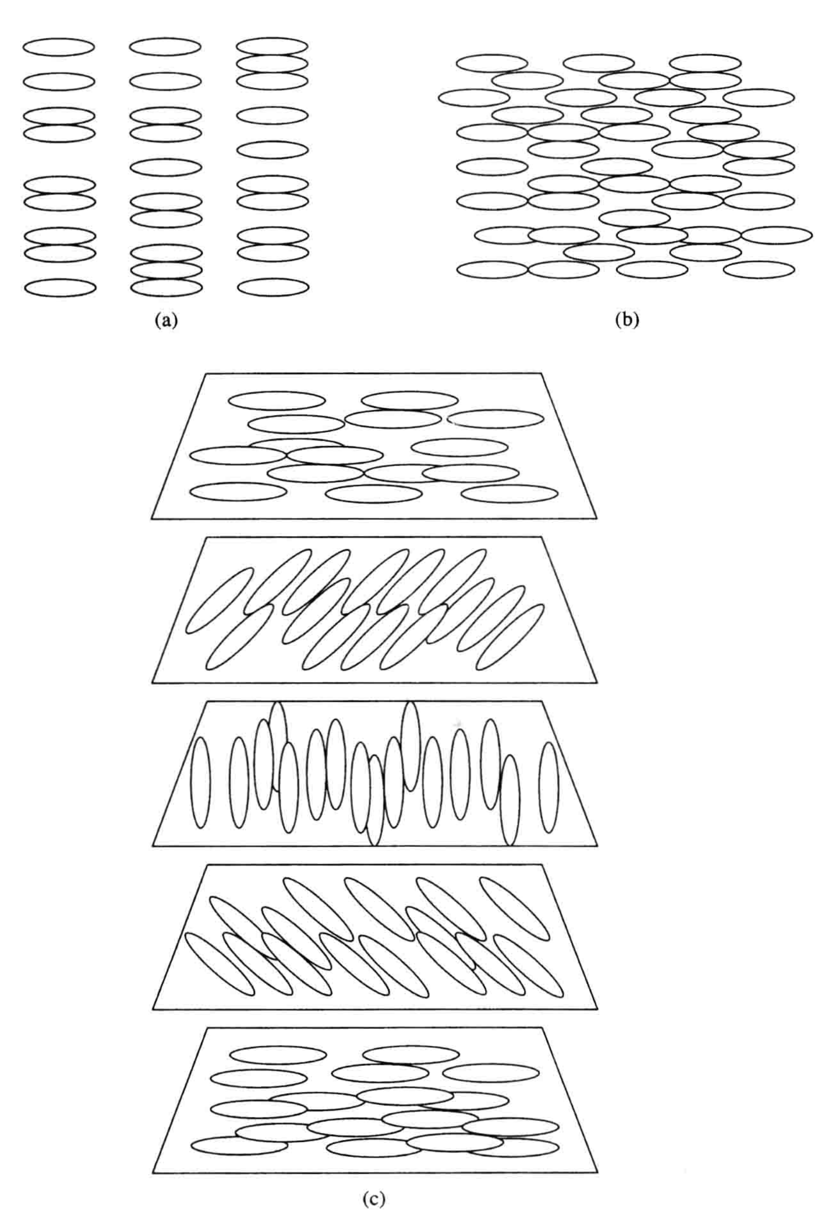


图 9.17　液晶相：（a）近晶相，（b）向列相，（c）胆甾相。
如图所示，胆甾相中的偶极子沿螺旋状旋转

取向参数

在向列相中，分子是棒状的，分子长轴大致平行于相邻分子的长轴并排成一行。因此在媒质中的任何一点处，我们可以定义一矢量 $\boldsymbol{n}$ 代表直接相邻点的平均取向。这一矢量就是定向偶极子。在均匀的向列相液晶中，定向偶极子在整个媒质中都是常量。在非均匀向列相液晶中，定向偶极子 $\boldsymbol{n}$ 从点到点发生改变，一般是空间（x，y，z）的函数。如果我们定义一个单位矢量代表每个分子的长轴，那么定向偶极子 $\boldsymbol{n}$ 是围绕在点周围的小体积元的单位矢量的统计平均。

液晶的取向参数 S 定义为

$$S = \frac{1}{2}\langle 3\cos^2\theta_m - 1\rangle \tag{9.5-1}$$

其中 θ_m 是每个分子的长轴与定向偶极子 $\boldsymbol{n}$ 间的夹角，角括号代表统计平均。对于精确平行排列的情况，S=1；对于完全随机取向的情况，S=0。在向列相中，取向参数 S 具有中间值，其与温度紧密相关。很明显当 S=0 时处于清亮点。在低温时，取向参数 S 的典型值为 0.6～0.4。当接近清亮点时，取向参数 S 忽然降低至 0。取向参数 S 的值也与分子的结构有关。实验观察表明环己胺环比芳香族呈现更高的 S 值。S>0 的向列相液晶媒质表现出单轴对称的光学双折射。

介电常数

因为棒状分子的定向排列，近晶相和向列相液晶是单轴对称的，其对称轴平行于分子轴（定向偶极子 $\boldsymbol{n}$）。单轴对称使得介电常量的值沿着首选的轴（$\varepsilon_\parallel$）变化，正交于轴（$\varepsilon_\perp$）。介电各向异性定义为

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp \tag{9.5-2}$$

介电各向异性$\Delta\varepsilon$的符号和量级在电光应用中最为重要。举例说明，我们假设均匀的向列相液晶中，外加电场沿着 z 轴。各向异性使得分子的磁偶极矩与外加电场不平行，分子轴平行或者垂直于电场的情况例外。引起的净转矩使得沿着电场方向的大多数棒状分子趋于排成直线。宏观的静电能可以写成

$$U = \frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E} \tag{9.5-3}$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 是电场矢量，$\boldsymbol{D}$ 是变位场矢量。在均匀介质中，变位场矢量 $\boldsymbol{D}$ 与液晶取向无关。令θ为定向偶极子与 z 轴间的夹角。变位场矢量的 z 分量可以写作

$$D_z = (\varepsilon_\parallel \cos^2\theta + \varepsilon_\perp \sin^2\theta)E \tag{9.5-4}$$

因此静电能可以写成

$$U = \frac{1}{2}\frac{D_z^2}{\varepsilon_\parallel \cos^2\theta + \varepsilon_\perp \sin^2\theta} \tag{9.5-5}$$

对于正的介电各向异性液晶（$\varepsilon_\perp<\varepsilon_\parallel$），$\theta$=0 时静电能最小，此时定向偶极子与外加电场平行。

在经典介电理论中，宏观的介电常量与分子极化度相对应。对于棒状分子，纵向极化度（平行于分子轴）通常比横向极化度（垂直于分子轴）大。因此即使在非极性的棒状分子液

晶中，介电各向异性也是正的（$0<\Delta\varepsilon$）。在极性液晶混合物中，由于永久性偶极子矩而在介电常量中引入了附加量。依赖于偶极子矩和分子轴之间的角度，偶极子的贡献可以引起$\Delta\varepsilon$的增加或者减小，最终导致$\Delta\varepsilon$为一负值（如 MBBA）。实际上，介电各向异性在$-2\varepsilon_0$和$+15\varepsilon_0$之间变化。各向异性大的液晶混合物可以通过代替特殊位置上的强的极性基（比如氰化物基）而合成。介电各向异性也依赖于温度，在清亮点时其数值忽然接近 0。在清亮点以上时，介电常量为介电常量均值

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{\parallel} + 2\varepsilon_{\perp}}{3} \tag{9.5-6}$$

折射率和双折射

在玻璃瓶中，向列型液晶常常表现为不透明的乳状液体。光的散射是由于样品的折射率随机波动引起的。由于没有恰当的边界来定义所选择的排列方向，样品包含许多向列型液晶的域。各个域的边界处折射率的不连续是引起散射呈现乳状的主要原因。在恰当处理下（例如，在玻璃衬底上摩擦调整层），就可以获得定向偶极子统一排列的向列型液晶平板。这些样品显示了单轴光学对称性具有两种主要折射率 n_o 和 n_e。寻常折射率 n_o 对应于电场偏振垂直于定向偶极子的光，非寻常折射率 n_e 对应于电场偏振平行于定向偶极子的光。双折射（或者光的各向异性）定义为

$$\Delta n = n_e - n_o \tag{9.5-7}$$

如果 $n_o<n_e$，液晶就为正的双折射；反之，如果 $n_o>n_e$ ，液晶就为负的双折射。在经典介电理论中，宏观折射率与某一光频率上的分子极化度有关。光学各向异性主要是由于各向异性的分子结构。由棒状分子组成的液晶大多数呈现正的双折射，在 0.05～0.45 的范围变化。光学各向异性对液晶中光的偏振态改变起主要作用。

液晶中存在很多电光效应。这类电光效应大多数包含了在外加电场作用下，它们光学性能的转变。由于介电各向异性，在外加静电场作用下液晶中的分子受到转矩作用，它们趋向于静电能最小的方式重新取向。如果在边界处的液晶分子通过表面处理后（例如经过摩擦）沿着确定的方向固定，液晶取向的分布就取决于静电力（或者转矩）与弹性力之间的平衡。尽管液晶的光学特性为各向异性，液晶中分子取向的任何改变都很容易用肉眼观察到。时间常数受液晶中分子重新取向的影响，其量级是 10^{-3}s，依赖于材料的粘滞度。

令θ为定向偶极子 $\boldsymbol{n}$（或者液晶的光轴）与液晶中传播的光束方向之间的夹角。从光束中看到的非常折射率定义如下，根据方程（1.8-3）

$$\frac{1}{n_e^2(\theta)} = \frac{\cos^2\theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2\theta}{n_e^2} \tag{9.5-8}$$

其中 n_o 和 n_e 分别是液晶的寻常折射率和非寻常折射率。既然这样，这两种传播模式间的相位延迟如下式所示

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda}[n_e(\theta) - n_o]d \tag{9.5-9}$$

其中 d 是液晶盒内的互相作用长度。

在大多数情形，定向偶极子的取向θ是液晶盒内位置 z 的函数，这是由于表面对准处理边界条件的结果。此时，相位延迟由下式给出

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda}\int_0^d [n_e(\theta) - n_o]\,\mathrm{d}z \qquad (9.5\text{-}10)$$

在大多数例子中，定向偶极子的取向θ既是液晶盒内位置的函数，也是外加电场强度的函数。在强电场的例子中，定向偶极子几乎平行于外加电场的方向。当去除电场后，定向偶极子的取向θ恢复为其初始方向。还原恢复是由于存在液晶媒质的弹性恢复力。在大多数液晶盒内，由于存在校准层，单元表面的定向偶极子是固定于表面的。远离表面的定向偶极子依据外加静电场而重新取向。实际的定向偶极子分布$\theta(z)$取决于液晶单元内最小的总自由能。在大多数液晶盒内，自由能是弹性势能和静电能的总和。在某些例子中，定向偶极子的取向θ能够通过电调谐从 0 变化至$\pi/2$。因此适当取向的液晶薄层的相位延迟能够随着外加电场从 0 变化到$\Gamma=2\pi(n_o-n_e)d/\lambda$。在大多数例子中，相位延迟可以连续变化。在液晶盒内的相位延迟的电调谐可以应用于很多光电器件，包括应用于光网络中的调制器和可调谐滤光器。图 9.18 给出了这种光电相位延迟单元的示意图。

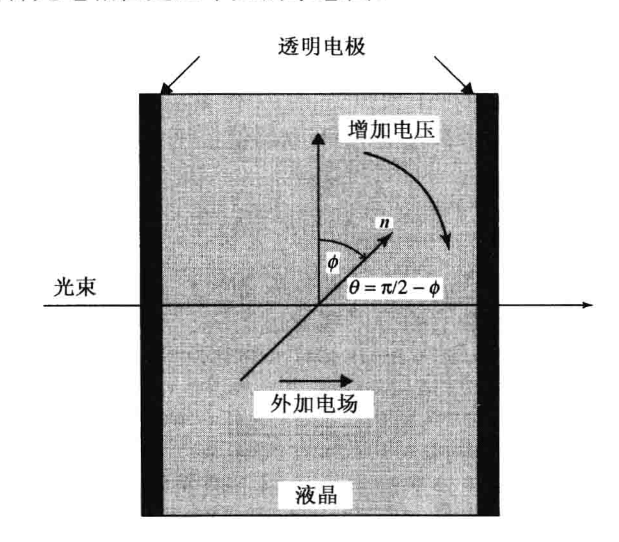


图 9.18　在平行于光束传播方向的外加电场作用下的液晶盒的示意图。无外加电场作用时，定向偶极子垂直于光束的传播方向。随着场强的增加，位于单元中心的定向偶极子向外加电场的方向倾斜。这就导致相位延迟的改变。角度ϕ是外加电压的增函数

扭曲向列液晶盒

向列液晶层中的某一薄层，该薄层的定向偶极子平行于表面。此薄层可以按照如下方式发生扭曲：定向偶极子的取向按照 z 的函数发生变化。这常通过表面边界的校准处理（比如摩擦）来完成。在扭曲的向列液晶盒内，两个表面的校准方向是不同的。液晶的定向偶极子常常固定于某个方向，该方向平行于校准方向。因此，就获得了扭曲向列液晶盒。在某一线性扭曲液晶中，定向偶极子的方位角是 z 的线性函数

$$\psi = \alpha z \qquad (9.5\text{-}11)$$

其中α是常量。

光束在线性扭曲的各向异性媒质中的传播已经经过了多重处理。可以证明：其偏振面平行或者垂直于本地定向偶极子的线性偏振光，在媒质中传播时，将与本地定向偶极子保持

“固定”，这就使得扭率α较小（比如：$\alpha \ll 2\pi(n_e-n_o)\,d/\lambda$）。换而言之，这种线性偏振光的偏振面将和定向偶极子以相同的方式发生转动。这就是所熟知的在液晶显示中的“波导传播”。类似的现象常常被曲解为光的旋光本领。

对于电光应用，扭转角为 90° 向列液晶常常包含在内。液晶盒位于一对平行的偏振器之间，在入射面上，该偏振器的传播轴平行于定向偶极子。这种结构不透光（即通常的黑态），除非存在外加场。电场（轴向的）趋于沿着场方向（z 轴）调整本地定向偶极子，由于双折射消失引起光的传播。利用琼斯矩阵法，通过处在平行偏振器之间的 90° 扭曲向列液晶盒后的透射可以写成

$$T = \frac{\sin^2\left(\pi\sqrt{1+u^2}/2\right)}{1+u^2} \tag{9.5-12}$$

式中

$$u = \frac{\Gamma}{\pi} = \frac{2}{\lambda}(n_e - n_o)d \tag{9.5-13}$$

其中 d 是盒子厚度。对于大多数扭曲液晶盒而言，无外加场作用时 $1 \ll u$，且根据式（9.5-12），可见光谱范围内的任意波长其透射在 0 附近。当开始施加外加电场时，双折射消失（u=0），根据式（9.5-12），透射为 1。

如果液晶盒位于一对交叉的偏振器之间，在液晶盒边界处，该偏振器的传播轴平行于定向偶极子，无外加场作用时，由于波导传播现象这种结构透光（即通常的亮态）。电场（轴向的）趋于沿着场方向（z 轴）调整本地定向偶极子，由于双折射的消失和一对交叉的偏振器引起消光。

其他的电光效应有，例如动态光散射、胆甾向列相的相变和宾主效应。讨论这些效应超出了本书的范围。感兴趣的读者可以参考文献[7]。由于它们强的电光效应，液晶广泛应用于很多光电仪表，大多数是为了达到信息显示的目的。在光通信领域，液晶作为光电媒质用于转换和调制类似于可调滤波器。

9.6 声光效应（光弹性效应）

我们考虑与材料的光学特性有关的机械应变效应。正如我们所知，气体介质的折射率随着气体介质的密度（压力）而改变。类似的，当固体或液体经历了弹性形变后折射率也会随之发生改变。对光折射率而言，材料中的光弹性效应和机械应变是结合在一起的。 材料中的机械应变是由于弹性形变引起的，常定义如下

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{9.6-1}$$

其中 x_i（i=1，2，3）是材料媒质中任意粒子（或者任意小单元）的坐标，u_i（i=1，2，3）是粒子离开其平衡位置的物理位移。广义的应变可以用 u_i（x_1，x_2，x_3）来描述。注意：张量式（9.6-1），其定义是对称的。传统上，弹性材料的机械应变都是由张量式（9.6-1）来描述的。S_{11} 代表沿着 x 方向的线性膨胀（或者压缩，如果是负的）。非对角线元素（比如：S_{12}）代表切应变。切应变最佳的一个实例是由于应变，使得矩形状固体变成平行四边形状固体。

注意：应变张量元素 S_{ij} 是无量纲的。

由于弹性材料机械地发生形变，使得折射率也发生改变。这就是所熟知光弹性效应，该效应发生于物质的各个状态，传统描述为

$$\Delta\eta_{ij} = \Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_{ij} = p_{ijkl}S_{kl} \tag{9.6-2}$$

其中 $\Delta\eta_{ij}$（或 $\Delta(1/n^2)_{ij}$）是光的不可渗透性张量变化，而 S_{kl} 是应变张量。无因次系数 p_{ijkl} 构成了应变光张量。在上面的方程中，我们忽略了高阶项包括 S_{kl} 的平方项。与线性项相比较，这些高阶项通常很小（S_{kl} 在 10^{-5} 范围内）。有外加应变场存在时，光学介质的折射率椭球定义如下：

$$(\eta_{ij} + p_{ijkl}S_{kl})x_i x_j = 1 \tag{9.6-3}$$

如果无外加应变场时（$S_{kl}=0$），在主坐标系统，折射率椭球化简为式（9.1-4）。由于 η_{ij} 和 S_{ij} 均为对称张量，方程（9.6-2）中的指数 i 和 j 以及 k 和 l 之间可以相互置换。应变光张量的置换对称可以表示如下

$$p_{ijkl} = p_{jikl} = p_{ijlk} = p_{jilk} \tag{9.6-4}$$

由于对称性，利用简略指数（9.1-7）式可以很方便地缩写符号。于是方程（9.6-2）可以写为

$$\Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_I = p_{IJ}S_J \quad (I, J = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \tag{9.6-5}$$

其中 S_J 是应变分量。存在外加应变场时，折射率椭球方程可以写成

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{n_x^2} + p_{11}S_1 + p_{12}S_2 + p_{13}S_3 + p_{14}S_4 + p_{15}S_5 + p_{16}S_6\right)x^2 \\
&+ \left(\frac{1}{n_y^2} + p_{21}S_1 + p_{22}S_2 + p_{23}S_3 + p_{24}S_4 + p_{25}S_5 + p_{26}S_6\right)y^2 \\
&+ \left(\frac{1}{n_z^2} + p_{31}S_1 + p_{32}S_2 + p_{33}S_3 + p_{34}S_4 + p_{35}S_5 + p_{36}S_6\right)z^2 \\
&+ 2yz(p_{41}S_1 + p_{42}S_2 + p_{43}S_3 + p_{44}S_4 + p_{45}S_5 + p_{46}S_6) \\
&+ 2zx(p_{51}S_1 + p_{52}S_2 + p_{53}S_3 + p_{54}S_4 + p_{55}S_5 + p_{56}S_6) \\
&+ 2xy(p_{61}S_1 + p_{62}S_2 + p_{63}S_3 + p_{64}S_4 + p_{65}S_5 + p_{66}S_6) = 1
\end{aligned} \tag{9.6-6}$$

其中 n_x，n_y，n_z 是主折射率。通常，光应变系数 p_{IJ} 在主坐标系统中定义，一般有 36 个独立的应变光系数。材料的点集对称性规定了 36 个系数中哪些为 0，以及非零系数间可能存在的关系。一般情况下，有外加应力场作用的折射率椭球和零场折射率椭球是不同的。对于应变光张量的具体构成和光弹性系数 p_{IJ} 的数据，读者可以参考文献[6]。

例：各向同性固体中的声光效应。

讨论声波在各向同性固体中的传播（比如：石英玻璃）。采用简略符号的光弹性系数可

以写成

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{12} & p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{44} \end{bmatrix}, \quad p_{44} = \frac{1}{2}(p_{11} - p_{12}) \tag{9.6-7}$$

令声波为纵波，沿着 z 轴传播，其粒子的位移定义如下

$$u(z, t) = A\hat{z}\cos(\Omega t - Kz) \tag{9.6-8}$$

其中 A 是振幅，Ω是声波的角频率，K 是波矢。与该声波有关的应变场由下式给出：

$$S_3(z, t) = KA\sin(\Omega t - Kz) = S_0\sin(\Omega t - Kz) \tag{9.6-9}$$

其中 S_0 是常量，等于 KA。注意到方程（9.6-9）代表沿着 z 轴传播的压缩波。根据式（9.6-5），不可渗透性张量变化定义如下

$$\begin{bmatrix} \Delta\eta_{11} \\ \Delta\eta_{22} \\ \Delta\eta_{33} \\ \Delta\eta_{23} \\ \Delta\eta_{31} \\ \Delta\eta_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{12} & p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ S_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9.6-10}$$

或者等价地表示成

$$\begin{aligned} \Delta\eta_{11} &= \Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_1 = p_{12}S_0\sin(\Omega t - Kz) \\ \Delta\eta_{22} &= \Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_2 = p_{12}S_0\sin(\Omega t - Kz) \\ \Delta\eta_{33} &= \Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_3 = p_{11}S_0\sin(\Omega t - Kz) \\ \Delta\eta_{ij} &= 0, \quad \text{for } i \neq j \end{aligned} \tag{9.6-11}$$

由式（9.6-3）和式（9.6-6）确定的新折射率椭球可以写成

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{n^2} + p_{12}S_0\sin(\Omega t - Kz)\right)x^2 + \left(\frac{1}{n^2} + p_{12}S_0\sin(\Omega t - Kz)\right)y^2 \\ &+ \left(\frac{1}{n^2} + p_{11}S_0\sin(\Omega t - Kz)\right)z^2 = 1 \end{aligned} \tag{9.6-12}$$

由于没有混合项，主轴保持不变。新的主折射率定义如下

$$\begin{aligned} n_x &= n - \frac{1}{2}n^3 p_{12}S_0\sin(\Omega t - Kz) \\ n_y &= n - \frac{1}{2}n^3 p_{12}S_0\sin(\Omega t - Kz) \\ n_z &= n - \frac{1}{2}n^3 p_{11}S_0\sin(\Omega t - Kz) \end{aligned} \tag{9.6-13}$$

其中 p_{11} 和 p_{12} 是应变光系数，n 是各向同性固体的折射率。注意到：由于声波的存在，固体变成了周期性媒质等价于体光栅，其光栅周期$\Lambda=2\pi/K$。

下面讨论令声波为横波，沿着 x 轴传播，其粒子的位移定义如下

$$u(x,t)=A\hat{y}\cos(\Omega t-Kx) \tag{9.6-14}$$

其中 A 是振幅，Ω是声波的角频率，K 是波矢。与该声波有关的应变场由下式给出：

$$S_6(x,t)=S_{12}(x,t)=\frac{1}{2}KA\sin(\Omega t-Kx)=S_0\sin(\Omega t-Kx) \tag{9.6-15}$$

其中 S_0 是常量，等于 $KA/2$。这是切变波沿着 x 轴传播。根据式（9.6-5），不可渗透性张量变化定义如下

$$\begin{bmatrix}\Delta\eta_{11}\\ \Delta\eta_{22}\\ \Delta\eta_{33}\\ \Delta\eta_{23}\\ \Delta\eta_{31}\\ \Delta\eta_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}&p_{12}&0&0&0\\ p_{12}&p_{11}&p_{12}&0&0&0\\ p_{12}&p_{12}&p_{11}&0&0&0\\ 0&0&0&p_{44}&0&0\\ 0&0&0&0&p_{44}&0\\ 0&0&0&0&0&p_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\S_6\end{bmatrix} \tag{9.6-16}$$

或者等价地表示成

$$\begin{aligned}\Delta\eta_{12}&=\Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_{12}=p_{44}S_0\sin(\Omega t-Kz)\\ \Delta\eta_{11}&=\Delta\eta_{22}=\Delta\eta_{33}=\Delta\eta_{31}=\Delta\eta_{23}=0\end{aligned} \tag{9.6-17}$$

由式（9.6-3）和（9.6-6）确定的新折射率椭球可以写成

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{n^2}+2xyp_{44}S_0\sin(\Omega t-Kz)=1 \tag{9.6-18}$$

因为混合项仅仅包含 x 和 y，折射率椭球可以简化为如下对角线形式

$$\left(\frac{1}{n^2}+p_{44}S_0\sin(\Omega t-Kz)\right)x'^2+\left(\frac{1}{n^2}-p_{44}S_0\sin(\Omega t-Kz)\right)y'^2+\frac{z^2}{n^2}=1 \tag{9.6-19}$$

其中 x' 轴和 y' 轴与 x 轴和 y 轴夹角为 45°。因此新的主折射率可以写成

$$\begin{aligned}n_x&=n-\frac{1}{2}n^3p_{44}S_0\sin(\Omega t-Kz)\\ n_y&=n+\frac{1}{2}n^3p_{44}S_0\sin(\Omega t-Kz)\\ n_z&=n\end{aligned} \tag{9.6-20}$$

其中 $p_{44}=(p_{11}-p_{12})/2$。对于石英玻璃（SiO_2），应变光系数[6] $p_{11}=0.12$ 和 $p_{12}=0.27$。

例：三角对称晶体中的声光效应（比如：$LiNbO_3$）。

讨论点群为 $3m$，32 和 $\overline{3}m$ 的三角对称晶体媒质（比如：$LiNbO_3$，石英（SiO_2），蓝宝石（Al_2O_3））中声波的传播。对于这些晶体而言，采用简略符号的光弹性系数可以写成

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{11} & p_{13} & -p_{14} & 0 & 0 \\ p_{31} & p_{31} & p_{33} & 0 & 0 & 0 \\ p_{41} & -p_{41} & 0 & p_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{44} & p_{41} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{14} & p_{66} \end{bmatrix}, \quad p_{66} = \frac{1}{2}(p_{11} - p_{12}) \tag{9.6-21}$$

令声波为纵波，沿着 z 轴传播，其粒子的位移定义如下

$$u(z, t) = A\hat{z}\cos(\Omega t - Kz) \tag{9.6-22}$$

其中 A 是振幅，Ω是声波的角频率，K 是波矢。与该声波有关的应变场由下式给出

$$S_3(z, t) = KA\sin(\Omega t - Kz) = S_0\sin(\Omega t - Kz) \tag{9.6-23}$$

其中 S_0 是常量，等于 KA。根据式（9.6-5），不可渗透性张量变化定义如下

$$\begin{bmatrix} \Delta\eta_{11} \\ \Delta\eta_{22} \\ \Delta\eta_{33} \\ \Delta\eta_{23} \\ \Delta\eta_{31} \\ \Delta\eta_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{11} & p_{13} & -p_{14} & 0 & 0 \\ p_{31} & p_{31} & p_{33} & 0 & 0 & 0 \\ p_{41} & -p_{41} & 0 & p_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{44} & p_{41} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{14} & p_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ S_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9.6-24}$$

或者等价地表示成

$$\begin{aligned} \Delta\eta_{11} &= \Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_1 = p_{13}S_0\sin(\Omega t - Kz) \\ \Delta\eta_{22} &= \Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_2 = p_{13}S_0\sin(\Omega t - Kz) \\ \Delta\eta_{33} &= \Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_3 = p_{33}S_0\sin(\Omega t - Kz) \\ \Delta\eta_{ij} &= 0, \quad \text{for } i \neq j \end{aligned} \tag{9.6-25}$$

由式（9.6-3）和式（9.6-6）确定的新折射率椭球可以写成

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{n_o^2} + p_{13}S_0\sin(\Omega t - Kz)\right)x^2 + \left(\frac{1}{n_o^2} + p_{13}S_0\sin(\Omega t - Kz)\right)y^2 \\ &+ \left(\frac{1}{n_e^2} + p_{33}S_0\sin(\Omega t - Kz)\right)z^2 = 1 \end{aligned} \tag{9.6-26}$$

由于没有混合项，主轴保持不变。新的主折射率定义如下

$$\begin{aligned} n_x &= n_o - \frac{1}{2}n_o^3 p_{13}S_0\sin(\Omega t - Kz) \\ n_y &= n_o - \frac{1}{2}n_o^3 p_{13}S_0\sin(\Omega t - Kz) \\ n_z &= n_e - \frac{1}{2}n_e^3 p_{33}S_0\sin(\Omega t - Kz) \end{aligned} \tag{9.6-27}$$

其中 p_{13} 和 p_{33} 是应变光系数，n_e 和 n_o 分别是晶体的非常折射率和寻常折射率。注意到：由于声波的存在，晶体变成了周期性媒质等价于体光栅，其光栅周期$\Lambda = 2\pi/K$。

下面讨论：令声波为横波，沿着 x 轴传播，其粒子的位移定义如下

$$u(x, t) = A\hat{y}\cos(\Omega t - Kx) \tag{9.6-28}$$

其中 A 是振幅，Ω是声波的角频率，K 是波矢。与该声波有关的应变场由下式给出

$$S_6(x, t) = S_{12}(x, t) = \tfrac{1}{2}KA\sin(\Omega t - Kx) = S_0\sin(\Omega t - Kx) \tag{9.6-29}$$

其中 S_0 是常量，等于 $KA/2$。根据式（9.6-5）,不可渗透性张量变化定义如下

$$\begin{bmatrix}\Delta\eta_{11}\\ \Delta\eta_{22}\\ \Delta\eta_{33}\\ \Delta\eta_{23}\\ \Delta\eta_{31}\\ \Delta\eta_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & 0 & 0\\ p_{12} & p_{11} & p_{13} & -p_{14} & 0 & 0\\ p_{31} & p_{31} & p_{33} & 0 & 0 & 0\\ p_{41} & -p_{41} & 0 & p_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{44} & p_{41}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{14} & p_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\S_6\end{bmatrix} \tag{9.6-30}$$

或者等价地表示成

$$\begin{aligned}
&\Delta\eta_{31} = \Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_{31} = p_{41}S_0\sin(\Omega t - Kz)\\
&\Delta\eta_{12} = \Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_{12} = p_{66}S_0\sin(\Omega t - Kz) = \tfrac{1}{2}(p_{11} - p_{12})S_0\sin(\Omega t - Kz)\\
&\Delta\eta_{11} = \Delta\eta_{22} = \Delta\eta_{33} = \Delta\eta_{23} = 0
\end{aligned} \tag{9.6-31}$$

由式（9.6-3）和式（9.6-6）确定的新折射率椭球可以写成

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{n^2} + 2zxp_{41}S_0\sin(\Omega t - Kz) + 2xyp_{66}S_0\sin(\Omega t - Kz) = 1 \tag{9.6-32}$$

通过坐标旋转，折射率椭球可以简化为对角线形式。对于 $LiNbO_3$ 晶体,光应变系数[6] p_{11}=−0.026, p_{12}=0.090, p_{13}=0.133, p_{14}=−0.075, p_{31}=0.179, p_{33}=0.071, p_{41}=−0.151, p_{44}=0.146。

光弹性效应也可以用介电张量变化来表示。利用不可渗透性张量的定义

$$\eta = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \tag{9.6-33}$$

得到

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon\left(\frac{\Delta\eta}{\varepsilon_0}\right)\varepsilon \tag{9.6-34}$$

其中介电张量变化以矩阵的形式表示。方程（9.6-34）的右边是三个矩阵的乘积。因此光弹性效应也可以写成

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon\left(\frac{pS}{\varepsilon_0}\right)\varepsilon \tag{9.6-35}$$

其中 pS 矩阵是由元素 $p_{ijkl}S_{kl}$ 构成。在各向同性媒质中$\varepsilon=n^2\varepsilon_0$ ，光弹性效应可以进一步化简为

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_0 n^2 pS \tag{9.6-36}$$

有关光弹性效应更多的讨论，读者可以参考文献[6]。

9.7　声波对光的散射

在 9.6 节中，我们描述了指数光栅的产生是由于固体中存在声波。当声波在媒质中传播时，存在与之关联的应变场。应变使得折射率发生了改变。这就是所谓的光弹性效应。对于平面声波，应变场是位置的周期函数。由于光弹性效应，媒质的折射率变为周期性调制，从而获得了指数光栅。

现在开始讨论光束和指数光栅间的相互作用。1922 年，布里渊首先预言了这种相互作用（声－光相互作用）；1932 年，德拜和西尔斯在美国、卢卡斯和毕卡德在法国分别通过实验证明了这种相互作用。最近高频声学和激光器的发展再次引起了人们对这一领域的兴趣，因为由声波引起的光的散射（布拉格散射）给出了一种便利地控制光束的频率、强度和方向的方法。该类型的控制方法获得了很多应用，包括传播、展示和信息处理[11]。

布拉格散射

由材料密度（或者应变）的正弦扰动组成的声波，以声速 v_s 传播，如图 9.19 所示。根据上一节中的例子所述，由于声波存在产生的指数光栅具有以下形式

$$\Delta n(z, t) = \Delta n_0 \sin(\Omega t - Kz) \tag{9.7-1}$$

其中Δn_0 是常量，Ω是声波的角频率，且$\Omega/K=v_s$ 。实际上，本章所指的声波其频率范围在 MHz 到 10GHz 之间变化。

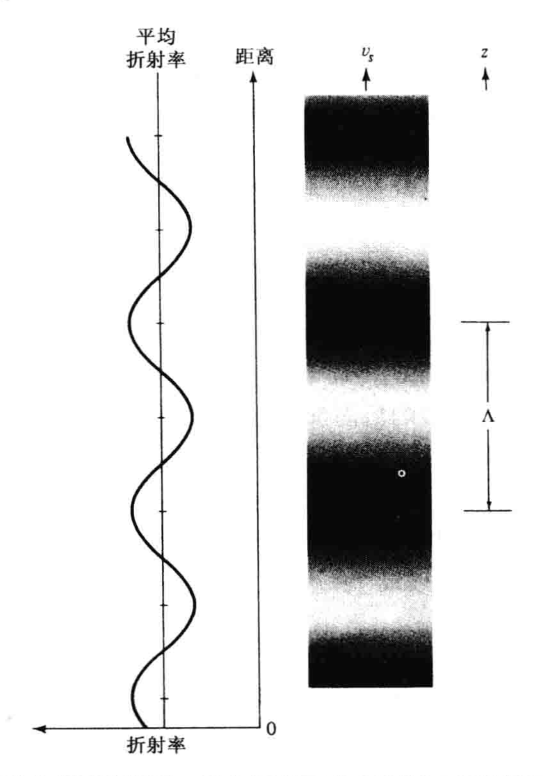


图 9.19　声行波“冻结”于某些瞬间。它由压缩区域（黑色）和稀疏区域（白色）交替组成，以声速 v_s 传播。同时给出了伴随着声波引起的瞬时的空间折射率变化

下面考虑光束以角度θ_i入射到声波上，如图 9.20 所示。为了便于讨论，将声波视作一系列的部分反射镜，其间隔为声波波长Λ，以声速 v_s 传播。示意图很简单，但在描述声－光相互作用的概念时非常有用。根据式（9.7-1），声波由应变行波组成，可将其视为由高、低折射率层交替排列而成。因为折射率的变化会引起反射，下面以反射镜进行模拟。

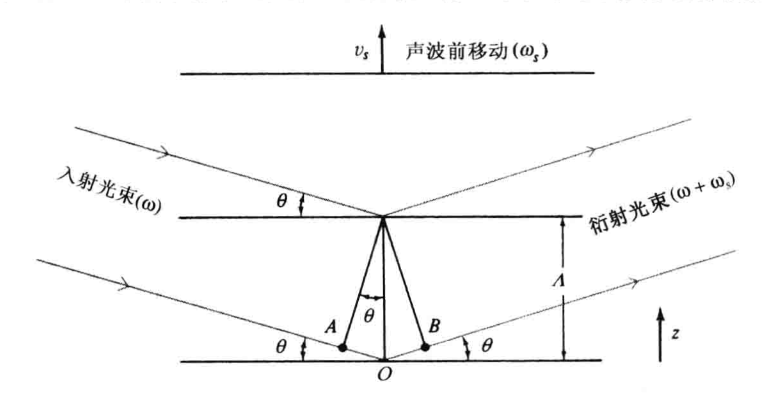


图 9.20　光束由声束中两个等价的平面（即这两个平面的间距为Λ）上的反射。如果光程差 $AO+OB$ 等于 n 个光的波长，反射波则会同向而相加

此时忽略反射镜的位移，讨论衍射波（或者散射波）。利用反射镜模拟以及镜子的自然镜面反射，我们得出结论反射角θ_r必须等于衍射角θ_i

$$\theta = \theta_i = \theta_r \tag{9.7-2}$$

这类似于应用于平面镜的斯奈尔反射定律。另外考虑到衍射角式（9.7-2）这一条件，要求任意两个声波相前上发生的衍射，其相位沿着反射光束（或者衍射波）方向累加。给定光波波前的路径差，$AO+OB$ 如图 9.20 所示，是由于两个等价声波波前（比如：间隔为Λ的两个平面）间的反射产生的，路径差必须等于光波长λ的整数倍。利用图 9.20，这一条件可以写为

$$2n\Lambda\sin\theta = m\lambda,\quad m=1\quad \text{正弦声波} \tag{9.7-3}$$

满足式（9.7-3）的光波衍射，即所熟知的布拉格衍射，类似于晶体中的 X 射线衍射（$2d\Lambda\sin\theta=m\lambda$，$d$=原子的点阵间隔，$m$=1，2，3…）[12]。注意：方程（9.7-3）是在相长干涉的基础上推导出来的。在本节的后面部分会证明：对于正弦声波，布拉格衍射仅仅发生在 $m=1$ 时。这是由光波和单色声波之间耦合的物理特性决定的。如果声波是非正弦（但仍是周期的）波（因此是多色的），衍射发生于 $m=2$，3，…时。为了获得角度θ理想的数量级，考虑 500MHz 声波（f_s=500MHz）上的衍射光λ/n=0.5μm 的情况。令声速 $v_s=3\times10^5$cm/s，可以得到$\Lambda=v_s/f_s=6\times10^{-4}$cm，依据式（9.7-3），$\theta=4\times10^{-2}$ rad=3.5°。

由声波引起的光的布拉格衍射的粒子图像

利用光和声的波粒二像性，可以推知许多声波对光都有产生布拉格衍射的特性。按照这种图像，具有传播矢量 $\boldsymbol{k}$、频率为ω形式为 $\cos(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$ 可被看成由动量为$\hbar\boldsymbol{k}$ 和能量为$\hbar\omega$的一道粒子流（光子）所组成。同样，声波也可以当成由动量为$\hbar\boldsymbol{K}_S$，和能量为$\hbar\Omega_S$的粒子（声子）所组成。图 9.20 所示的光受到迎面传播的声束的衍射可以由一系列的碰撞来描

写，每一个碰撞引起一个入射频率为 ω_i 的光子和一个声子的消失，同时沿着散射光束的传播方向产生一个频率为 ω_d 的新（衍射的）光子。动量守恒要求碰撞前粒子的动量 $\hbar$（$\boldsymbol{K}_S$ + $\boldsymbol{k}_i$）等于散射光子的动量 $\hbar \boldsymbol{k}_d$，所以

$$\boldsymbol{k}_d = \boldsymbol{K} + \boldsymbol{k}_i \tag{9.7-4}$$

能量守恒写成如下形式

$$\omega_d = \Omega + \omega_i \tag{9.7-5}$$

从式（9.7-5）可知：衍射光束的频率发生了变化，其数值等于声波频率。因为相互作用包含了声子的湮没，能量守恒规定：频率发生了改变 $\omega_d > \omega_i$，声子能量必须加到湮没的光子上形成一个新的光子。采用这种论点，如果图 9.20 中声波的方向取为原来的反方向，相对于入射光而言声波是向后退的，散射过程可以看作入射光子湮没产生一个新的光子（衍射光子）和一个新的声子。在这种情况下，由能量守恒得

$$\omega_d = \omega_i - \Omega$$

使用多普勒位移的观点，将会使频率符号的改变和声波传播方向之间的关系变得清楚，本节的最后会进行介绍。

动量守恒条件式（9.7-4）等价于 $m=1$ 时的布拉格条件式（9.7-3）。为了证明这一观点的正确性，讨论图 9.21。因为人们感兴趣的声波频率低于 10^{10}Hz，而光束的频率一般高于 10^{13}Hz，可以得到

$$\omega_d = \omega_i + \Omega \approx \omega_i，因此\ k_d \cong k_i$$

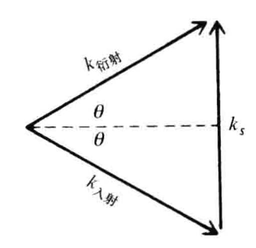


图 9.21　动量守恒关系式（9.7-4）的图示，用此推导光束受到接近的声波衍射的布拉格条件 $2\Lambda_s \sin\theta = \lambda / n$，$\theta$ 是入射或衍射光束与声波波前之间的夹角

两个光波矢的值取为 k（见习题 9.4）。因此，声波波矢的值为

$$k_s = 2k \sin\theta \tag{9.7-6}$$

利用 $K=2\pi/\Lambda$，式子变为

$$2\Lambda \sin\theta = \lambda \tag{9.7-7}$$

这和 $m=1$ 时的布拉格条件式（9.7-3）相同。

非正弦（但是周期的）声波的情况，认为声波由一系列具有如下形式 cos（$m\Omega t - m\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{r}$），$m$=1，2，3，…平面波叠加构成。在这种情况下，第 m 个谐波的动量守恒为

$$\boldsymbol{k}_d = m\boldsymbol{K} + \boldsymbol{k}_i \tag{9.7-8}$$

或者等价于

$$mK = 2k\sin\theta \tag{9.7-9}$$

利用 $K=2\pi/\Lambda$，式子变为

$$2n\Lambda\sin\theta = m\lambda \tag{9.7-10}$$

这和 $m=1$ 时的布拉格条件式（9.7-3）相同。

多普勒频移的推导

频移条件式（9.7-5）可以由下面的方法推导而得：考虑一道光束入射到以声速 v_s 运动的镜面上所产生的多普勒频移，其入射角应满足布拉格条件式（9.7-7）。从一个运动物体上反射出来的波的多普勒频移是

$$\Delta\omega = 2\omega\frac{v}{c/n} \tag{9.7-11}$$

其中ω是光波频率，v 是与传播方向平行的物体运动的速度分量。由图 9.20 知 $v=v_s\sin\theta$，因此

$$\Delta\omega = 2\omega\frac{v_s\sin\theta}{c/n} \tag{9.7-12}$$

利用式（9.7-10）求出 $\sin\theta$，可以得到

$$\Delta\omega \equiv \frac{2\pi v_s}{\Lambda} = \Omega \tag{9.7-13}$$

因此$\omega_d=\omega+\Omega$。

如果声束的传播方向反转，即在图 9.20 中声波从光束后退，则多普勒频移改变符号，衍射光束的频率变成 $\omega-\Omega$ 。

9.8　布拉格衍射——耦合波分析

在声－光相互作用的粒子图像中，我们得到入射光束的频率和方向与散射光束的频率和方向间的关系。讨论仅是基于能量守恒和动量守恒。为了确定相互作用的效率，尤其是衍射效率，需要求出互作用波的振幅。这就需要求解波动方程。为求解波动方程，将使用耦合波分析。在处理经声波产生的衍射光时，假设相互作用路径很长，可以忽略高次的衍射级[13]，仅仅两列波经过声波进行耦合，即频率为ω_i 的入射波和频率为$\omega_d=\omega_i+\Omega$或者$\omega_i-\Omega$的衍射波，其正、负号的选择依赖于 9.7 节讨论的多普勒位移的方向。

参考图 9.22，讨论声波和光波的相互作用。依据 9.6 节的讨论，声波引起折射率的行波调制（指数光栅）。

为了简化，讨论各向同性媒质中的折射率光栅，可写成

$$\Delta n(z,t) = \Delta n_0\cos(\Omega t - Kz) \tag{9.8-1}$$

或者等价地用介电常数表示

$$\Delta\varepsilon(z,t) = \Delta\varepsilon_0\cos(\Omega t - Kz) = 2\varepsilon_0 n\,\Delta n_0\cos(\Omega t - Kz) \tag{9.8-2}$$

其中Δn_0 是折射率调制深度，$\Delta\varepsilon_0=2\varepsilon_0 n\Delta\varepsilon n_0$ 是用介电常数表示的调制深度。入射光和衍射光

的电场可以写成

$$E(x, z, t) = A_1 E_1 e^{i(\omega_1 t - k_1 \cdot r)} + A_2 E_2 e^{i(\omega_2 t - k_2 \cdot r)} \tag{9.8-3}$$

其中 $\boldsymbol{k}_1$ 和 $\boldsymbol{k}_2$ 以及ω_1 和ω_2 分别是入射光和衍射光的传播波矢和相应的频率。$\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$ 是标准的传播模式，在均匀媒质中为常数矢量。A_1 和 A_2 分别是入射光和衍射光的模振幅。由于指数光栅$\Delta\varepsilon$（x，z，t）的存在，这两种模式是耦合的，且模振幅是位置的函数。对于连续波（光波和声波均为连续波）的情况，模振幅与时间无关，频率满足能量守恒（$\omega_2=\omega_1\pm\Omega$）。令入射平面（比如：由 $\boldsymbol{k}_1$ 和 $\boldsymbol{K}$ 组成的平面）为 xz 平面。动量守恒要求 $\boldsymbol{k}_2$ 必须在此平面。

因此，电场也可以写成

$$E(x, z, t) = A_1(x) E_1 e^{i(\omega_1 t - \alpha_1 x - \beta_1 z)} + A_2(x) E_2 e^{i(\omega_2 t - \alpha_2 x - \beta_2 z)} \tag{9.8-4}$$

其中β_1 和β_2 以及α_1 和α_2 分别是波矢 $\boldsymbol{k}_1$ 和 $\boldsymbol{k}_2$ 的 z 分量和 x 分量，它们平行于声波波前。通常，模振幅 A_1 和 A_2 既是 x 也是 z 的函数。然而，这里有很多例子；在这些例子中，均要求模振幅 A_1 和 A_2 仅是 x 或者 z 的函数。对于图 9.22 所示的情况，光波是沿着 z 轴的无限域，模振幅仅仅是 x 的函数。这是由于场幅度连续性的边界条件。

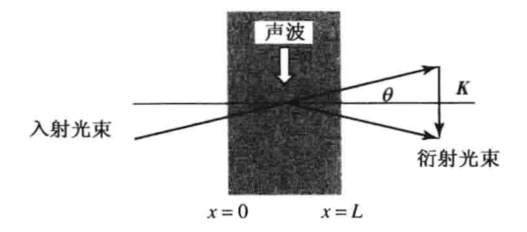


图 9.22　布拉格散射的相互作用结构的示意图。K 是声波波数

电场式（9.8-4）必须满足以下波动方程

$$(\nabla^2 + \omega^2\mu\varepsilon + \omega^2\mu\Delta\varepsilon)E = 0 \tag{9.8-5}$$

无声波存在的情况下，ε是媒质的介电常量，$\Delta\varepsilon$是由于声波引起的介质的微扰（指数光栅）。当$\Delta\varepsilon=0$ 时，$\boldsymbol{E}_1 e^{i(\omega_1 t-\alpha_1 x-\beta_1 z)}$和 $\boldsymbol{E}_2 e^{i(\omega_2 t-\alpha_2 x-\beta_2 z)}$均为波动方程的解。将式（9.8-4）代入式（9.8-5）中，导出

$$\begin{aligned}&\sum_{m=1,2}\left(\frac{\partial^2 A_m}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_m}{\partial z^2}-2i\alpha_m\frac{\partial}{\partial x}A_m-2i\beta_m\frac{\partial}{\partial z}A_m\right)E_m e^{i(\omega_m t-\alpha_m x-\beta_m z)}\\&=-\omega^2\mu\sum_{l=1,2}\Delta\varepsilon A_l E_l e^{i(\omega_l t-\alpha_l x-\beta_l z)}\end{aligned} \tag{9.8-6}$$

在幅度缓变（SVA）近似下，二阶导数$\partial^2 A/\partial x^2$ 和$\partial^2 A/\partial z^2$ 常可以忽略。对于声－光相互作用而言这是合理的，因为指数微扰常常很小（$\Delta\varepsilon/\varepsilon\approx10^{-5}$）。因此，微分方程中主要是一阶导数占优势。

现在考虑图 9.22 所示的相互作用结构，因此模振幅仅仅是 x 的函数。波动方程变为

$$\begin{aligned}&-2i\alpha_1\left(\frac{\partial}{\partial x}A_1\right)E_1 e^{i(\omega_1 t-\alpha_1 x-\beta_1 z)}-2i\alpha_2\left(\frac{\partial}{\partial x}A_2\right)E_2 e^{i(\omega_2 t-\alpha_2 x-\beta_2 z)}\\&=-\omega^2\mu\Delta\varepsilon(A_1 E_1 e^{i(\omega_1 t-\alpha_1 x-\beta_1 z)}+A_2 E_2 e^{i(\omega_2 t-\alpha_2 x-\beta_2 z)})\end{aligned} \tag{9.8-7}$$

或者等价写成

$$-2i\alpha_1\left(\frac{\partial}{\partial x}A_1\right)\boldsymbol{E}_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1 t-\alpha_1 x-\beta_1 z)}-2i\alpha_2\left(\frac{\partial}{\partial x}A_2\right)\boldsymbol{E}_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_2 t-\alpha_2 x-\beta_2 z)}$$
$$=-\omega^2\mu\varepsilon_0 n\Delta n_0(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Omega t-Kz)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Omega t-Kz)})(A_1\boldsymbol{E}_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1 t-\alpha_1 x-\beta_1 z)}+A_2\boldsymbol{E}_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_2 t-\alpha_2 x-\beta_2 z)}) \tag{9.8-8}$$

在导出场幅度的耦合方程之前，我们首先将对场矢量 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$ 进行归一化

$$\boldsymbol{E}_m=\sqrt{\frac{2\mu\omega_m}{\alpha_m}}\boldsymbol{P}_m,\quad m=1,2 \tag{9.8-9}$$

其中 $\boldsymbol{P}_m$ 是单位矢量，代表波的偏振态；α_m 是 x 方向的波矢分量。由于归一化，对于各向同性媒质的情况，单位模振幅代表 x 方向上 $1\mathrm{W/m^2}$ 的功率通量。

通过方程（9.8-8）和 $E_l^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_l t-\alpha_l x-\beta_l z)}$，$l$=1,2，进行标乘，并对 z 和 t 进行积分，获得如下的耦合方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}A_1=-i\kappa_{12}A_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\alpha x}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}A_2=-i\kappa_{12}^*A_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta\alpha x} \tag{9.8-10}$$

其中 κ_{12} 是耦合常量，定义如下

$$\kappa_{12}=\frac{\omega^2\mu\varepsilon_0}{2\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}n\,\Delta n_0\,p_1^*\cdot p_2 \tag{9.8-11}$$

确保满足条件

$$\beta_2=\beta_1\pm K \tag{9.8-12}$$

和

$$\omega_2=\omega_1\pm\Omega \tag{9.8-13}$$

如果以上条件中任意一个不能满足，耦合方程就不正确。这是由于做了如下假设的结果：连续波相互作用，且在 z 方向上无限大。$\Delta\alpha$ 是在 x 方向上动量不匹配，定义

$$\Delta\alpha=\alpha_1-\alpha_2 \tag{9.8-14}$$

假设 α_1 和 α_2 都是正的。对于各向同性媒质的情况，满足布拉格条件式（9.8-12），对于声子被吸收的情况，$\beta_1=-\beta_2=-K/2=-k\sin\theta_B$；对于声子发射的情况，$\beta_1=-\beta_2=K/2=k\sin\theta_B$。以该入射的布拉格角

$$\theta_B=\sin^{-1}\left(\frac{K}{2k}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{\lambda}{2\Lambda}\right) \tag{9.8-15}$$

动量不匹配，$\Delta\alpha$ 消失（$\Delta\alpha=0$），x 轴等分 $\boldsymbol{k}_1$ 和 $\boldsymbol{k}_2$ 构成的夹角，耦合波方程变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}A_1=-i\kappa_{12}A_2$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}A_2=-i\kappa_{12}^*A_1 \tag{9.8-16}$$

方程（9.8-16）的通解为

$$A_1(x) = A_1(0)\cos\kappa x - i\frac{\kappa_{12}}{\kappa}A_2(0)\sin\kappa x$$
$$A_2(x) = A_2(0)\cos\kappa x - i\frac{\kappa_{12}^*}{\kappa}A_1(0)\sin\kappa x \tag{9.8-17}$$

其中 A_1（0）和 A_2（0）是 x=0 处的波的振幅，κ是κ_{12}值的大小

$$\kappa = |\kappa_{12}| \tag{9.8-18}$$

在特殊情况下单光束入射在 x=0（比如：A_2（0）=0），解就变成

$$A_1(x) = A_1(0)\cos\kappa x$$
$$A_2(x) = -i\frac{\kappa_{12}^*}{\kappa}A_1(0)\sin\kappa x \tag{9.8-19}$$

注意到

$$|A_1(x)|^2 + |A_1(x)|^2 = |A_1(0)|^2 \tag{9.8-20}$$

因此由两束光所携带的总能量守恒。若两束光的振幅在 x=0 处为有限值，那么一般情况下能量守恒是正确的。图 9.23 描述了两束光的能量是相互作用距离κL 的函数。注意，光波在媒质中传播时，光能量向前或者向后转移。

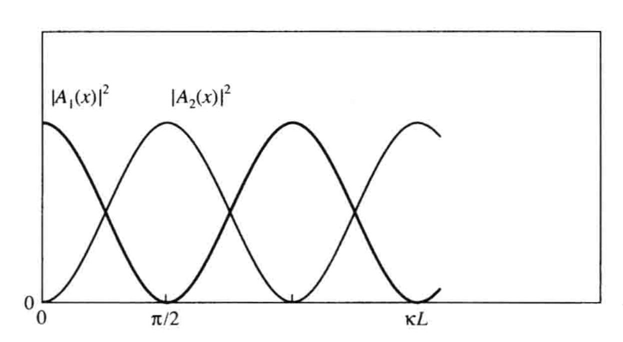


图 9.23　声—光衍射中，光束能量是相互作用距离的函数

如果两束光之间的相互作用距离 L 满足 $\kappa L = \pi/2$，入射光束的能量全部转移至衍射光束。由于这种方法在许多科学技术上获得了广泛的应用，对使用通常的声波媒质的参数和声波能量，便可得到合适的衍射效率，这是很有价值的。 上面耦合常数的导出是针对标量折射率光栅。注意，当散射光束与入射光束具有相同的偏振态时，耦合常数最大。在该情况下，耦合可以写成

$$\kappa_{12} = \frac{\omega^2\mu\varepsilon_0}{2\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}n\,\Delta n_0 \tag{9.8-21}$$

其中Δn_0是指数光栅的振幅。在双折射指数光栅的情况下，耦合常量可以写成

$$\kappa_{12} = \frac{\omega^2\mu}{4\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}p_1^*\cdot\Delta\varepsilon_0\,p_2 \tag{9.8-22}$$

经过传输距离 L 后，入射光束的能量转移给衍射光束能量之比为

$$\frac{I_{衍射}}{I_{入射}} = \frac{|A_2(L)|^2}{|A_1(0)|^2} = \sin^2\kappa L \tag{9.8-23}$$

根据式（9.8-11）、式（9.8-22）和式（9.8-18），κ由下式给出

$$\kappa=|\kappa_{12}|=\frac{\omega^2\mu}{4\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}|p_1^*\cdot\Delta\varepsilon_0\ p_2| \tag{9.8-24}$$

在满足布拉格条件式（9.8-12）时，得到$|\beta_1|=|\beta_2|=k\sin\theta=K/2$，$\alpha_1=\alpha_2=k\cos\theta_B=$（$\omega/c$）$n\cos\theta_B$，耦合常量可以写成

$$\kappa=\frac{\omega\mu c}{4n\cos\theta_B}|p_1^*\cdot\Delta\varepsilon_0\ p_2| \tag{9.8-25}$$

应该记得，$\Delta\varepsilon_0$ 是由声波引起的介电常数的调制振幅，$\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$ 分别代表入射光束和衍射光束的偏振态的单位矢量。假设各向同性媒质并利用式（9.6-36），耦合常量也可以用应变分量和光弹性常数表示如下

$$\kappa=\frac{n^3\omega\mu\varepsilon_0 c}{4\cos\theta_B}|p_1^*\cdot pS_0p_2|=\frac{\omega n^3}{4n\cos\theta_B}|p_1^*\cdot pS_0p_2| \tag{9.8-26}$$

其中 pS_0 为一矩阵，代表由声波引起的不可渗透性张量改变，S_0 是应变波的振幅。

因为应变波的振幅 S_0 与声波的功率通量或者声波的强度直接相关，所以用声波强度 $I_{声学}$（$\mathrm{W/m^2}$）来表示衍射效率式（9.8-23）很方便。为了这一目的，耦合常量可以写成

$$\kappa=\frac{\omega n^3}{4c}pS_0 \tag{9.8-27}$$

p 是媒质的有效光弹性常数，S_0 是有效应变波的振幅。根据弹性理论，S_0 与声波强度 $I_{声学}$有关

$$I_{声学}=\tfrac{1}{2}\rho v_s^3S_0^2 \tag{9.8-28}$$

或者等价地

$$S_0=\sqrt{\frac{2I_{声学}}{\rho v_s^3}} \tag{9.8-29}$$

其中 v_s 是媒质中的声速，ρ是质量密度（$\mathrm{kg/m^3}$）。假设：标量指数光栅和一些偏振态（比如 $p_1=p_2$）,合并式（9.8-27），式（9.8-28），式（9.8-26）和式（9.8-23），获得

$$\frac{I_{衍射}}{I_{入射}}=\sin^2\left(\frac{\pi L}{\sqrt{2}\lambda}\sqrt{\frac{n^6p^2}{\rho v_s^3}I_{声学}}\right) \tag{9.8-30}$$

利用下式定义，代入声－光衍射性能系数

$$S_0=\sqrt{\frac{2I_{声学}}{\rho v_s^3}} \tag{9.8-31}$$

方程（9.8-30）变为

$$\frac{I_{衍射}}{I_{入射}}=\sin^2\left(\frac{\pi L}{\sqrt{2}\lambda}\sqrt{MI_{声学}}\right) \tag{9.8-32}$$

以水为例，光波长$\lambda=0.6328\mu\mathrm{m}$，其他常量为（数据来自表 9.3）

$$n=1.33$$

$$p=0.31$$

$$v_s = 1.5 \times 10^3 \text{ m/s}$$

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

式（9.8-32）变为

$$\left(\frac{I_{衍射}}{I_{入射}}\right)_{\substack{H_2O \\ \text{at } \lambda=0.6328\,\mu\text{m}}} = \sin^2\left(1.4L\sqrt{I_{声学}}\right) \tag{9.8-33}$$

对于其他材料在其他波长处时，可以合并最后两个方程获得一个方便的计算公式

$$\frac{I_{衍射}}{I_{入射}} = \sin^2\left(1.4\frac{0.6328}{\lambda(\mu\text{m})}L\sqrt{M_\omega I_{声学}}\right) \tag{9.8-34}$$

其中 $M_\omega = M_{material}/M_{H_{20}}$ 是水的衍射性能系数。它很重要，注意到式（9.8-34）是正的相互作用结构（入射角、音频、偏振态等）假设是相同的。对于普通材料的 M 和 M_ω的值罗列于表 9.3 和表 9.4 中。

表 9.3　声光衍射常用材料及其某些相关特性

原料	ρ（mg/m^3）	v_s（km/s）	n	p	M□
水	1.0	1.5	1.33	0.31	1.0
特重火石玻璃	6.3	3.1	1.92	0.25	0.12
熔石英（SiO_2）	2.2	5.97	1.46	0.20	0.006
聚苯乙烯	1.06	2.35	1.59	0.31	0.8
碘溴铊晶体	7.4	2.11	2.60	0.21	1.6
铌酸锂（$LiNbO_3$）	4.7	7.40	2.25	0.15	0.012
铌酸氟（LiF）	2.6	6.00	1.39	0.13	0.001
金红石（TiO_2）	4.26	10.30	2.60	0.05	0.001
三氧化二铝（Al_2O_3）	4.0	11.00	1.76	0.17	0.001
阿尔法碘酸	6.95	3.75	2.30	0.28	0.22
二氧化碲（TeO_2）	4.63	2.44	1.90	0.41	0.5
（慢切变波）	5.99	0.617	2.35	0.09	5.0

注意：ρ是密度，v_s 是声速，n 是折射率，p 是由式（9.6-36）所定义的光弹性常量，M_ω是相对的衍射常数，在下面定义（参考文献[11]）。

根据式（9.8-30），在低衍射效率时，衍射光强度与声波强度成比例。这一事实被应用于光辐射的声波调制。信息信号被用来调制声束的强度。接着这种调制转移，根据式（9.8-30），如同衍射光上的强度调制。

表 9.4　通常用于声－光相互作用以及某些相关特性的材料的清单

材料	λ（μm）	n	ρ（g/cm^3）	声波偏振及其方向	v_s（10^5cm/s）	光波偏振及其方向	$M=n^6p^2/\rho v_s^3$
Fused quartz	0.63	1.46	2.2	long.	5.95	⊥	1.51×10^{-15}
Fused quartz	0.63			trans.	3.76	‖ or ⊥	0.467
GaP	0.63	3.31	4.13	long. in [110]	6.32	‖	44.6
GaP	0.63			trans. in [100]	4.13	‖ or ⊥ in [010]	24.1
GaAs	1.15	3.37	5.34	long. in [110]	5.15	‖	104
GaAs	1.15			trans. in [100]	3.32	‖ or ⊥ in [010]	46.3
TiO_2	0.63	2.58	4.6	long. in [11–20]	7.86	⊥ in [001]	3.93
$LiNbO_3$	0.63	2.20	4.7	long. in [11–20]	6.57		6.99
YAG	0.63	1.83	4.2	long. in [100]	8.53	‖	0.073
YAG	0.63			long. in [110]	8.60	⊥	0.012

续表

材料	λ（μm）	n	ρ（g/cm³）	声波偏振及其方向	v_s（10^5cm/s）	光波偏振及其方向	$M=n^6p^2/\rho v_s^3$
YIG	1.15	2.22	5.17	long. in [100]	7.21	⊥	0.33
$LiTaO_3$	0.63	2.18	7.45	long. in [001]	6.19	‖	1.37
As_2S_3	0.63	2.61	3.20	long.	2.6	⊥	433
As_2S_3	1.15	2.46		long.		‖	347
SF-4	0.63	1.616	3.59	long.	3.63	⊥	4.51
β-ZnS	0.63	2.35	4.10	long. in [110]	5.51	‖ in [001]	3.41
β-ZnS	0.63			trans. in [110]	2.165	‖ or ⊥ in [001]	0.57
α-Al_2O_3	0.63	1.76	4.0	long. in [001]	11.15	‖ in [11–20]	0.34
CdS	0.63	2.44	4.82	long. in [11–20]	4.17	‖	12.1
ADP	0.63	1.58	1.803	long. in [100]	6.15	‖ in [010]	2.78
ADP	0.63			trans. in [100]	1.83	‖ or ⊥ in [001]	6.43
KDP	0.63	1.51	2.34	long. in [100]	5.50	‖ in [010]	1.91
KDP	0.63			trans. in [100]		‖ or ⊥ in [001]	3.83
H_2O	0.63	1.33	1.0	long.	1.5		160
Te	10.6	4.8	6.24	long. in [11–20]	2.2	‖ in [001]	4400
$PbMoO_4$ [15]	0.63	2.4		long. ‖ c axis	3.75	‖ or ⊥	73

注意：$M=n^6p^2/\rho v_s^3$ 是性能因数，如式（9.8-31）所定义，以 mks（米千克秒）为单位（参考文献[14]）。

[a] 光束方向实际上和用布拉格角所描述的值是不一致的。偏振定义为平行或者垂直于散射平面，该散射平面由声波和光学 $\boldsymbol{k}$ 矢量构成。

例：$PbMoO_4$中的散射。

计算分数 0.633μm 光波在布拉格条件下衍射从 $PbMoO_4$ 媒质中声波，具有如下性能

声波能量＝1W

声束的横截面＝1mm×1mm

l＝声束中的光程＝1mm

M_ω（来自表 9.3）=0.22

将这些数据代入（9.8-23）式得到

$$\frac{I_{衍射}}{I_{入射}} \approx 37\%$$

布拉格失匹衍射

现在让我们考虑这种情况：入射角稍稍偏离布拉格角

$$\theta_B = \sin^{-1}\left(\frac{K}{2k}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{\lambda}{2\Lambda}\right) \tag{9.8-35}$$

入射角可以写成

$$\theta_1 = \theta_B + \Delta\theta \tag{9.8-36}$$

其中$\Delta\theta$是个很小的角度。布拉格条件式（9.8-12）要求衍射光束的角度写成

$$\theta_2 = \theta_B - \Delta\theta \tag{9.8-37}$$

因此$\Delta\alpha$式（9.8-14）变为

$$\Delta\alpha = 2k\,\Delta\theta\sin\theta_B = K\Delta\theta \tag{9.8-38}$$

图 9.24 表示了当入射光束偏离布拉格角θ_B时的布拉格不匹配$\Delta\alpha$。

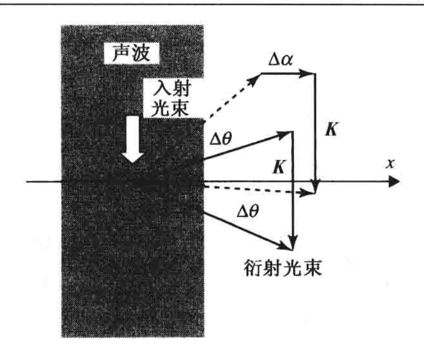


图 9.24　布拉格不匹配Δα的声－光散射。虚线箭头代表布拉格不匹配的光束。**K** 是声波波矢

尽管$\Delta\alpha$不等于 0，式（9.8-10）的解，服从边界条件 $A_2(0)=0$，定义如下

$$A_1(x) = e^{i\Delta\alpha x/2} A_1(0)\left(\cos sx - i\frac{\Delta\alpha}{2s}\sin sx\right)$$
$$A_2(x) = -ie^{-i\Delta\alpha x/2} A_1(0)\frac{\kappa_{12}^*}{s}\sin sx \qquad (9.8\text{-}39)$$

其中

$$s^2 = \kappa^2 + (\Delta\alpha/2)^2 = \kappa^2 + (K\,\Delta\theta/2)^2 \qquad (9.8\text{-}40)$$

对式（9.8-39）的证明表明：功率转移或者衍射效率，不可能是完全的，其定义如下

$$\frac{I_{衍射}}{I_{入射}} = \frac{|A_2(L)|^2}{|A_1(0)|^2} = \frac{\kappa^2}{s^2}\sin^2 sL = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + (K\,\Delta\theta/2)^2}\sin^2 \kappa L\sqrt{1+\left(\frac{K\,\Delta\theta}{2\kappa}\right)^2} \qquad (9.8\text{-}41)$$

图 9.25 表明功率转移是相互作用距离 sL 的函数。

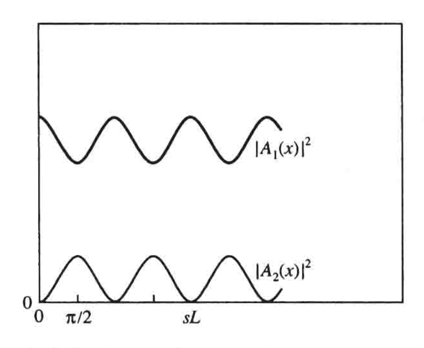


图 9.25　光束的功率是声－光衍射相互作用距离的函数

当 $sL=\pi/2$ 时，衍射效率最大为$\kappa^2/[\kappa^2+(K\Delta\theta/2)^2]$；当 $K\Delta\theta \gg \kappa$时其值变小。角度的偏离可能是由于入射激光束的不重合或者由于换能器有限的尺寸引起声波波前的变形。后者的连接性可以用于描述宽度为 L 的换能器的角平面波谱。因此，如果测量出衍射光束的功率，画出功率与$\Delta\theta$的函数关系图，换能器的辐射图将被描绘出。

9.9　布拉格盒和光束偏转器

声－光相互作用最重要的一个应用之一是用于光束的偏转。基本上，声－光偏转器和布

拉格衍射调制器以相同的方式运行，唯一的不同是声波的频率变化胜于振幅变化。因此在布拉格匹配条件附近运行时，可以通过改变频率获得声－光偏转器。利用声－光相互作用为高分辨率的光束偏转器提供了可能性。可以获得随机存储且连续扫描的偏转器。基本原理在图 9.26 中进行了描述，从图 9.27 可以进一步理解。

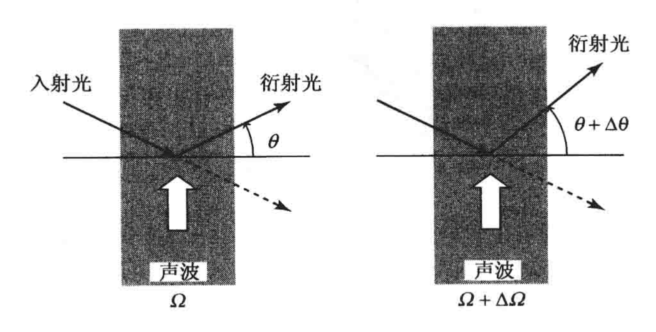


图 9.26　声波频率从Ω变化至$\Omega+\Delta\Omega$，引起衍射光束的方向改变为$\Delta\theta$

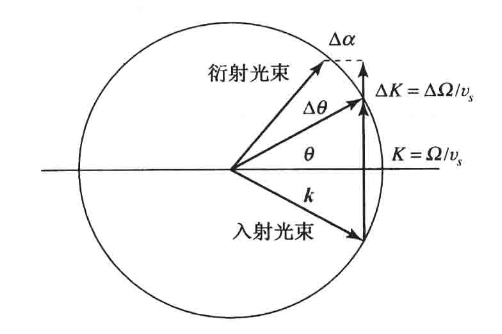


图 9.27　动量图，示意了声波频率从Ω变化至$\Omega+\Delta\Omega$，引起衍射光束的方向从θ至$\theta+\Delta\theta$。$\Delta\alpha$是动量不匹配。K 是声波波数，v_s 是声速

首先假设满足布拉格条件式（9.8-12）。动量矢量图如图 9.27 为闭合曲线，光束沿如式（9.8-15）所定义的θ_B方向发生衍射。重新改写布拉格条件为

$$2k\sin\theta_B = K = \frac{\Omega}{v_s} = \frac{2\pi}{v_s}f \tag{9.9-1}$$

其中 k 是光束的波数，K 是声束的波数，v_s 是声速，f 是声波频率。现令声波频率从 f_0 变化至 $f_0+\Delta f$。因为 $K=2\pi f/v_s$，所以引起了声波波数值的改变为$\Delta K=2\pi f/v_s$。现在入射角保持相同（θ_B），衍射光束的波矢的值实质上没有改变，因此它的顶端被约束于一个圆形轨迹，如图 9.27 所示。因此不再闭合动量图，动量不再严格地守恒。光束将沿着如图所示的方向进行衍射。存在动量不匹配$\Delta\alpha$。在这种环境下发生的衍射很可能是由于沿着 x 轴方向的有限的相互作用长度 L 引起的。由于θ和$\Delta\theta$都是很小的且 $k=K\sin\theta$，得到

$$\Delta\theta = \frac{\Delta K}{k\cos\theta_B} = \frac{\lambda}{nv_s\cos\theta_B}\Delta f \tag{9.9-2}$$

其中θ_B是在中心频率 f_0 处的布拉格角度。偏振角度与声波频率的改变成比例。

声－光光束偏转时，偏转角通常很小。对于实际应用，我们感兴趣的是可分辨的点数，也就是$\Delta\theta$超过光束扩张角因子。如果取光束扩张角为

$$\delta\theta = 2\theta_{\text{beam}} = \frac{2\lambda}{\pi n \omega_0} \tag{9.9-3}$$

其中θ_{beam}由式（2.5-22）定义，ω_0是高斯光束的光斑尺寸，可分辨的点数为

$$N = \frac{\Delta\theta}{\delta\theta} = \frac{\pi\omega_0}{2v_s \cos\theta_B}\Delta f = \tau\,\Delta f \tag{9.9-4}$$

其中$\tau=\pi\omega_0/2v_s\cos\theta_B$是声波穿越高斯光束光斑所用的时间，也叫做偏转器的存取时间。

光束偏转器最普通的一个性能因数是存取时间内可分辨点数的总数，表达为感光能力的产物，根据式（9.9-4）为

$$F = \frac{N}{\tau} = \Delta f \tag{9.9-5}$$

因此高的感光能力产物仅仅当带宽（或者频率可调范围）Δf 很大时才能获得。根据图 9.27，布拉格不匹配$\Delta\alpha$会随着Δf 的增加而增加。当布拉格不匹配增加时衍射效率降低。因此频率可调范围Δf 通常是中心频率 f_0的一小部分。因此，在光束偏振器中需要采用高频声波，因为当中心频率高时才有获得大的带宽Δf的可能性。实际上，带宽Δf受到宽带换能器的工作效率和布拉格角度容差限制。后者涉及一事实：合适的入射光束的入射角，因为布拉格匹配衍射是声波频率的函数（$\theta_B=\sin^{-1}$（$\lambda f/2nv_s$））。

例：衍射光束。

考虑采用火石玻璃和声束的偏转系统，该系统可以使得频率从 80MHz 变化到 120MHz：因此Δf=40MHz。令光束直径为 1cm。从表格 9.3 我们可以得到：v_s =3.1×10^{5}cm/s；因此存取时间τ=3.23×10^{-6}s，可分辨点数的数目为$N=\Delta f\tau$约 130。

布拉格相互作用已经用实验的方法证明了[16]，在表面声波之间和限制于薄膜介质波导内的光模式。因为根据式（9.8-30），调制效率依赖于声波强度，声波功率限制于表面附近（距离大约Λ）导致了低的调制或者切换功率。图 9.28 说明一个实验设备，在该设备中 表面声波和光波在单一晶体 $LiNbO_3$ 中引导。介质波导由 Ti 从表面附近的大约 10μm 厚的某一层向外扩散产生，其使得折射率变大。对于晶体中的声光相互作用更高级处理和一些基于此的新设备，学生可以参考文献[6]。

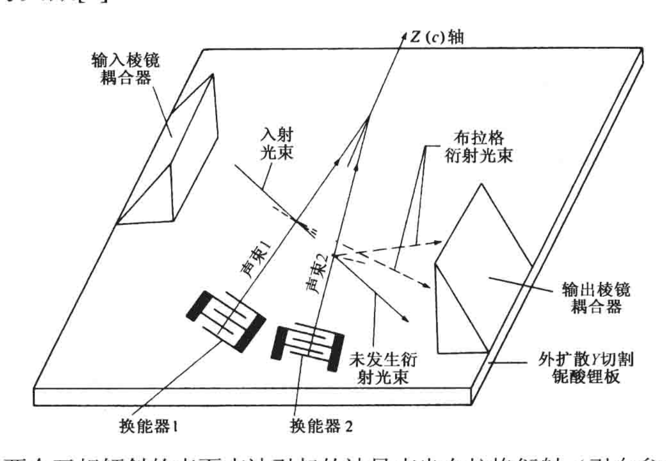


图 9.28　由两个互相倾斜的表面声波引起的波导声光布拉格衍射（引自参考文献[17]）

习题

9.1 推导图 9.3 所示的光场矢量在一个周期内的椭圆轨迹方程式，该方程应是相位延迟的函数（$\Gamma = 0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\pi,\frac{5\pi}{4}$）。

9.2 讨论式（9.2-23）中与电场无关的延迟项$(\omega l / c_c)(n_o - n_e)$对振幅调制器（如图 9.4 所示）的影响。

9.3 应用$\sin\left[a\sin x\right]$的贝塞尔函数展开式并根据调制频率ω_m的谐波函数来表示式（9.2-13），画出出射强度的三次谐波（$3\omega_m$）与基波的比值随Γ_m的变化曲线。如果该比值不超过10^{-2}，问最大允许的Γ_m值是多少?（答案：$\Gamma_m < 0.5$）

9.4 试证明，如果一相位调制光波入射到平方律探测器上，则其输出不含有交变电流的成分。

9.5 利用参考文献[3]和[4]，设计一台在$\nu_m = 10^9\,\text{Hz}$下工作，产生峰值相位偏移为$\delta = \pi/3$的部分负荷的 KDP 行波相位调制器。问调制功率是多少?

9.6 试推导如附录 F 所述的横向$\bar{4}3m$晶体电光调制器的调制功率的表达式[与方程式（9.3-2）类似]。

9.7 对一个 GaAs 横向调制器推导调制功率条件的表达式[与方程式（9.3.2）相当]。

9.8 如果一光线沿着与 z 轴成$\theta(\ll 1)$角的方向传播（如图 9.4 之装置），证明双折射对相位延迟的贡献是

$$\Delta\Gamma_{\text{双折射}} = \frac{\omega l}{2c} n_o \left(\frac{n_o^2}{n_e^2} - 1\right)\theta^2$$

相应的折射率变化为

$$n_o - n_e(\theta) = \frac{n_o\theta^2}{2}\left(\frac{n_o^2}{n_e^2} - 1\right)$$

9.9 推导习题 9.8 中光束的最大允许发散角的近似表达式，使其中$\Delta\Gamma_{\text{双折射}}$不对调制器的工作造成干扰。

答案：$\theta < \left[\lambda / 4 n_o l \left(\frac{n_o^2}{n_e^2} - 1\right)\right]^{1/2}$

9.10 设：折射率椭球 S 定义为

（$\eta_{ij}x_i x_j = 1$）

证明：矢量 $\boldsymbol{N}$

$$N_i = \eta_{ij}x_j$$

在 S 面上点(x_1, x_2, x_3)处与 S 垂直。

9.11 设在KH_2PO_4（KDP）晶体上沿 x 轴施加外电场。证明：施加电场后的KH_2PO_4晶体的主轴坐标系中，x'不变，与 x 方向一致；y'和z'仍在$y - z$面内，但旋转θ角

$$\tan 2\theta = \frac{2r_{41}E_z}{1/n_o^2 - 1/n_e^2}$$

并证明：用 x、y' 和 z' 表示的坐标系中，折射率椭球表达式为

$$\frac{x^2}{n_o^2}+\left(\frac{1}{n_o^2}+r_{41}E_x\tan\theta\right)y'^2+\left(\frac{1}{n_e^2}-r_{41}E_x\tan\theta\right)z'^2=1$$

9.12　将一振幅为 E_0 频率为 $\omega/2\pi$ 的光束分成相同的两束光，一束光不变，而对另一束光按下式进行相位调制：

$$\Delta\phi=a+\delta\cos\omega_m t(\omega_m\ll\omega)$$

再将两束光相干合并（整个过程可以通过在迈克耳孙—莫雷干涉仪或马赫—曾德干涉仪中的一臂上加一个相位调制器来实现）。

（a）将合并场表示为下面的形式

$E_{合}=f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta\cos\omega_m t)}$

（b）证明：当 $a=\pi/2,\delta\ll1$ 时

$$E_{合}\approx E_0(1-\frac{\delta}{2}\cos\omega_m t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\frac{\pi}{4}+(\frac{\delta}{2})\cos\omega_m t]}$$

（c）求出射光束的（近似）频谱。

（d）求光强调制系数 $\dfrac{\left|E_{合}\right|^2}{\left|E_0\right|^2}$ 的一般表达式。

（e）利用（d）的结果，说明怎样得到探测光电流 $I_{测}\propto\left|E_{合}\right|^2$ 与调制信号 $\delta\cos\omega_m t$ 成比例的线性调制响应。

9.13　证明折射率椭球中的三个主矢量 $\boldsymbol{X}'$，$\boldsymbol{X}''$ 和 $\boldsymbol{X}'''$ 相互正交。

9.14　令一晶体主介电轴为 x,y,z，介电张量分量为 $\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\varepsilon_{zz}$。在新的坐标系中 ξ,η,z 中，保持 z 轴不变，ξ,η 各对 z 旋转 θ 角。证明：新坐标系中介电张量为

$$\varepsilon=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}+\delta\sin^2\theta & \delta\sin(2\theta)/2 & 0\\ \delta\sin(2\theta)/2 & \varepsilon_{xx}+\delta\cos^2\theta & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}\end{bmatrix}$$

其中，$\delta\equiv\varepsilon_{yy}-\varepsilon_{xx}$。

9.15　设一晶体主介电轴为 x,y,z，相应的介电张量分量为 $\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\varepsilon_{zz}$。对其施加一外电场（或挤压），产生非对角张量分量 ε_{zy}。

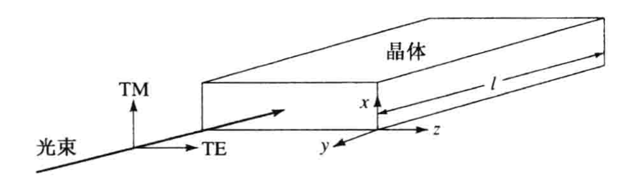
（a）证明：新的主轴系统对 x 轴旋转角度为

$$\theta\cong\frac{\varepsilon_{zy}}{\varepsilon_{yy}-\varepsilon_{zz}}(\varepsilon_{zy}\ll\varepsilon_{yy},\varepsilon_{zz})$$

（b）证明：对 KDP 晶体施加低频外场 $\boldsymbol{E}=\hat{\mathbf{e}}_x E_x$ 使 y,z 轴对 x 轴产生旋转，旋转角度 β 为

$$\beta=-\frac{n_e^2 n_o^2 r_{41}E_z}{n_o^2-n_e^2}$$

9.16　有一 $\mathrm{LiTaO_3}$ 电光波导调制器，如图



（a）证明：相位延迟$\Gamma \equiv \theta_{TE} - \theta_{TM}$为

$$\Gamma = \frac{\omega l}{c}\left[n_o^3 r_{13} - n_e^3 r_{33}\right] E_z$$

（b）说明怎样将该波导：（1）用作振幅调制器，（2）用作相位调制器；并计算所需的调制电压（z轴方向长度$5\mu m$，波长为$\lambda = 0.6328\mu m$）。

9.17　利用$LiNbO_3$制作一 TE–TM 的偏振开关（模式耦合器），外加电场沿x轴，晶体的几何参数同题 9.15。

（a）说明怎样选择合适的空间周期Λ，利用下面的周期直流电场

$$E_x = E_0 \cos\frac{2\pi}{\Lambda} y$$

来消除速率失配问题（$n_o \neq n_e$）。

（b）计算当$\lambda = 1.15\mu m$时的Λ值（参见表 9.2 中的色散数据）。

9.18　在布拉格条件下，推导后退声波的频移表达式。

9.19　设计一个声波调制系统，用来使磁带录音的输出转换到$\lambda_0 = 0.6328\mu m$及$I_{输入}=10^{-3}W$的光束中。确定所需的功率水平以及所有的关键元件的基本特性。（提示：利用磁带盒的声学输出调制一个高频（100MHz）载波，再用它来传感产生一道声束。）

9.20　一个声学驻波会对布拉格衍射光发生什么反应？给出它所造成的频移以及衍射方向。

9.21　利用图 9.21，证明在布拉格条件下，衍射波的波矢改变为

$$\frac{k_{衍射} - k}{k} = 2\sin\theta \frac{v_s}{c}$$

9.22　请查阅参考文献（例如[11]和[13]）来说明布拉格衍射和德拜—席尔斯衍射的不同之处。它们可以分别在什么条件下被观测到？

9.23　晶体中 X 射线衍射的布拉格定律为[12]

$$2d\sin\theta = m\frac{\lambda}{n} \qquad m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

其中d是各相同的原子平面间的距离，θ是入射角，λ / n是衍射辐射的波长。在下列条件下光受到声波的布拉格衍射[见方程式（9.7-3）]：

$$2n\Lambda\sin\theta = m\lambda$$

所以，如果我们将它与 X 射线的结果相比，并令$\Lambda_s = d$，则只有$m=1$的情形是可容许的，试解释其中的差别。对于受声波散射的情况，为什么不能得到与$m=2, 3\cdots$相应的方向θ的衍射光？（提示：X 射线的衍射发生在许多间断的原子平面上，它们可以被理想化地看成无限薄的原子层，对于声波来说它在z方向是连续的，见图 9.20）。

9.24　试设计一个采用$LiTaO_3$晶体的声光偏转系统，用来对一道光束进行扫描，其扫描方式应该与商用电视接收机相似。

参考文献

1. See, for example, J. F. Nye, *Physical Properties of Crystals*. Oxford University Press, New York, 1957, p. 123.
2. Peters, L. C., Gigacycle bandwidth coherent light traveling-wave phase modulators. *Proc. IEEE* **51**:147 (1963).
3. Rigrod, W. W., and I. P. Kaminow, Wideband microwave light modulation. *Proc. IEEE* **51**:137 (1963).
4. Kaminow, I. P., and J. Lin, Propagation characteristics of partially loaded two-conductor transmission lines for broadband light modulators. *Proc. IEEE* **51**:132 (1963).
5. White, R. M., and C. E. Enderby, Electro-optical modulators employing intermittent interaction. *Proc. IEEE* **51**:214 (1963).
6. Yariv, A., and P. Yeh, *Optical Waves in Crystals*. Wiley-Interscience, New York, 1983.
7. Yeh, P., and C. Gu, *Optics of Liquid Crystal Displays*. Wiley, New York, 1999.
8. Brillouin, L., Diffusion de la lumiere et des rayons X par un corps transparent homogene. *Ann. Phys.* **17**:88 (1922).
9. Debye, P., and F. W. Sears, On the scattering of light by supersonic waves. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **18**:409 (1932).
10. Dransfeld, K., Kilomegacycle ultrasonics. *Sci. Am.* **208**:60 (1963).
11. See, for example, R. Adler, Interaction between light and sound. *IEEE Spectrum* **4**(May):42 (1967).
12. Kittel, C., *Introduction to Solid State Physics*, 3rd ed. Wiley, New York, 1967, p.38.
13. Born, M., and E. Wolf, *Principles of Optics*. Pergamon, New York, 1965, Chapter 12.
14. Dixon, R. W., Photoelastic properties of selected materials and their relevance for applications to acoustic light modulators and scanners. *J. Appl. Phys.* **38**:5149 (1967).
15. Pinnow, D. A., L. G. Van Uitert, A. W. Warner, and W. A. Bonner, $PbMO_4$: A melt grown crystal with a high figure of merit for acoustooptic device applications. *Appl. Phys. Lett.* **15**:83 (1969).
16. Kuhn, L. M., L. Dakss, F. P. Heidrich, and B. A. Scott, Deflection of optical guided waves by a surface acoustic wave. *Appl. Phys. Lett.* **17**:265 (1970).
17. Tsai, C. S., Le T. Nguyen, S. K. Yao, and M. H. Alhaider, High performance acousto-optic guided light beam device using two tilting surface acoustic waves. *Appl. Phys. Lett.* **26**:140 (1975).

第 10 章　光产生和光探测中的噪声

10.0　引言

在本章中将研究若干重要物理过程中噪声的影响。我们将“噪声”这一名词看成“信号”同一频谱范围内的随机电磁波。我们将讨论下列情形下的噪声影响。

（1）光功率测量：在此情形下噪声会在测量时造成涨落，所以使能被测得的功率最小值有一个下限。

（2）激光振荡器的谱宽：在单模激光振荡器的输出中存在的不相干自发辐射是有限度的谱线增宽的原因，这种展宽导致了有限的相干时间。

（3）光通信系统：我们将考虑二进位制脉冲编码调制的光通信系统的情形，在这种系统中信息是由一连串 1 和 0 的脉冲来携带的。我们将证明，噪声的存在将使得重现的脉冲列中的任一脉冲都具有一定的误差概率（误码率）。

在本章中我们考虑利用光生载流子的光探测器，它们包括光电倍增管、光电导探测器、p-n 结光电二极管和雪崩光电二极管。它们是在量子电子学和光通信领域内采用的主要探测器，因为其灵敏度高，而且响应时间十分短。至于其他类型的探测器，如辐射热计、戈莱盒和热电偶，它们的工作过程和吸收辐射引起的温度变化有关，这些不在讨论之列[1]。

本章将详细讨论两种类型的噪声。第一类为热噪声（约翰孙噪声），它代表热对电荷载流子的激励而产生的噪声功率，该类噪声的表达式可以由一般传统的热力学或是对一个特殊模型进行统计力学的处理推导而得，对后者来说噪声的物理根源会比较清楚。第二类为散粒噪声（或是在光电导探测器中的产生——复合噪声），它是当探测器与辐射场发生相互作用时电子的发射和产生的随机性所造成的。即使在零度时，热激励和载流子的产生可被忽略，这种噪声也仍然存在。在这种情形下，它来源于被测信号本身产生载流子的随机性。在信号产生的散粒噪声极限下的探测，称为量子极限探测，因为相应的灵敏度由量子力学的测不准原理决定，这一点将在下一章中进行讨论。在第 18 章中将进一步讨论由测不准原理、真空漂移和光场波动噪声和压缩[2~4]。

10.1　噪声功率引起的限制

光功率的测量

考虑噪声场存在时对光学信号场

$$v_S(t) = V_S \cos \omega t \tag{10.1-1}$$

进行测量的问题，其中ω是频率，V_S 是实常数。附加于信号上的瞬时噪声场可分解为两部分，一部分与信号同相位，一部分与信号的相位差90°。于是有

$$v_N(t) = V_{NC}(t)\cos \omega t + V_{NS}(t)\sin \omega t \tag{10.1-2}$$

其中$V_{NC}(t)$和$V_{NS}(t)$为缓变的[与$\exp(i\omega t)$比较]、随机的互不关联的函数，其平均值为零。$V_{NC}(t)$和$V_{NS}(t)$都为实数。探测器处的总电场$v(t)=v_S(t)+v_N(t)$可以写成

$$v(t)=\mathrm{Re}\{[V_S+V_{NC}(t)-iV_{NS}(t)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\} \tag{10.1-3}$$

$$\equiv \mathrm{Re}[V(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}] \tag{10.1-4}$$

其中 $V(t)$ 是总场的复解析表达式。总场（信号加噪声）相矢量$V(t)$如图 10-1 所示。对于光学探测所关注的大多数情形，噪声的来源是大量互相独立事件共同作用的结果。在这种情形下统计学的中心极限定理[5]告诉我们，在时刻 t，$V_{NC}(t)$之值位于V_{NC}和$V_{NC}+\mathrm{d}V_{NC}$之间的概率函数由下列高斯函数所描述：

$$p(V_{NC})\,\mathrm{d}V_{NC}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-V_{NC}^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}V_{NC} \tag{10.1-5}$$

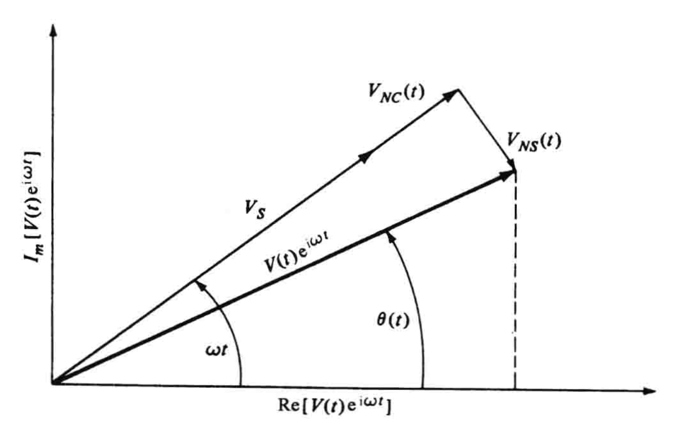


图 10.1　相矢量图表明了时刻t总场（信号＋噪声）的相矢量$V(t)$，瞬时电场由$V(t)\exp(i\omega t)$的水平投影给出

其中σ是分布的标准偏差。将上式中V_{NC}的换成V_{NS}就可得到$p(V_{NS})$的表达式。因为在$-\infty$和$+\infty$之间找到$V_{NC}(t)$之值的概率是 1，所以

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(V_{NC})\,\mathrm{d}V_{NC}=1 \tag{10.1-6}$$

由式（10.1-5）可知，V_{NC}的系综平均值$\overline{V_{NC}}$为零，方均值是

$$\overline{V_{NC}^2}=\overline{V_{NS}^2}=\int_{-\infty}^{\infty} V_{NC}^2 p(V_{NC})\,\mathrm{d}V_{NC}=\sigma^2 \tag{10.1-7}$$

在时刻 t，同时在很多系统内测量 A（尽我们的知识所知，它们是相同的）可以获得 $A(t)$ 的系综平均值$\overline{A(t)}$。算术的

$$\overline{A}=\int_{-\infty}^{\infty} Ap(A)\mathrm{d}A$$

由式（10.1-5）可知，其中 $p(A)$ 是随机变量 A 的概率分布函数。对于时间恒定现象，系综平均值可以用时间平均值代替

$$\overline{A}=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A(t)\mathrm{d}t$$

其中 T，必须接近无穷，求平均是对时间周期（积分时间）进行的。

从图 10.1 可以估计出 $\bar{V}_{NC}(t)=0$ 的原因。$V_{NC}(t)$ 与 V_S 同相和异相的概率是相同的，因此平均值为 0。

利用式（10.1-2），可以获得场 $v(t)$ 相应的"功率"为

$$\begin{aligned} P(t) &= \tfrac{1}{2}(V(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})(V^*(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}) \\ &= \tfrac{1}{2}(V_S^2 + 2V_S V_{NC} + V_{NC}^2 + V_{NS}^2) \end{aligned} \tag{10.1-8a}$$

$P(t)$ 的系综平均值（或长时间平均值）是

$$\bar{P} = \overline{P(t)} = \tfrac{1}{2}(\overline{V_S^2} + \overline{V_{NC}^2} + \overline{V_{NS}^2}) = \tfrac{1}{2}(\overline{V_S^2} + 2\sigma^2) \tag{10.1-8b}$$

其中用到了 $\bar{V}_{NC}(t)=0$ 以及式（10.1-7）。随时间变化的功率 $P(t)$ 及其长时间平均值（或系综平均值）P 的物理意义如图 10.2 所示。

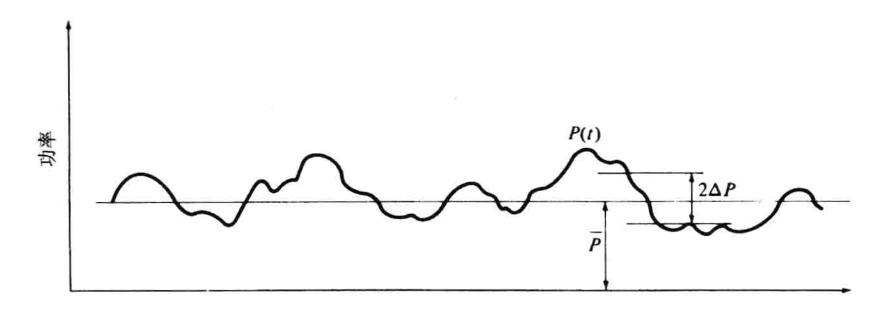


图 10.2　噪声功率和信号功率混合，引起总功率的涨落，功率测量的精确度受到均方根涨落 ΔP 的限制

由于功率 $P(t)$ 的涨落性质，显然对其做任何测量均包含着不确定性，这是由于式（10.1-8a）中的 V_{NC} 和 V_{NS} 的随机特性造成的。为了对功率测量的不确定性做一个度量，我们认为采用均方根（rms）功率偏差

$$\Delta P = \left[\overline{\left(P(t)-\bar{P}\right)^2}\right]^{1/2} \tag{10.1-9}$$

来描述是合理的。

把式（10.1-8a）和式（10.1-8b）代入式（10.1-9）,利用

$$\overline{V_{NC}^4} = \int_{-\infty}^{\infty} V_{NC}^4 p(V_{NC})\,\mathrm{d}V_{NC} = 3\sigma^4 \tag{10.1-10}$$

和 $\overline{V_{NC}^2} = \overline{V_{NS}^2} = \sigma^2$，经过一些计算后，得到

$$\Delta P = \sigma(\overline{V_S^2} + \sigma^2)^{1/2} = \sigma(2P_S + \sigma^2)^{1/2} \tag{10.1-11}$$

按照式（10.1-8a），可以联想到 V_{NC} 和 V_{NS} 为零时所测得的功率，即信号功率 $P_S = \dfrac{1}{2}\overline{V_S^2}$。

噪声存在时能测得的信号功率的极小值是一个在实用上甚为重要的问题。可以将此功率 $P_{极限}$ 任意地选成信号功率 P_S 等于不确定的均方根功率 ΔP 时的信号功率。

于是从式（10.1-11）出发可以写出

$$P_{极限} = \sigma\left(2P_{极限} + \sigma^2\right)^{1/2}$$

或者，对 $P_{极限}$ 求解即有

$$P_{极限} = \sigma^2(1+\sqrt{2}) = P_N(1+\sqrt{2}) \tag{10.1-12}$$

其中 $P_N = \sigma^2 = \frac{1}{2}(\bar{V}_{NC}^2 + \bar{V}_{NS}^2)$ 是噪声功率。另一种惯用的方法是将最小可测得的信号功率定义为与 P_N 相等，而不是上述的 $2.414P_N$，这样的简化是可以理解的，因为所选择的 $\Delta P = P_S$ 也带有一些任意性。无论在哪种情况下，都应记得的主要结论是，在探测的极限值附近，均方根功率的涨落与信号功率是可以互相比拟的。下一步的工作是找出噪声功率的主要来源以及使之减少到极小值的方法。我们将此放在本章的稍后部分和第 11 章讨论。在这之前，我们必须导出一些处理随机过程的数学工具。

10.2　噪声——基本定义和定理

实函数 $v(t)$ 及其傅里叶变换 $V(\omega)$ 之间的关系由下式给出

$$V(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} v(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{10.2-1}$$

和

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{10.2-2}$$

在测量信号 $v(t)$ 的过程中，我们不可能像式（10.2-1）那样在所需的无穷长的时间间隔内来求 $V(\omega)$。如果测量的时间是 T，我们可以认为当 $t \leqslant -T/2$ 和 $t \geqslant T/2$ 时函数 $v(t)$ 为零，而由式（10.2-3）代替式（10.2-1）

$$V_T(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} v(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{10.2-3}$$

因为 $v(t)$ 为实数，所以

$$V_T(\omega) = V_T^*(-\omega) \tag{10.2-4}$$

T 通常被称为系统的时间分辨率或积分时间。让我们来求与 $v(t)$ 有关的平均功率 P。将瞬时功率看成是 $v^2(t)$，则得到

$$P = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} v^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left\{v(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty} V_T(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\right]\right\}\mathrm{d}t \tag{10.2-5}$$

为了便于理解，将 $v(t)$ 看成是加在 1Ω电阻上的电压。

将式（10.2-3）和式（10.2-4）代入式（10.2-5）并交换积分的次序，有

$$P = \frac{2\pi}{T}\int_{-\infty}^{\infty} |V_T(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega \tag{10.2-6}$$

或

$$P = \frac{4\pi}{T}\int_{0}^{\infty} |V_T(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega \tag{10.2-7}$$

其中用到了

$$\lim_{T\to\infty}(2\pi)^{-1}\int_{-T/2}^{T/2}\mathrm{d}t\exp\left[i(\omega+\omega')t\right]=\delta(\omega+\omega')$$

如果将 $v(t)$ 的谱密度函数 $S_v(\omega)$ 定义为

$$S_v(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{4\pi|V_T(\omega)|^2}{T} \tag{10.2-8}$$

那么根据式（10.2-7），$S_v(\omega)\mathrm{d}\omega$ 就代表 $v(t)$ 的频率分量位于 ω 和 $\omega+\mathrm{d}\omega$ 之间的那部分的平均功率。从这样的物理解释出发可以将 $v(t)$ 的光谱按图 10.3 所示的各频率区间分开，再测量每一个滤波器的功率输出 $S_v(\omega_i)\Delta\omega_i$[6]，从而获得谱密度函数 $S_v(\omega)$。

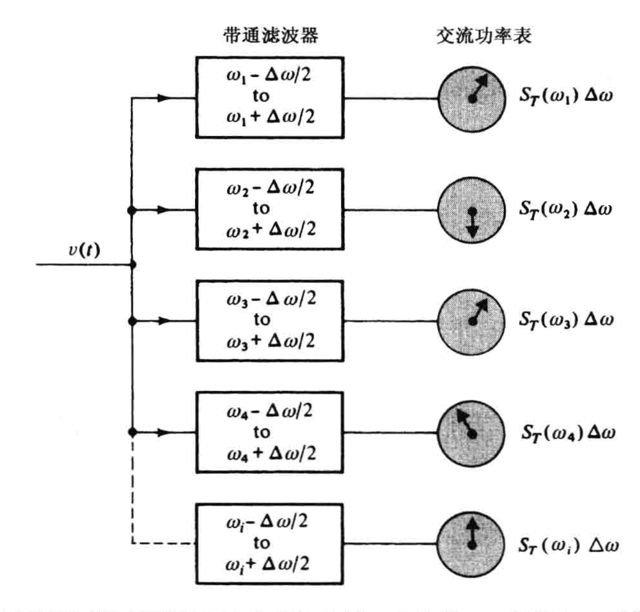


图 10.3　如何由测量不同频率区域内的功率而获得一个信号 $v(t)$ 的谱密度函数 $S_T(\omega)$ 的示意图

维纳–肯欣（Wiener-Khintchine ）定理

下面来推导另一个有关谱密度函数的公式。设场 $v(t)$ 和它的延迟 $v(t+T)$ 乘积的时间平均为

$$C_v(\tau)=\overline{v(t)v(t+\tau)} \tag{10.2-9}$$

$C_v(\tau)$ 称为函数 $v(t)$ 的自相关函数。应用式（10.2-2）对式（10.2-9）求积分：

$$\begin{aligned}C_v(\tau)&=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}v(t)v(t+\tau)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-T/2}^{T/2}\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\omega'\,\mathrm{d}t\;V_T(\omega)V_T(\omega')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega+\omega')t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\end{aligned} \tag{10.2-10}$$

当 $T\to\infty$

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2}\mathrm{d}t\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega+\omega')t}=2\pi\delta(\omega+\omega') \tag{10.2-11}$$

可得

$$C_v(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{2\pi}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V_T(\omega')V_T(\omega)\delta(\omega+\omega')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\omega'$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\pi|V_T(\omega)|^2}{T}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega \qquad (10.2\text{-}12)$$

按照式（10.2-8），$4\pi|V_T(\omega)|^2/T$ 是与 $S_v(\omega)$ 和 $v(t)$ 有关的谱密度函数，因此有

$$C_v(\tau) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} S_v(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega \qquad (10.2\text{-}13)$$

由式（10.2-1）得

$$S_v(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C_v(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau \qquad (10.2\text{-}14)$$

最后两个方程说明：谱密度函数 $S_v(\omega)$ 和自相关函数 $C_v(\tau)$ 是傅里叶变换对，这就是维纳–肯欣（Wiener-Khintchine）定理，由美国和俄国的数学家各自独立推导得出，是研究信息论和随机过程的重要工具。我们在这里给出这个定理，是因为通常通过实验和理论推导，较容易得到 $C_v(\tau)$，从而可以通过傅里叶变换来得到 $S_v(\omega)$。

10.3　一列随机发生的事件的谱密度函数

考虑一个与时间有关的随机变量 $i(t)$，它由大量的发生在随机时刻 t_i 的独立事件 $f(t-t_i)$ 所组成。例如，事件可以是光子的到达或者由于光子的到达引起的电子的产生。在周期 T 内对 $i(t)$ 的观测，有

$$i_T(t) = \sum_{i=1}^{N_T} f(t-t_i),\quad 0\leqslant t\leqslant T \qquad (10.3\text{-}1)$$

其中 N_T 是在时间 T 内发生的事件的总数。这里我们假设：一个给定事件在任何时间间隔内发生的概率在整个间隔时间 T 内是均匀分布的。等价地来说，在观测周期 T 内，发生 n 次事件的概率 p（n）由泊松分布函数[6]表示

$$p(n) = \frac{(\bar{n})^n\mathrm{e}^{-\bar{n}}}{n!}$$

$\bar{n}$ 是发生在观测周期 T 内的事件平均数。随机函数 $i(t)$ 的典型例子有，热阴极（在温度受限制的条件下）发出的热电子发射电流，或是表面上的光电子发射形成的电子流。在这些情形中 $f(t-t_i)$ 代表在时刻 t_i 单一电子的发射引起的电流。

按照式（10.2-3），$i_T(t)$ 的傅里叶变换由下式给出

$$I_T(\omega) = \sum_{i=1}^{N_T} F_i(\omega) \qquad (10.3\text{-}2)$$

式中 $F_i(\omega)$ 是 $f(t-t_i)$ 的傅里叶变换

$$F_i(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_i)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_i}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_i}F(\omega) \qquad (10.3\text{-}3)$$

这里假设：与观测周期 T 相比较，独立事件 $f(t-t_i)$ 在很短的时间内就结束了，因此积分限可以用$-\infty$到∞来代替 0 到 T。

由式（10.3-2）和式（10.3-3）得到

$$|I_T(\omega)|^2 = |F(\omega)|^2 \sum_{i=1}^{N_T}\sum_{j=1}^{N_T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t_i-t_j)} = |F(\omega)|^2 \left(N_T + \sum_{i\neq j}^{N_T}\sum_{j}^{N_T} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t_j-t_i)}\right) \tag{10.3-4}$$

如果将式（10.3-4）对一个含有大量物理上相同系统的系综求平均，式（10.3-4）右方第二项与 N_T 相比可以忽略不计，因为 t_i 是随机的。其结果是

$$\overline{|I_T(\omega)|^2} = \bar{N}_T\,|F(\omega)|^2 \equiv \bar{N}T\,|F(\omega)|^2 \tag{10.3-5}$$

式中横杠代表系综平均值，$\bar{N}$ 是事件发生的平均速率，所以 $\bar{N}_T=\bar{N}T$。函数 $i_T(t)$ 的谱密度函数 $S_i(\omega)$ 可根据式（10.2-8）和式（10.3-5）给出

$$S_i(\omega) = 4\pi\bar{N}|F(\omega)|^2 \tag{10.3-6}$$

在实际中我们更常用的是谱密度函数 $S(\nu)$，它的定义是频率在 ν 到 $\nu+\mathrm{d}\nu$ 之间的平均功率等于 $S(\nu)\mathrm{d}\nu$。不难证明 $S(\nu)\mathrm{d}\nu=S(\omega)\mathrm{d}\omega$，因为 $\omega=2\pi\nu$，所以

$$S_i(\nu) = 8\pi^2\bar{N}|F(2\pi\nu)|^2 \tag{10.3-7}$$

上面的这一结果即所谓卡森定理，它的用途将在 10.4 节谈到，将用它来推导与光学探测有关的许多不同的物理过程的谱密度函数。

方程式（10.3-7）的推导适用于各独立事件 $f(t-t_i)$，除了时间上的差别之外皆是全同的情形。也有一些物理现象中的独立事件还可能与一个或多个附加的参量有关。将该参量（或一群参量）用 α 代表，则可以将 α 几乎相同的那类事件 $f_\alpha(t-t_i)$ 选取出来，再利用式（10.3.7）直接得到

$$S_\alpha(\nu) = 8\pi^2\bar{N}(\alpha)|F_\alpha(2\pi\nu)|^2\Delta\alpha \tag{10.3-8}$$

它代表该类事件对 $S(\nu)$ 的贡献。$F_\alpha(\omega)$ 是 $f_\alpha(t)$ 的傅里叶变换，所以 $\bar{N}(\alpha)\Delta\alpha$ 为 α 参量位于 α 和 $\alpha+\Delta\alpha$ 之间的事件每秒发生的平均次数，显然

$$\int_{-\infty}^{\infty}\bar{N}(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \bar{N}$$

α 的概率分布函数是 $p(\alpha)=\bar{N}(\alpha)/\bar{N}$，所以

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{\bar{N}}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{N}(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = 1 \tag{10.3-9}$$

将式（10.3-8）对所有的类别 α 求和，并用其发生的概率 $p(\alpha)\Delta\alpha$ 对各类别进行加权，得

$$\begin{aligned} S_i(\nu) &= \sum_\alpha S_\alpha(\nu) = 8\pi^2\sum_\alpha \bar{N}(\alpha)|F_\alpha(2\pi\nu)|^2\Delta\alpha \\ &= 8\pi^2\bar{N}\sum_\alpha |F_\alpha(2\pi\nu)|^2 p(\alpha)\,\Delta\alpha \\ &= 8\pi^2\bar{N}\int_{-\infty}^{\infty}|F_\alpha(2\pi\nu)|^2 p(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = 8\pi^2\bar{N}\,\overline{|F_\alpha(2\pi\nu)|^2} \end{aligned} \tag{10.3-10}$$

其中横线代表对α求平均。式（10.3-10）是式（10.3-7）的推广，它适用于各个事件的特征不但涉及时间t_i，还与其他的一些参量有关的情况。在本章中我们还要进一步利用它来推导光电导探测器的噪声频谱，在此情况下α代表光激发载流子的寿命。

10.4　散粒噪声

现在来考察运动电荷载流子的随机产生和流动所形成的电流的谱密度函数，该电流被称为“散粒噪声”[7]。为了具体起见，考虑图 10.4 所示的情形，其中电子自电极A无规地被发射进入真空，再被电极B收集，B的电位比A略高。电极A的电子平均发射率是$\bar{N}=\bar{I}/e$，其中$\bar{I}$是平均电流，电子电荷为$-e$。在外部电路中观测到的单个电子形成的电流脉冲是

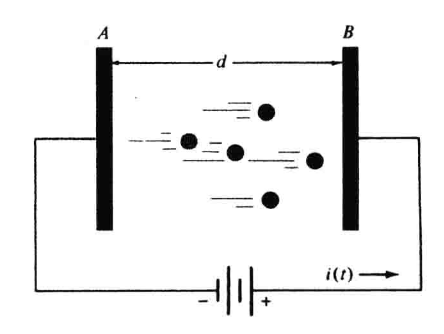


图 10.4　两个电极间的无规则电子流，该示意图被用来推导散粒噪声的公式

$$i_e(t)=\frac{ev(t)}{d} \tag{10.4-1}$$

其中$v(t)$是瞬时速率，d是A和B之间的距离。为了证明式（10.4-1），考虑下面的情况，将运动电子用一块面积很大、总电荷为$-e$的薄电荷层代替，它在两个极板之间移动，如图 10-5 所示。很容易证明（见习题 10.1），应用关系式$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon$，则运动电荷层在左边电极板上感生的电荷是

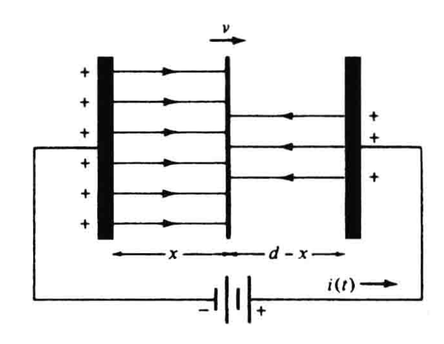


图 10.5　在两个电极之间的薄电荷层引起的感应电荷和电场线

$$Q_1=\frac{e(d-x)}{d} \tag{10.4-2}$$

同样在右边电极板上感生电荷是

$$Q_2=\frac{ex}{d} \tag{10.4-3}$$

式中 x 是电荷层离开左边电极的距离，于是单个电子在外电路中形成的电流是

$$i_e(t) = \frac{\mathrm{d}Q_2}{\mathrm{d}t} = \frac{e}{d}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{e}{d}v(t) \tag{10.4-4}$$

这与式（10.4-1）一致。

单个电子的电流脉冲的傅里叶变换是

$$F(\omega) = \frac{e}{2\pi d}\int_0^{t_a} v(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{10.4-5}$$

其中 t_a 为一个在 $t=0$ 时发射的电子到达电极 B 的时间。如果电子在电极间的渡越时间很短，以致于在角频率为 ω 时

$$\omega t_a \ll 1 \tag{10.4-6}$$

即 $i_e(t) \sim \delta(t)$，我们就可将式（10.4-5）中的 $\exp(-i\omega t)$ 用 1 代替而得到

$$F(\omega) = \frac{e}{2\pi d}\int_0^{t_a} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \frac{e}{2\pi} \tag{10.4-7}$$

因为根据定义 $x(t_a)$ 等于 d。将式（10.4-7）用于式（10.3-7）并利用 $\bar{I} = e\bar{N}$，则有

$$S(\nu) = 8\pi^2\bar{N}\left(\frac{e}{2\pi}\right)^2 = 2e\bar{I} \tag{10.4-8}$$

根据式（10.2-8）后的讨论，在频率间隔 ν 和 $\nu+\Delta\nu$ 之间与电流相联系的功率[按式（10.2-5）的含义]，应该是 $S(\nu)\Delta\nu$。采用一个频率为 ν 的等效噪声产生器来代表上述功率是很方便的，其均方电流振幅是

$$\overline{i_N^2}(\nu) \equiv S(\nu)\,\Delta\nu = 2e\bar{I}\,\Delta\nu \tag{10.4-9}$$

上面描述的噪声机理被称为所谓的散粒噪声。

应当指出，式（10.4-9）中的 e 是粒子的电荷，它形成了电荷流。假想这些载流子的电荷是 $2e$，那么在同样的平均电流 $\bar{I}$ 的条件下，散粒噪声功率将会加倍。相反，如果单个电荷之值趋于零，散粒噪声也会随之消失。它所反映的事实是，散粒噪声是由于电荷载流子的不连续性以及电子的杂乱无章的发射（单位时间内发射的电子数遵从泊松统计[5~7]）形成的电流涨落而引起的。

涨落与平均电流之比值随着事件次数的增加而减小。由于事件服从泊松统计，我们有（文献[5]或者在 10.3 节中从泊松分布直接推导出来）$(\Delta n)^2 \equiv (n-\bar{n})^2 = \bar{n}$。因此涨落与平均电流之比为

$$\frac{\Delta n}{\bar{n}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}$$

其中 n 是观测时间内的事件数，$\bar{n}$ 是 n 的平均值。另有一点值得记住的是，尽管 $\bar{I}$ 出现在式（10.4-9）的右端，但 $\overline{i_N^2}(\nu)$ 代表频率近 ν 的交变电流。

10.5　热噪声（约翰孙噪声）

约翰孙或奈奎斯特噪声描写跨过一个耗能电路元件的电压涨落，参见文献[8,9]。这种涨

落常是由电荷载流子的热运动引起的。这里用“载流子”这一名词而不是“电子”，它包含离子导电或者半导体中的空穴导电。当考虑整个体积时，电阻中的电中性条件应得到满足，但是在局部范围内载流子的无规热运动将引起电荷梯度的涨落，从而引起了相应的涨落（交变的）电压。如果将第二个电阻与第一个并联，上述由热而感生的电压会在第二个电阻中产生电流，因而引起对第二个电阻的功率转换。相同的论点应用到第二个电阻上，那么在热平衡时离开每个电阻的净功率为零。这就是所谓的热噪声，其推导如下。

考虑将处于温度 T 下的两个相同的电阻 R 用传输线连结起来的情形，如图 10.6 所示。令电阻 R 之值等于传输线的特征阻抗 Z_0，所以在两端不发生反射。传输线上能维持的行进电压波的形式为

$$v(t) = A\cos(\omega t \pm kz) \tag{10.5-1}$$

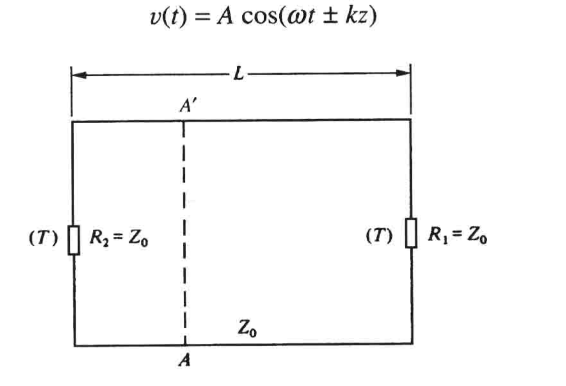


图 10.6　特征阻抗为 Z_0 的无损耗传输线将两个温度为 T 的匹配负荷 $(R = Z_0)$ 连接起来

其中 A 是常数，ω是频率，$k = 2\pi/\lambda$ 是波数，相速度是$c = \omega/k$。为了简单起见，要求允许的解在距离为 L 的范围内具有周期性，所以如果将解延伸到$0 \leqslant z \leqslant L$限度之外，应得到

$$v(t) = A\cos\left[\omega t \pm k(z+L)\right] = A\cos(\omega t \pm kz)$$

这就是所谓的周期性边界条件。它广泛地应用于热力学或固体物理学中类似的情况，用于推导黑体辐射密度或晶体中的电子态密度。周期性边界条件被满足的条件为

$$kL = 2m\pi, \quad m = 1, 2, 3, \cdots \tag{10.5-2}$$

所以两个相邻的模的 k 值之差是

$$\Delta k = \frac{2\pi}{L} \tag{10.5-3}$$

使 k 值位于 0 到 $+k$ 之间的模数是

$$N_k = \frac{k}{\Delta k} = \frac{kL}{2\pi} \tag{10.5-4}$$

或者利用 $k = 2\pi\nu/c$ 可得

$$N(\nu) = \frac{\nu L}{c}$$

这是频率在 0 到 ν 之间的正向传播的模的数目。根据式（10.5-1），负 k 值与沿着$-z$ 方向传播的波相对应。因此在本书中仅限于向$+z$ 方向传输功率的模式。

在单位频率间隔中模的数目是

$$p(\nu)=\frac{\mathrm{d}N(\nu)}{\mathrm{d}\nu}=\frac{L}{c} \tag{10.5-5}$$

现在考虑穿过任意平面 $A-A'$ 而向 $+z$ 方向传播的功率流。显然，由于不存在反射，该功率必须产生于 R_2。因为功率是由系统的电磁模所携带的，所以有

功率＝（能量 / 距离）（能量的速度）

将光速写成 c，可得到频率在 ν 和 $\nu+\Delta\nu$ 之间的功率 P 是

$$P=\left(\frac{1}{L}\right)(\nu\text{和 }\nu+\Delta\nu\text{ 间的模式数})\ (\text{每一模式能量})(c)$$

$$=\left(\frac{1}{L}\right)\left(\frac{L}{c}\Delta\nu\right)\left(\frac{h\nu}{\mathrm{e}^{h\nu/kT}-1}\right)(c)$$

或

$$P=\frac{h\nu\,\Delta\nu}{\mathrm{e}^{h\nu/kT}-1}\approx kT\,\Delta\nu\quad(kT\gg h\nu) \tag{10.5-6}$$

其中我们用到由文献[10]给出的一个表达式，即在热平衡条件下一个模式的能量是

$$E=\frac{h\nu}{\mathrm{e}^{h\nu/kT}-1} \tag{10.5-7}$$

在 17.3 节（见式（17.3-21））中，从不同的观点出发也可以得到这一结论。在右方的电阻也会产生相等的噪声功率并且耗散在左方的电阻上，所以当热平衡时穿过任何平面的净功率是零。

由于阻抗是匹配的，因此式（10.5-6）给出的功率代表电阻产生的最大噪声功率。如果与 R 并联的负荷电阻不等于 R，它传出的噪声功率就会小于式（10.5-6）之值。在电路中一个电阻 R 产生噪声功率的情形可以由下列两种等效电路之一代替：与 R 串联的噪声发生器，其均方振幅电压是

$$\overline{v_N^2}(\nu)=\frac{4h\nu R\,\Delta\nu}{\mathrm{e}^{h\nu/kT}-1}\underset{kT\gg h\nu}{\approx}4kTR\,\Delta\nu \tag{10.5-8}$$

或是与 R 并联的噪声电流发生器，其均方值是

$$\overline{i_N^2}(\nu)=\frac{4h\nu\,\Delta\nu}{R(\mathrm{e}^{h\nu/kT}-1)}\underset{kT\gg h\nu}{\approx}\frac{4kT\,\Delta\nu}{R} \tag{10.5-9}$$

电阻的噪声表示法示于图 10.7。还有许多推导约翰孙噪声公式的其他方法。利用集总电路概念，所做的推导以及一个天线的例子，请读者分别参阅文献[1]和[10]。

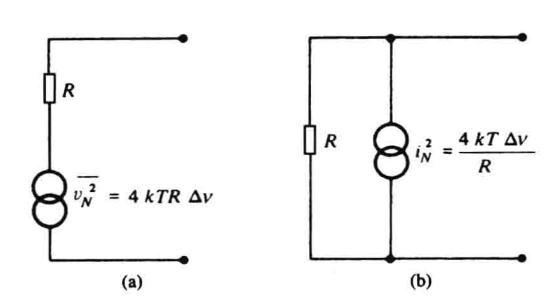


图 10.7　电阻 R 的（a）电压和（b）电流噪声等效电路

约翰孙噪声的统计学推导

导出式（10.5-6）的约翰孙噪声的推导在很大程度上与热力学和统计力学的考虑有关。应用本章给出的数学工具，从电阻的一个物理模型出发求得热噪声的公式，也许是有指导意义的。所用的模型示于图 10.8。电阻由体积为 $V = Ad$ 的介质组成，其中单位体积含有 N_e 个自由电子。除此之外，每单位体积中还有 N_e 个带正电的离子，因而平均是电中性的。每个电子的无规则运动的平均动能是

$$\bar{E} = \frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}m(\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}) \tag{10.5-10}$$

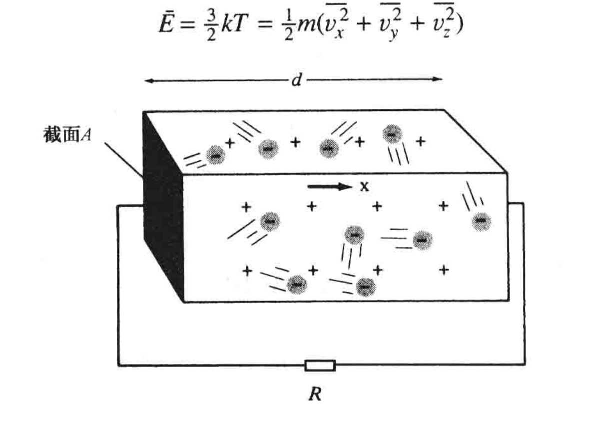


图 10.8　用来推导约翰孙噪声公式的电阻模型

其中 m 是电子质量，$(\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2})$ 代表电子热运动速率平方的平均值。各种各样的散射机理，例如电子—电子、电子—离子、电子—声子碰撞将会扰乱电子的运动，每秒钟的平均碰撞率是 τ_0^{-1}，所以 τ_0 为平均散射时间。这些散射机理是电阻的成因，它引起的直流电导率为

$$\sigma = \frac{N_e e^2 \tau_0}{m} \tag{10.5-11}$$

式中 m 是电子的质量。在半导体中，m 是载流子的有效质量（见 15 章）。方程式（10.5-11）的推导可以在任何一本有关固体物理的入门书籍中找到。因此，样品的直流电阻为

$$R = \frac{d}{\sigma A} = \frac{md}{N_e e^2 \tau_0 A} \tag{10.5-12}$$

而样品的交流电阻 $R(\omega)$ 为 $md\left(1+\omega^2\tau_0^2\right)/Ne^2\tau_0 A$。

下面利用 10.3 节中的结果来处理这个问题，将相继两次散射事件之间的一个电子的运动在外电路中形成的电流脉冲 $i_e(t)$ 看成基本的单一事件。应用式（10.4-1），有

$$i_e(t) = \begin{cases} \dfrac{ev_x}{d} & 0 \leqslant t \leqslant \tau \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{10.5-13}$$

式中 v_x 是速度（假设是常数）的 x 分量，τ 是受观测的电子的散射时间。对 $i_e(t)$ 求傅里叶变换，有

$$I_e(\omega, \tau, v_x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\tau} i_e(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = \frac{(1/2\pi)ev_x}{-\mathrm{i}\omega\mathrm{d}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau} - 1) \tag{10.5-14}$$

因而得到

$$|I_e(\omega,\tau,v_x)|^2=\frac{e^2v_x^2}{4\pi^2\omega^2d^2}(2-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}) \tag{10.5-15}$$

根据式（10.3-10），需要将$\left|I_e(\omega,\tau,v_x)\right|^2$对参量$\tau$和$v_x$求平均值。假设$\tau$和$v_x$为独立变量，则概率函数可以写成

$$p(\tau,v_x)=g(\tau)f(v_x)$$

其中$g(\tau)$是τ的概率分布。如果假设每个载流子单位时间内的碰撞概率为$1/\tau_0$，$g(\tau)$可以写成：

$$g(\tau)=\frac{1}{\tau_0}\mathrm{e}^{-\tau/\tau_0} \tag{10.5-16}$$

$g(\tau)\mathrm{d}\tau$看成碰撞会在τ到$\tau+\mathrm{d}\tau$之间发生的概率，τ_0是碰撞的平均时间。换而言之，$\int\tau g(\tau)\mathrm{d}\tau=\tau_0$。

再对τ求平均得到

$$\overline{|I_e(\omega,v_x)|^2}=\int_0^\infty g(\tau)|I_e(\omega,v_x,\tau)|^2\mathrm{d}\tau=\frac{2e^2v_x^2\tau_0^2}{4\pi^2\mathrm{d}^2(1+\omega^2\tau_0^2)} \tag{10.5-17}$$

第二步对$v_x{}^2$求平均是很简单的，因为只需将式（10.5-17）中的$v_x{}^2$换成平均值$\overline{v_x^2}$就行了。对于一个处于热平衡条件的样品来说，由式（10.5-10）可得$\overline{v_x^2}=kT/m$。所以最后的结果是

$$\overline{|I_e(\omega)|^2}=\frac{2e^2\tau_0^2kT}{4\pi^2m\mathrm{d}^2(1+\omega^2\tau_0^2)} \tag{10.5-18}$$

每秒钟的平均散射数目$\bar{N}$等于电子总数N_eV除以平均散射时间τ_0,即

$$\bar{N}=\frac{N_eV}{\tau_0} \tag{10.5-19}$$

所以由式（10.3-10），可得

$$S_i(\nu)=8\pi^2\bar{N}\overline{\left|I_e(\omega)\right|^2}=\frac{4N_eVe^2\tau_0kT}{m\mathrm{d}^2\left(1+\omega^2\tau_0^2\right)}$$

应用式（10.5-12），并像式（10.4-6）那样只限于考虑$\omega\tau_0\ll1$的情形，得

$$\overline{i_N^2}(\nu)=S_i(\nu)\,\Delta\nu=\frac{4kT\ \Delta\nu}{R(\nu)} \tag{10.5-20}$$

这与式（10.5.9）一致。

10.6　激光振荡器中的自发辐射噪声

在量子电子学和光通信中另外一类噪声也起着相当重要的作用，即激光振荡器和放大器中的自发幅射噪声。在第5章中曾证明，激光放大的一个必要条件是一对能级1和2上的原子数应该反转。如果$E_2>E_1$，则当$N_2>N_1$时才会有增益。假设频率为$\nu\approx(E_2-E_1)/h$的光波在粒子数反转介质中传播，该光波将经受激辐射效应而相干地放大。除此之外，从能级2向能级1的自发辐射会形成噪声辐射而使受激辐射受到污染，自发辐射的部分功率会沿着与

受激辐射几乎相同的方向传播而无法互相分开。这样会产生两个主要的后果。第一激光器的输出具有有限的光谱宽度，在本节中将对它进行讨论。第二由于自发辐射噪声功率和放大信号功率混在一起（见图 10.9），在激光放大器输出端获得的信噪比[10]将受到限制。放大自发辐射和它对信噪比的影响将在 17.3 节中讨论。

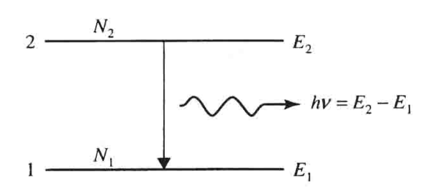


图 10.9　激光振荡器或者光放大提供增益的 $N_2 > N_1$ 时的原子跃迁图。和放大辐射类似的、能量为 $h\nu = (E_2 - E_1)$ 的光子的自发辐射会污染激光振荡器

让我们回到激光振荡器的情形，用如图 10.10 所示的 RLC 电路来代表激光振荡器。激光介质中存在的负损耗（即增益）相当于在等效电路中加一个负电导 $-G_m$，至于在第 6 章中描述的一般损耗机制用正电导 G_0 代表。由式（10.5-9）具有损耗 G_0 的噪声发生器为

$$\overline{i_N^2} = \frac{4\hbar\omega G_0\left(\Delta\omega/2\pi\right)}{e^{\hbar\omega/kT}-1}$$

其中 $\omega = 2\pi\nu$，$\Delta\omega = 2\pi\Delta\nu$，$T$ 是损耗的实际温度。这就是由电阻 $R=1/G_0$ 引起的热噪声。

自发辐射的噪声电流由一个相似的表达式给出：

$$(\overline{i_N^2})_{\text{自发辐射}} = \frac{4\hbar\omega(-G_m)(\Delta\omega/2\pi)}{e^{\hbar\omega/kT_m}-1} \qquad (10.6\text{-}1a)$$

其中$(-G_m)$代表负损耗，T_m 为由粒子数比值确定的温度，并由下式决定

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\hbar\omega/kT_m} \qquad (10.6\text{-}1b)$$

因为 $N_2 > N_1$，所以 $T_m < 0$，$\overline{\left(i_N^2\right)}$ 在式（10.6-1a）中为有限的正数。$\overline{\left(i_N^2\right)}$ 表达式的分母中的 2π因子是由于用 $\overline{i_N^2}(\omega)$ 代替了 $\overline{i_N^2}(\nu)$，即 $\overline{i_N^2}(\omega)\Delta\omega = \overline{i_N^2}(\nu)\Delta\nu$。利用式（10.6-1b），由于自发辐射式（10.6-1a）引起的噪声电流可以写成

$$(\overline{i_N^2})_{\text{自发辐射}} = \frac{4\hbar\omega(G_m)N_2(\Delta\omega/2\pi)}{N_2 - N_1} \qquad (10.6\text{-}2)$$

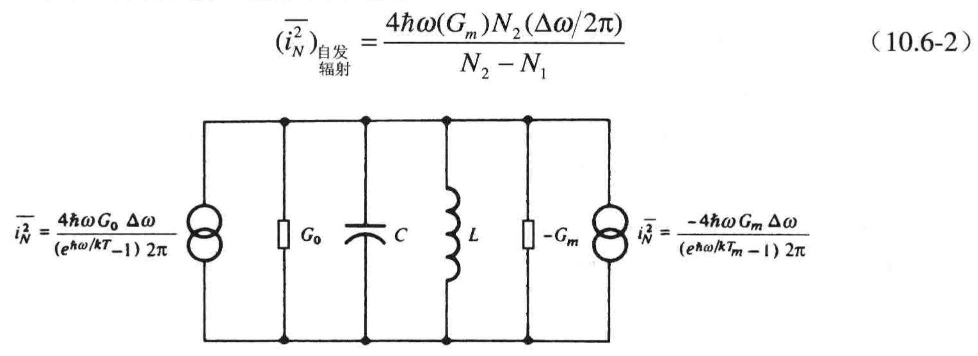


图 10.10　激光振荡器的等效电路

虽然对式（10.6-1a）的严格证明超出了本书讨论范围，但是由下面可以看出其合理性。

因为 $G_m \propto N_2 - N_1$，利用式（10.6-2）可将式（10.6-1a）中的 $\left(\overline{i_N^2}\right)$ 写成

$$(\overline{i_N^2})_{\substack{自发\\辐射}} \propto \frac{-4\hbar\omega\Delta\omega(N_2 - N_1)}{(N_1/N_2)-1} = 4\hbar\omega\Delta\omega N_2 \tag{10.6-3}$$

因此它与 N_2 成正比。G_m 与 N_2–N_1 成正比的合理性可以解释如下：在等效电路中（图 10.10）受激发射功率用 v^2G_m 表示，其中 v 是电压。利用场来研究，该功率与 $E^2(N_2 - N_1)$ 成正比，E 是电场振幅。因为 v 正比于 E，所以 G_m 与 N_2–N_1 成正比。方程（10.6-3）有意义，因为自发辐射功率是由能级 $2 \to 1$ 的跃迁产生的，因而应当与 N_2 成正比。

再回来讨论图 10.10 所示的等效电路，它的品质因子 Q 由下式决定

$$Q^{-1} = \frac{G_0 - G_m}{\omega_0 C} = \frac{1}{Q_0} - \frac{1}{Q_m} \tag{10.6-4}$$

式中 $\omega_0^2 = (LC)^{-1}$ 是 LC 电路的谐振频率。图 10.10 所示的电路的阻抗为

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= \frac{1}{(G_0 - G_m) + (1/i\omega L) + i\omega C} \\ &= \frac{i\omega}{C}\frac{1}{(i\omega\omega_0/Q) + (\omega_0^2 - \omega^2)} \end{aligned} \tag{10.6-5}$$

于是复振幅 $I(\omega)$ 的电流源通过这一阻抗而产生的电压为

$$V(\omega) = \frac{i}{C}\frac{I(\omega)}{[(\omega_0^2 - \omega^2)/\omega] + (i\omega_0/Q)} \tag{10.6-6}$$

在 $\omega = \omega_0$ 的附近，式（10.6-6）变成

$$\overline{|V(\omega)|^2} = \frac{1}{4C^2}\frac{\overline{|I(\omega)|^2}}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\omega_0^2/4Q^2)} \tag{10.6-7}$$

驱动共振电路的各电流源示于图 10.10；因为它们彼此是不相关的，所以可将 $|I(\omega)|^2$ 取作各电流源的均方值之和，根据式（10.6-2）

$$\overline{|I(\omega)|^2} = 4\hbar\omega\left(\frac{G_m N_2}{N_2 - N_1} + \frac{G_0}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}\right)\frac{d\omega}{2\pi} \tag{10.6-8}$$

其中第一项是由于自发辐射引起的，第二项是由于损耗引起的。在光频范围内，例如 $\lambda = 1\mu m$，$T = 300K$ 求得 $\hbar\omega/kT \approx 50$；又因为接近发生振荡时 $G_m \approx G_0$，所以忽略式（10.6-8）中的（约翰孙）热噪声项，因而得到

$$\overline{|V(\omega)|^2_{\omega\cong\omega_0}} = \frac{\hbar G_m}{2\pi C^2}\left(\frac{N_2}{N_2 - N_1}\right)\frac{\omega\, d\omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\omega_0^2/4Q^2)} \tag{10.6-9}$$

式（10.6-9）表示激光器输出的光谱分布。如果用一个高分辨的光谱分析仪来分析激光器的输出，按式（10.6-9），可测得强度为一半之处其谱线宽为

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} \tag{10.6-10}$$

虽然式（10.6-10）是正确的，但它没有多大的实用性，因为由式（10.6-4）可知，Q^{-1} 是两个几乎相等的量的差，对每一个量的精确值都不太清楚。为了避免上述缺点，可证明 Q 与

激光器的功率输出有关系，于是 $\Delta\omega$ 可以作为功率的函数表达出来。

从构成激光器的原子取得的总光振荡功率是

$$P = G_0 \int_0^\infty \frac{|V(\omega)|^2}{\mathrm{d}\omega} \mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{\hbar G_m G_0}{2\pi C^2} \left(\frac{N_2}{N_2 - N_1} \right) \int_0^\infty \frac{\omega \, \mathrm{d}\omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\omega_0/2Q)^2} \tag{10.6-11}$$

因为被积函数在 $\omega \approx \omega_0$ 处极快地达到峰值，因此可以将式（10.6-11）分子中的 ω 由 ω_0 取代再进行积分，得

$$P = \frac{\hbar G_m G_0 Q}{C^2} \left(\frac{N_2}{N_2 - N_1} \right) \tag{10.6-12}$$

这就是希望求得的将 P 与 Q 联系起来的表达式。在激光振荡器中增益非常接近损耗，或者说，$G_m \sim G_0$。将此代入式（10.6-12）则得

$$Q = \frac{C^2}{\hbar G_0^2} \left(\frac{N_2 - N_1}{N_2} \right) P$$

再将它代入式（10.6-10），就有

$$\Delta\nu = \frac{2\pi h \nu_0 (\Delta\nu_{1/2})^2}{P} \left(\frac{N_2}{N_2 - N_1} \right) \tag{10.6-13}$$

式中 $\Delta\nu_{1/2}$ 是无源共振腔的全宽度，其表达式如式（4.7-6）所示为 $\Delta\nu_{1/2} = \nu_0 / Q_0 = (1/2\pi)(G_0/C)$。值得指出的是 $\Delta\nu$ 为量子极限下的激光场谱宽。表达式（10.6-13）称为肖洛–汤讷（Schawlow–Townes）线宽，由两位发明激光器[11]的美国科学家最先推导得到。

式（10.6-13）中 $\Delta\nu$ 并不依赖于 P 的倒数，因为 N_2 和 P 有关。当功率很大时，$P \to \infty$，N_2 与 P 成比例，而 $N_2 - N_1$ 保持在阈值 $(N_2 - N_1)_{阈值}$。从而导致 $\Delta\nu$ 的值与残留功率无关。对此进行定量的分析，我们知道，除非低激光能级的寿命 t_1 为零，否则当 P 增加时，N_1 也会增加，因为进入能级 1 中的增加的（净）感应跃迁率必须等于在稳态 N_1/t_1 时能级 1 的清空率。从而为了保持 $N_2 - N_1$ 及增益为常数，粒子数 N_2 必然增加。当 P 足够大时，N_2 与 P 成比例，式（10.6-13）中的比例 N_2/P 趋向一个常数，导致残留功率与线宽无关。

为了获得功率和粒子数反转因子

$$\mu \equiv \frac{N_2}{(N_2 - N_1)_{阈值}}$$

的依赖关系，来解原子粒子数的速率方程和光子数为 p（p＝光学共振腔中的光子数）的速率方程

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = R - \frac{N_2}{t_2} - (N_2 - N_1)W_i$$

$$\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{N_1}{t_1} + (N_2 - N_1)W_i + \frac{N_2}{t_2} \tag{10.6-14}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = (N_2 - N_1)W_i - \frac{p}{t_c}$$

其中 R 是泵浦率，W_i 是感应跃迁率。粒子数的前两个式子与式（5.7-3）和式（5.7-4）相似（$R_1=0$，$t_2\to t_{自发}$，$R_2\to R$），N_2 和 N_1 分别为激光跃迁能级 2 和 1 上的原子粒子数。第三个等式是总的光子数守恒方程。光子寿命 t_c 与腔的线宽 $\Delta\nu_{1/2}$ 的关系为 $\Delta\nu_{1/2}=(2\pi t_c)^{-1}$。在平衡状态（或者稳态），$\mathrm{d}/\mathrm{d}t=0$，解方程式（10.6-14）可得

$$N_2-N_1=\frac{R(t_2-t_1)}{1+W_it_2}$$
$$N_2=\frac{Rt_2(1+W_it_1)}{1+W_it_2} \tag{10.6-15}$$

因此

$$\frac{N_2}{(N_2-N_1)_{\mathrm{th}}}=\frac{t_2}{t_2-t_1}(1+W_it_1) \tag{10.6-16}$$

其中，下标“th”表示在阈值处的值。激光器的输出功率（包括腔壁的损耗）为

$$P=(N_2-N_1)_{\mathrm{th}}W_ih\nu_0 \tag{10.6-17}$$

将式（10.6-16）代入式（10.6-13），可得

$$\Delta\nu_{激光}=\frac{2\pi h\nu_0(\Delta\nu_{1/2})^2}{P}\frac{t_2}{t_2-t_1}+\frac{c\ \Delta\nu_{1/2}\ \lambda_0^2}{8\pi n^3\ \Delta\nu_{增益}\ V}\frac{t_1}{t_2-t_1} \tag{10.6-18}$$

其中 $\Delta\nu_{增益}$ 是原子跃迁线宽代表激光增益。V 为模体积。在推导式（10.6-18）过程中，用到了

$$(N_2-N_1)_{阈值}=\frac{8\pi\nu_0^2n^3\Delta\nu_{增益}Vt_2}{c^3t_c}\qquad(t_2=t_{自发}) \tag{10.6-19}$$

如果令 $\Delta\nu_{增益}=1/g(\nu)$，则该式可由式（6.1-18）得到。式（10.6-18）右边的第一项为与 P 倒数有关的肖洛–汤讷（Schawlow–Townes）线宽，第二项为与 P 无关的（当 $P\to\infty$）残留线宽。

为了得到数值大小的概念，以氦–氖激光器为例：$\lambda=0.6328\mu\mathrm{m}$，镜面反射率 $R=0.99$，腔长 $l=30\mathrm{cm}$，令 $t_1/t_2=0.1$，可得

$$\Delta\nu_{1/2}(\mathrm{Hz})=\frac{(1-R)c}{2\pi nl}=1.6\times10^6$$
$$\Delta\nu_{激光}(\mathrm{Hz})\cong\frac{10^{-3}}{P(\mathrm{mW})}+3.8\times10^{-4}$$

可知当功率超过几毫瓦时，残留线宽占主导。

10.7　激光线宽的相矢量推导

10.6 节中对激光线宽的推导的优点是严密、概念简练并应用了激光振荡器的简单的电路模型。但这种方法无法分析自发辐射影响线宽的物理机理。本节，我们用不同的方法推导激光线宽公式（10.6-13）。这不仅是为了教学上的完整，也是因为推导的一些中间结果（如相位波动）很有用。

相位噪声

理想的单色辐射场可描述为

$$E(t) = \mathrm{Re}[E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_0 t+\theta)}] \tag{10.7-1}$$

其中 ω_0 为角频率，E_0 为场振幅，θ为常数。实际的场包括激光所遇到的随机相位和振幅涨落，可描述为

$$E(t) = \mathrm{Re}[E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_0 t+\theta(t))}] \tag{10.7-2}$$

其中，$E(t)$，$\theta(t)$在光波周期内是缓变的。

实际激光的振幅和相位的随机涨落是由很多因素造成的。理论上，其中多数可以采取一系列措施而减小，诸如严格控制激光器腔长，减少温度变化，但源于量子力学的基本噪声源仍然存在。这是由于自发辐射不断地将新能量叠加到激光振荡场上。而代表自发辐射能量的场与原有的场是不相干的，从而引起相位或振幅的涨落。应用量子噪声的存在使激光场的演变不同于理想的单色场。

下面我们来考虑单个自发辐射对单个激光振荡模式场的影响。式（10.7-1）所示的场可表示为模为 E_0，以角速率 ω_0 旋转的相矢量，旋转的同时相矢量的模 E_0 保持不变。由于 $E_0^2 \propto \bar{n}$（模式中的平均量子数），未受自发辐射影响的相矢量可表示为如图 10.11 所示的长度为 $\sqrt{n}$ 的相矢量。由自发辐射给光场增加的一个光子，根据相矢量表示法，可表示为一个单位长度的矢量增量。矢量增量通常与原光场的相位不一致，ϕ 角是一个随机变量（在 $0\sim2\pi$ 间均匀分布）。当 $\bar{n}\gg1$时，光场相位变化 $\Delta\theta$ 可表为

$$\Delta\theta_{一次辐射} = \frac{1}{\sqrt{n}}\cos\phi \tag{10.7-3}$$

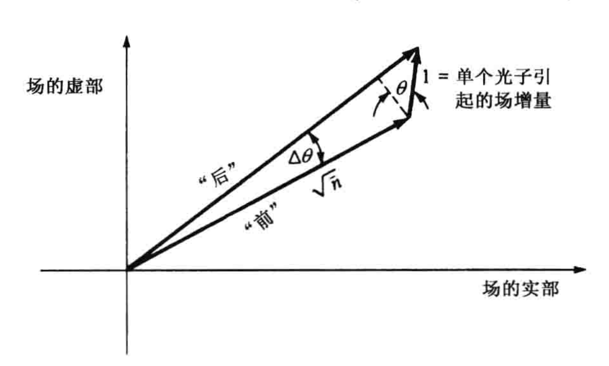


图 10.11　单个自发辐射事件对激光场相位影响的相矢量模型

现在来考虑 N 个自发辐射对激光光场相位的影响。由于ϕ是在$0\sim2\pi$间等概率取值，这是一个无规行走问题。从而可写出

$$\langle[\Delta\theta(N)]^2\rangle = \langle(\Delta\theta_{一次辐射})^2\rangle N \tag{10.7-4}$$

由式（10.7-3）

$$\langle[\Delta\theta(N)]^2\rangle = \frac{1}{n}\langle\cos^2\phi\rangle N$$

其中$\langle\ \rangle$表示对大量单个自发辐射事件的系综平均值。

式（10.7-4）表明在无规行走问题中，经过 N 步的均方值是单步平方值的 N 倍。N 个自发辐射的平均偏差 $\langle\Delta\theta(N)\rangle$ 必然为零。但对单个实验来说，平均偏差并不为零，从而均方差也不为零，可以作为相位涨落的量度。为了得到在时间 t 的均方根相位偏差，需要计算在时间 t 内进入到单激光模式中的自发辐射事件 $N(t)$ 的平均数。

每秒自发辐射的总数为 $VN_2/t_{自发}$，其中 V 是体积，N_2 为激光上能级 2 上单位体积原子总数，$t_{自发}$ 是单个原子在能级 2 的自发辐射寿命。我们假设：$g(v)$ 是归一化的线形函数，自发辐射发生在 Δv 的光谱宽度内。在光谱宽度 Δv 内，每秒自发辐射的数目为（$VN_2/t_{自发辐射}$）$g(v)\Delta v$。注意到：这些自发辐射将蔓延到体积 V 内的所有光模式。每秒辐射到某一模式的跃迁总数为

$$\frac{N_{自发辐射}}{第二个模} = \frac{VN_2}{t_{自发辐射}N_{模式}} g(v)\Delta v \tag{10.7-5}$$

其中 $N_{模式}$ 是在光谱宽度 Δv 内的模式数；根据式（4.0-12）

$$N_{模式} = \frac{8\pi v_0^2\ \Delta v\ Vn^3}{c^3} \tag{10.7-6}$$

物理上，$N_{模式}$ 是与激光跃迁相互作用的模式数，即参与自发辐射的模式数。式（10.7-5）可改写为

$$\frac{N_{自发辐射}}{第二个模} = \left(\frac{N_2}{\Delta N_t}\right)\frac{V\,\Delta N_t}{t_{自发辐射}N_{模式}} g(v)\ \Delta v \tag{10.7-7}$$

式中 ΔN_t 为在阈值处的粒子反转数 (N_2-N_1)。利用阈值粒子数反转式（6.1-18）和式（10.7-6），得到

$$\Delta N_t = \frac{N_{模式}}{Vg(v)\Delta v}\frac{t_{自发辐射}}{t_c}$$

式中 t_c 为共振腔中光子的寿命。因此式（10.7-7）可以写成

$$\frac{N_{自发辐射}}{第二个模} = \frac{\mu}{t_c},\quad \mu \equiv \frac{N_2}{\Delta N_t} = \frac{N_2}{(N_2-N_1)_t} \tag{10.7-8}$$

其中 μ 是粒子数反转因子。式（10.7-8）是在光谱宽度 Δv 内，单位时间跃迁到单个模式上的自发辐射数的表达式。时间 t 内跃迁到单个模式的自发辐射数为

$$N(t) = \frac{\mu}{t_c}t \tag{10.7-9}$$

在理想的四能级激光器中，$N_1=0$、$\Delta N_t=N_2$，即 $\mu=1$；在三能级激光器中则不同，μ 远大于 1，如室温下的红宝石激光器 $\mu\approx 50$（见 6.11 节）。这说明了这样一个事实，在给定增益情况下，三能级激光器中总的受激粒子数 N_2 必须比四能级激光器多（乘以 μ 因子），因为增益与（N_2-N_1）成正比。式（10.7-8）也表明，在阈值以上时，一个激光模式中存在 μ 个自发辐射的光子。

对式（10.7-4）应用式（10.7-9），可以得到 t 秒后，均方根相位偏移为

$$\Delta\theta(t) \equiv \left\langle[\Delta\theta(\mathrm{t})]^2\right\rangle^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{2\bar{n}}\frac{\mu}{t_c}t}$$

由于实验时间 t 的最大值为测量仪器的积分时间 T，因此有

$$\Delta\theta(T) = \sqrt{\frac{1}{2\bar{n}}\frac{\mu}{t_c}T} \tag{10.7-10}$$

由 $\Delta\theta$ 引起的均方根频率偏差为

$$(\Delta\omega)_{\mathrm{rms}} = \frac{\Delta\theta(T)}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{2\bar{n}t_c T}} \tag{10.7-11a}$$

其中 $\bar{n}$ 是激光模式中的平均光子数。可以利用下面的关系式将式（10.7-11a）改写成大家更熟悉的形式

$$P_e = \frac{\bar{n}\hbar\omega_0}{t_c},\quad B = \frac{1}{2T} \tag{10.7-11b}$$

式中 P_e 为原子辐射的能量（即所有有用的功率输出脉冲与由散射及吸收引起功率损耗的总和），B 为相位测量仪器的频宽（以赫兹为单位）。式（10.7-11a）变为

$$(\Delta\omega)_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\frac{\mu\hbar\omega_0}{P_e t_c^2}B} \tag{10.7-12}$$

从实验的角度考虑，$(\Delta\omega)_{\mathrm{rms}}$ 为输出频率为 $\omega(t) \equiv \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ 的仪器输出的均方根偏差。我们把设计一个测量 $(\Delta\omega)_{\mathrm{rms}}$ 的实验作为练习留给大家（习题 10.11）。

环形激光陀螺仪通过比较在环形腔中反向传输的模式的振荡频率来测量旋转。其灵敏度及其所能测量到的最小旋转速率，受限于激光频率的不确定度 $\Delta\omega$。目前实验所达到的探测灵敏度已接近式（10.7-12）所示的量子极限。

激光场的频谱

下面讨论用法布里–珀罗标准具直接测量光场的频谱

$$\mathscr{E}(t) = \mathrm{Re}\left[E(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\omega_0 t+\theta(t)]}\right] \tag{10.7-13}$$

如果法布里–珀罗标准具有足够高的分辨率，就可以得到激光光场的谱密度函数 $S_\xi(\omega)$。由维纳–肯欣（Wiener–Khintchine ）定理式（10.2-14），$S_\xi(\omega)$ 是场自相关函数 $C_\xi(\tau)$ 的傅里叶积分变换

$$S_{\mathscr{E}}(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C_{\mathscr{E}}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau$$

$$S_{\mathscr{E}}(\omega) = \frac{4\pi}{T}|\mathscr{E}_T(\omega)|^2,\quad \mathscr{E}_T(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2}\mathscr{E}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{10.7-14}$$

$$C_{\mathscr{E}}(\tau) \equiv \langle\mathscr{E}(t)\mathscr{E}(t+\tau)\rangle \tag{10.7-15}$$

其中符号 $\langle\ \rangle$ 表示对系综或对时间的平均。

应用式（10.7-13）可得

$$\begin{aligned} C_{\mathscr{E}}(\tau) = \tfrac{1}{4}\langle [E(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\omega_0 t+\theta(t)]} + E^*(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega_0 t+\theta(t)]}] \times \\ [E(t+\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\omega_0(t+\tau)+\theta(t+\tau)]} + E^*(t+\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega_0(t+\tau)+\theta(t+\tau)]}]\rangle \end{aligned} \tag{10.7-16}$$

例如，设 $\left\langle E(t)E(t+\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[2\omega_0 t+\theta(t)+\theta(t+\tau)]}\right\rangle = 0$ 这对应于许多光学周期求平均值时，信号振荡频率

是光频的两倍，因此，可只保留$C_\xi(\tau)$中的慢变项，这样可得

$$C_{\mathscr{E}}(\tau)=\frac{1}{4}\langle E(t)E^*(t+\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[-\omega_0\tau+\theta(t)-\theta(t+\tau)]}+E^*(t)E(t+\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\omega_0\tau-\theta(t)+\theta(t+\tau)]}\rangle$$
$$=\frac{1}{4}[I(\tau)+I^*(\tau)] \qquad (10.7\text{-}17)$$

$$I(\tau)=\langle E^*(t)E(t+\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\Delta\theta(t,\tau)+\omega_0\tau]}\rangle \qquad (10.7\text{-}18)$$

$$\Delta\theta(t,\tau)=\theta(t+\tau)-\theta(t) \qquad (10.7\text{-}19)$$

激光噪声主要来源是相位$\theta(t)$的涨落，而不是振幅$E(t)$的涨落，因为在饱和增益情况下，振幅的涨落很小，可以忽略。从而可以将$\langle E^*(t)E(t+\tau)\rangle=\langle E^2\rangle$看做常数，所以

$$I(\tau)=\langle E^2\rangle\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau}\langle\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\theta(t,\tau)}\rangle \qquad (10.7\text{-}20)$$

当给定$\Delta\theta$的（归一化）概率分布函数为$g(\Delta\theta)$时，$\exp\{i\Delta\theta(t,\tau)\}$的期望值为

$$\langle\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\theta(t,\tau)}\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\theta(t,\tau)}g(\Delta\theta)\,\mathrm{d}(\Delta\theta) \qquad (10.7\text{-}21)$$

由于总的相位偏差$\Delta\theta$是许多小的统计独立的（自发跃迁）偏差的净结果，利用中心极限定理，$g(\Delta\theta)$是高斯型的，可表示为

$$g(\Delta\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\langle(\Delta\theta)^2\rangle}}\mathrm{e}^{-(\Delta\theta)^2/2\langle(\Delta\theta)^2\rangle} \qquad (10.7\text{-}22)$$

式中

$$\langle(\Delta\theta)^2\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}(\Delta\theta)^2g(\Delta\theta)\,d(\Delta\theta) \qquad (10.7\text{-}23)$$

将式（10.7-22）代入式（10.7-21）可得

$$\langle\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\theta(t,\tau)}\rangle=\mathrm{e}^{-\langle(\Delta\theta)^2\rangle/2}=\mathrm{e}^{-\mu|\tau|/(4\bar{n}t_c)} \qquad (10.7\text{-}24)$$

为了得到上面的结果，我们利用了式（10.7-10）并取$T=|\tau|$。将式（10.7-24）代入式（10.7-20），可得

$$C_{\mathscr{E}}(\tau)=\frac{1}{4}\langle E^2\rangle\mathrm{e}^{-\mu|\tau|/4\bar{n}t_c}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0\tau}) \qquad (10.7\text{-}25)$$

根据式（10.7-14）和式（10.7-25）光场的谱密度函数$S_{\mathscr{E}}(\omega)$，即用频谱分析仪测量得到的量，可表示为

$$S_{\mathscr{E}}(\omega)=\frac{\langle E^2\rangle}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{(-\mu|\tau|/4\bar{n}t_c)-\mathrm{i}\omega\tau}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0\tau}\,\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}\tau \qquad (10.7\text{-}26)$$

$$=\frac{\langle E^2\rangle}{2}\left(\frac{\mu/4\bar{n}t_c}{(\mu/4\bar{n}t_c)^2+(\omega-\omega_0)^2}+\frac{\mu/4\bar{n}t_c}{(\mu/4\bar{n}t_c)^2+(\omega+\omega_0)^2}\right) \qquad (10.7\text{-}27)$$

如在式（10.2-7）中所定义的谱密度函数，只需要考虑该函数中正频率部分。当$\omega>0$，式（10.7-27）右边的第二项可以忽略，因此有

$$S_{\mathscr{E}}(\omega)=\frac{\langle E^2\rangle}{2\pi}\frac{\mu/4\bar{n}t_c}{(\mu/4\bar{n}t_c)^2+(\omega-\omega_0)^2} \qquad (10.7\text{-}28)$$

这是一个以激光简正频率ω_0为中心的洛伦兹型函数，与半高值对应的谱宽为

$$(\Delta\omega)_{激光} = \frac{\mu}{2\bar{n}t_c} \tag{10.7-29}$$

前面已经知道，电子辐射的总能量为 $P = \bar{n}\hbar\omega_0 / t_c$，定义无源共振腔线宽为 $\Delta\nu_{1/2} = (2\pi t_c)^{-1}$，利用式（10.7-11b），式（10.7-29）可改写为

$$(\Delta\nu)_{激光} = \frac{(\Delta\omega)_{激光}}{2\pi} = \frac{2\pi h\nu_0(\Delta\nu_{1/2})^2\mu}{P} \tag{10.7-30}$$

其中 μ 由（10.7-8）定义，结果是电路模型线宽（10.6-13）的一半。

例：He-Ne 激光器和半导体二极管激光器的线宽。

为了对式（10.7-30）给出的线宽 $(\Delta\nu)_{激光}$ 作数量级上的估计，我们来估算两种不同类型的连续谱激光器的线宽：（1） 氦-氖激光器和（2）半导体（GaInAsP）激光器。

1. 氦–氖激光器

$$\nu = 4.741\times10^{14}\,\text{Hz} \qquad (\lambda = 6328\,\mathring{A})$$
$$L(\text{反射镜间距离}) = 100\text{cm}$$
$$\text{单程损耗} = (1-R) = 1\%$$

从上述数据及取 $t_c = 3.2\times10^{-7}\,\text{s}$，得到

$$\Delta\nu_{1/2} = \frac{1}{(2\pi t_c)} \approx \frac{(1-R)c}{2\pi nl} \approx 5\times10^5$$

令 $\mu = 1$ (即$N_1 \ll N_2$)，由式（10.7-30）可得在 $P = 1\text{mW}$ 时

$$(\Delta\nu)_{激光} \cong 2\times10^{-3}\,\text{Hz}$$

预计的线宽非常小，在绝大多数的实验条件下被诸如震动和温度涨落等外界因素所掩盖。

2. 半导体激光二极管

以典型的 GaInAsP($\lambda = 1.55\mu\text{m}$) 激光器为例，它的有关特性参数如下

$$P = 3\text{mW}$$
$$\nu = 1.935\times10^{14} \qquad (\lambda_0 = 1.55\mu\text{m})$$
$$\Delta\nu_{1/2} = \frac{(1-R)c}{2\pi nl}$$
$$R(\text{反射率}) = 30\%$$
$$l = 300\mu\text{m}$$
$$n = 3.5$$
$$\mu = 3 \qquad (\text{在}T\text{=}300K\text{ 时})$$

取 $t_c = 1/(2\pi\Delta\nu_{1/2}) = 5\times10^{-12}\,\text{s}$，结果为 $\Delta\nu_{1/2} \approx 3\times10^{10}$

$$(\Delta\nu)_{激光} = 0.817\times10^6\,\text{Hz}$$

图 10.12 的实验曲线给出了预期[式（10.7-30）]所得 P^{-1} 和 $(\Delta\nu)_{激光}$ 的关系，但是实验测得的线宽比分析预计的值大，其关系因子约 70。许多研究人员对这个差异进行了研究[13-15]，发现由于在分析推导式（10.7-30）的过程中忽略了由于自发辐射导致的电子密度涨落对激光介质折射率的调制。考虑这个因素后，结果是对式（10.7-30）乘以因子

$$1+\left(\frac{\Delta n'}{\Delta n''}\right)^2 \equiv 1+\alpha^2 \tag{10.7-31}$$

式中 $\alpha=(\Delta n'/\Delta n'')$，$\Delta n'$ 和 $\Delta n''$ 分别为由于电子密度变化导致激光场所“经历”的折射率变化的实部和虚部。因子 $1+(\Delta n'/\Delta n'')^2$ 可通过计算测量参数或直接从文献[1]的测量得到。其典型值约 30，足以解释图 10.12 的观测数据和式（10.7-30）的预计值之间的差异。相同的α因子也代表电流调制半导体激光器的输出光束的频率啁啾（见 15.6 节）。

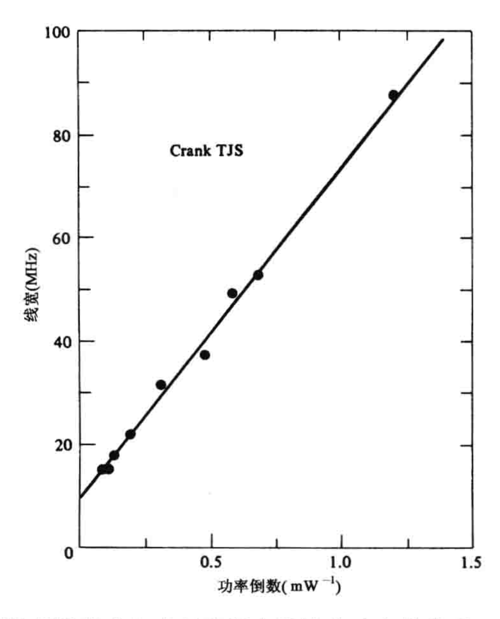


图 10.12　实测的频谱线宽与半导体激光器输出功率的关系（引自文献[12]）

常规的气体激光器和半导体激光器线宽 9 个数量级的差异主要是由于半导体激光器共振腔中光子的寿命 t_c 要短得多。当输出功率一定时，式（10.7-30）$(\Delta\nu)_{激光} \propto (\Delta\nu_{1/2})^2 \propto t_c^{-2}$。对上面的例子，在氦-氖激光器中 $t_c=3\times10^{-8}\text{s}$，在半导体激光器中 $t_c=5\times10^{-12}\text{s}$。由于 $t_c \sim \ln/c(1-R)$，可通过将激光器放置在外腔增加 l 和使用 $R\approx1$ 的高发射镜来延长半导体器 t_c 以缩短线宽。目前半导体激光器的线宽可到达千赫范围。

图 10.13 为 GaAs/GaAlAs 半导体激光器实际测量到的洛伦兹型场的频谱。

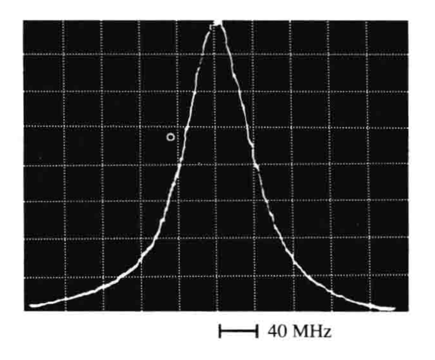


图 10.13　实际测量得到的半导体激光器洛伦兹型场的频谱 $S_{\mathscr{E}}(\omega)$（引自参考文献[12]）

10.8　相干与干涉

在 10.7 节中式（10.7-25），已经推导了如下单模激光场自相关函数的表达式

$$C_{\mathscr{E}}(\tau) \equiv \langle \mathscr{E}(t)\mathscr{E}(t+\tau) \rangle \propto \cos\omega_0\tau \mathrm{e}^{-\mu|\tau|/4\bar{n}_c} = \cos\omega_0\tau \mathrm{e}^{-|\tau|/\tau_c}$$

$$\tau_c = \frac{4\bar{n}t_c}{\mu} \tag{10.8-1}$$

式中 $\bar{n}$ 表示腔内的光子数，$\mu = N_2/(N_2 - N_1), t_c$ 是光子寿命（增益机制消失时光模式能量的衰减常数）。

参数 τ_c 称为激光场的相干时间。根据式（10.7-29），它等于 $2/(\Delta\omega)_{激光}$，$(\Delta\omega)_{激光}$ 是激光场输出线宽。实际应用中，它表示持续时间，在这持续时间内激光器能具有良好的正弦振荡和相位。如果试着使激光场时间延迟超过 τ_c，那么光场输出几乎为零。具有上述行为一种的场 $\mathscr{E}(t)$ 如图 10.14 所示。平均每 τ_c 秒，场就要经历一个相位存储损失。显然，进行式（10.8-1）中第一个等式定义的自相关运算将会产生一个大致形如（$\cos\omega_0\tau$）$\mathrm{e}^{-|\tau|/\tau_c}$ 的结果。

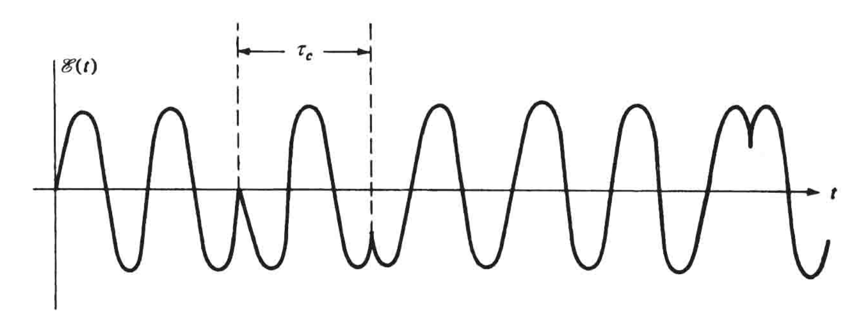


图 10.14　平均每 τ_c 秒相位相干性被干扰的正弦场

下面，研究在实际应用中如何获得自相关函数 $C_{\mathscr{E}}(\tau)$。最常用的结构是迈克耳孙干涉仪，如图 10.15 所示。入射光场 $\mathscr{E}_i(t)$ 分为两部分，分别经过迈克耳孙干涉仪的两臂，出射时这两个光场之间的相对时间延迟

$$\tau = \frac{2(L_1 - L_2)}{c} \tag{10.8-2}$$

然后，这两个光场被平方律检测器检测，检测器的输出电流成为有用的实验结果。

假定两个光场的功率相等，检测器接收到的总光场

$$\mathscr{E}_d(t) = \mathscr{E}(t) + \mathscr{E}(t+\tau) \tag{10.8-3}$$

根据 11.1 节的讨论（在此建议学生提前预习这章节），检测器的输出电流

$$i_d = a\overline{\mathscr{E}_d^2(t)} \tag{10.8-4}$$

式（10.8-4）中，a 是个常量，在本书中，上横线表示时间平均。该平均持续时间取决于检测器及它的相应电路，最快的检测器的平均持续时间最短可达 10^{-11}s，然而与光场的周期约 10^{-15}s 数量级相比，它仍然显得非常长。

检测器输出如下

$$\begin{aligned} i_d &= a[\overline{\mathscr{E}^2(t)} + \overline{\mathscr{E}^2(t+\tau)} + \overline{2\mathscr{E}(t)\mathscr{E}(t+\tau)}] \\ &= 2a[\overline{\mathscr{E}^2} + \overline{\mathscr{E}(t)\mathscr{E}(t+\tau)}] \end{aligned} \tag{10.8-5}$$

由于 $\overline{\mathscr{E}^2(t)} = \overline{\mathscr{E}^2(t+\tau)} \equiv \overline{\mathscr{E}^2}$，检测器的输出电流由直流 $2a\overline{\mathscr{E}^2}$ 和 $2a\overline{\mathscr{E}(t)\mathscr{E}(t+\tau)}$ 两部分组成。根据式（10.2-9），这两部分的比例就是光场 $\mathscr{E}(t)$ 的（归一化的）自相关函数。

$$\gamma(\tau) = \frac{\tau_{与i_d有关部分}}{\tau_{与i_d无关部分}} \propto C_{\mathscr{E}}(\tau) \tag{10.8-6}$$

按照式（10.2-14），通过傅里叶变换可获得光谱密度函数 $S_{\mathscr{E}}(\omega)$

$$S_{\mathscr{E}}(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C_{\mathscr{E}}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau \tag{10.8-7}$$

上述获得光场光谱（即光谱密度函数）的方法称为傅里叶变换光谱法，图 10.15 的结构用于获得光谱密度函数的商用仪器。这些仪器应用非常广泛，特别是在远红外（一般 $\lambda > 10\mu\mathrm{m}$），由于此波长域内检测器的相对无效性可通过长积分时间和平均噪声良好的慢扫描速率来弥补。

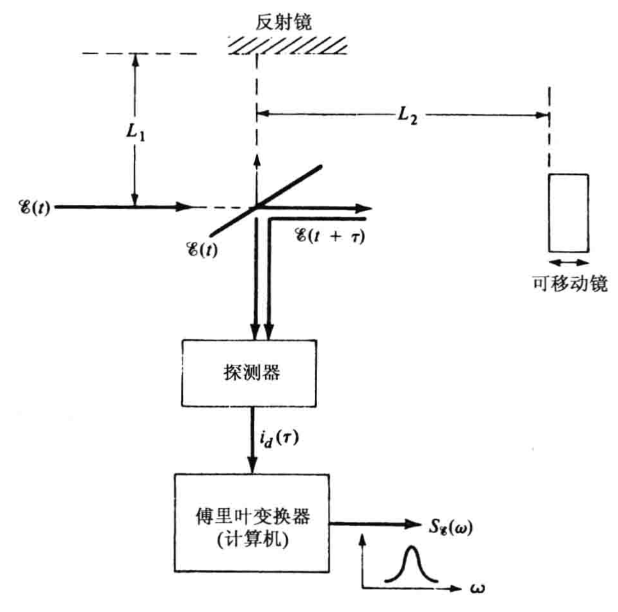


图 10.15　迈克耳孙干涉仪将输入光束分成两束，然后通过可控制时延 $\tau=2(L_1-L_2)/c$ 使这两束光重新组合

由式（10.2.13）和式（10.2.14）所示的 $S_{\mathscr{E}}(\omega)$ 和 $C_{\mathscr{E}}(\tau)$ 之间的傅里叶积分变换关系可知，要得到在 $\delta\omega$ 内的 $S_{\mathscr{E}}(\omega)$，即在 $\delta\omega$ 内分辨出 $S_{\mathscr{E}}(\omega)$，需要引入时间延迟 $\tau > \pi/\delta\omega$。举个例子，假定我们运用干涉光谱来测量线宽 $(\Delta\omega)_{激光} = 2\pi\times10^6\,\mathrm{Hz}$ 的商用半导体激光器的输出频谱，将需要一个变化范围为 0～5×10^{-7} s 的时间延迟 τ。

就激光而言，光场的有限谱宽主要取决于相位，而不是振幅、涨落。在这种情况下，一种将激光场与其自身经过延时的激光场进行外差的简单技术就可以获得激光频谱。这种方法

采用的是固定时延，而不是傅里叶变换方法的变化时延。下面，我们将对此进行讨论。

激光场的时延自外差法

考虑一下图 10.16 的结构。光场被分成两个部分，经过相对路径延时 t_d 后，两部分再重新在检测器上结合，而检测器内所产生光电流的光谱被光谱分析仪显示。由于这种检测方法包含光场与其自身经过延时的光场进行外差检测，因而称为时延自外差法。

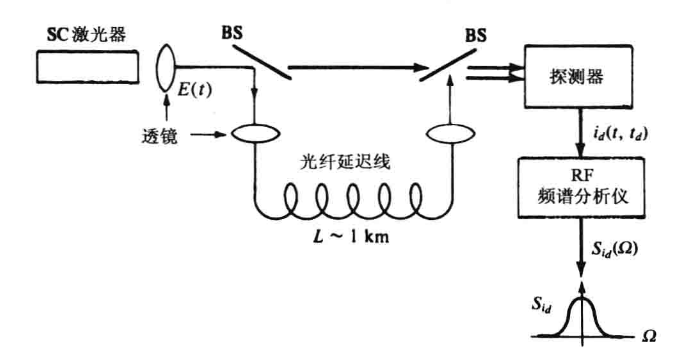


图 10.16　采用光纤延时线获得激光场光谱 $S_{\mathscr{E}}(\omega)$ 的干涉仪装置图（引自文献[16]）

由于激光场的主要涨落是相位，而不是振幅（见式（10.7-19）下的注释），因此可通过（复）相矢量估算检测器内的场

$$E_{总} = \frac{1}{4}E_0 e^{i\theta(t)} + \frac{1}{4}E_0 e^{i[\omega_0 t_d + \theta(t+t_d)]} \tag{10.8-8}$$

图 10.17 画出了这个场。在图 10.17 中，由于时延 t_d 远小于激光场的相位相干时间 τ_c [由式（10.7-24）定义]，因而 $\theta(t+t_d) \simeq \theta(t)$，且总场的相矢量大小可被视为常数。尽管相位角 $\theta(t)$ 随机变化，但是决定 $E_{总}$ 大小的夹角 α 仅取决于 $\theta(t+t_d)-\theta(t)$ 的差值。当 $t_d \ll \tau_c$，α 不随时间而变化。检测器的输出电流是不变的，因此从输出电流不能获得激光场的频谱。显然，我们应当考虑 $t_d \gg \tau_c$ 时的情况。接下来的讨论中，我们将考虑一般情况下的 t_d。

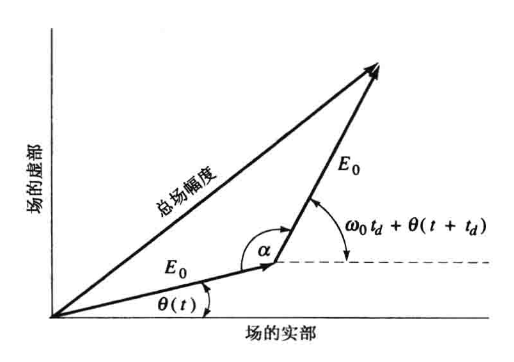


图 10.17　检测器所接受到的总光场。对于短的时延，$t_d \gg \tau_c$，$\theta(t+t_d) \approx \theta(t)$，因而 α 及总的光场振幅为常数

检测器的输出电流 i_d 与该检测器探测到的总光场平方的时间平均值成正比，因此它与场的复振幅与复振幅的复共轭的乘积成正比[见式（1.3-16）]。应用式（10.8-8）可推出

$$i_d = SE_0^2\{e^{i\theta(t)} + e^{i[\omega_0 t_d+\theta(t+t_d)]}\} \times \{e^{-i\theta(t)} + e^{-i[\omega_0 t_d+\theta(t+t_d)]}\} \tag{10.8-9}$$

$$= SE_0^2\{2 + e^{i[\theta(t)-\omega_0 t_d-\theta(t+t_d)]} + e^{-i[\theta(t)-\omega_0 t_d-\theta(t+t_d)]}\} \tag{10.8-10}$$

式中，S 是由检测器决定的常数。应用维纳–肯欣（Wiener–Khintchine）定理[式(10.2-14)]，将可推导出 i_d 的频谱，因此，首先需要获得电流 i_d 的自相关函数 $C_{i_d}(\tau)$。如式（10.7-19）所定义

$$\Delta\theta(t,\tau) \equiv \theta(t+\tau) - \theta(t) \tag{10.8-11}$$

上一节中[参见式(10.7-21）后的讨论]，我们已经导出 $\Delta\theta(t,\tau)$ 是一个随机高斯变量。同样 $\Delta\theta(t,\tau)-\Delta\theta(t+t_d,\tau)$ 的差值也是高斯变量。因而用与推导式（10.7-24）同样的方法，可以得到

$$\langle e^{i[\Delta\theta(t,\tau)-\Delta\theta(t+t_d,\tau)]}\rangle = e^{-\langle[\Delta\theta(t,\tau)-\Delta\theta(t+t_d,\tau)]^2\rangle/2} \tag{10.8-12}$$

现在

$$\langle[\Delta\theta(t,\tau) - \Delta\theta(t+t_d,\tau)]^2\rangle = 2\langle[\Delta\theta(\tau)]^2\rangle - 2\langle\Delta\theta(t,\tau)\Delta\theta(t+t_d,\tau)\rangle \tag{10.8-13}$$

这里应用了

$$\left\langle\left[\Delta\theta(t,\tau)\right]^2\right\rangle = \left\langle\left[\Delta\theta(t+t_d,\tau)\right]^2\right\rangle \equiv \left\langle\left[\Delta\theta(\tau)\right]^2\right\rangle$$

从前面的式（10.7-10）中使 $t=\tau$，可得

$$\langle[\Delta\theta(\tau)]^2\rangle = \frac{\mu|\tau|}{2\bar{n}t_c} = \frac{2|\tau|}{\tau_c}, \quad \tau_c = 4\bar{n}t_c/\mu \tag{10.8-14}$$

将式（10.8-13）与式（10.8-14）代入式（10.8-12）和式（10.8-10）中，可得

$$C_{i_d}(\tau) \equiv \langle i_d(t)i_d(t+\tau)\rangle = S^2E_0^4[4 + 2e^{-|\tau|/(\tau_c/2)}e^{\langle\Delta\theta(t,\tau)\Delta\theta(t+t_d,\tau)\rangle}] \tag{10.8-15}$$

特殊情况 $t_d \gg \tau_c$

在这种特殊的，但却很重要的，时延较长（$t_d \gg \tau_c$）的情况下，有

$$\lim_{t_d\to\infty} \langle\Delta\theta(t,\tau)\Delta\theta(t+t_d,\tau)\rangle \to 0 \tag{10.8-16}$$

且

$$C_{i_d}(\tau)_{t_d\gg\tau_c} = S^2E_0^4(4 + e^{-|\tau|/(\tau_c/2)}) \tag{10.8-17}$$

应用式（10.7-14）或直接引用式（10.7-28）的结果，可得到如下的电流 i_d 频谱密度表达式

$$S_{i_d}(\Omega)_{t_d\gg\tau_c} = \frac{2S^2E_0^4}{\pi}\left[\frac{(4/\tau_c)}{(2/\tau_c)^2 + \Omega^2} + 4\pi\delta(\Omega)\right] \tag{10.8-18}$$

因而，频谱是由直流成份 $4\pi\delta(\Omega)$ 加上以 $\Omega=0$（假定负频率 $\Omega<0$）为中心的洛伦兹分布组成，且洛伦兹分布的半峰全宽（FWHM）为

$$(\Delta\Omega)_{\text{FWHM}} = 4/\tau_c = 2(\Delta\omega)_{激光} \tag{10.8-19}$$

后一个等式是由式（10.7-29）推导而来的，它表明：当 $t_d \gg \tau_c$ 时，光检测电流的谱宽是激光场谱宽的两倍。

一般情况的严格处理方法会涉及时延 t_d 的任意值，由于需要解函数 $\langle\Delta\theta(t,\tau)\Delta\theta(t+t_d,\tau)\rangle$

的知识，这超出本书讨论范围。此函数的推导牵涉对非线性且含有噪声的激光方程的求解。结果为（见参考文献[15]）

$$\langle \Delta\theta(t,\tau)\Delta\theta(t+t_d,\tau)\rangle = \frac{2|\tau|}{\tau_c} - \frac{2}{\tau_c}\min(|\tau|, t_d) \tag{10.8-20}$$

式（10.8-20）中，$\min(\tau, t_d)$表示取τ和t_d两者中的较小值。将此结果同式（10.8-13）和式（10.8-20）一起代入式（10.8-15），可得

$$C_{i_d}(\tau) \equiv \langle i_d(t) i_d(t+\tau)\rangle = S^2 E_0^4 [4 + 2e^{-(2/\tau_c)\min(|\tau|, t_d)}] \tag{10.8-21}$$

$$\begin{aligned} S_{i_d}(\Omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C_{i_d}(\tau) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= 8S^2E_0^4(1+0.5\mathrm{e}^{-2t_d/\tau_c})\delta(\Omega) + \\ &\left(\frac{8S^2E_0^4}{\pi\tau_c}\right)\frac{\left[1-\mathrm{e}^{-2t_d/\tau_c}\left(\cos\Omega t_d + \dfrac{2\sin\Omega t_d}{\Omega\tau_c}\right)\right]}{(2/\tau_c)^2+\Omega^2} \end{aligned} \tag{10.8-22}$$

式（10.8-22）积分得出的结果很长，但却直观。当$t_d/\tau_c \to \infty$时，式（10.8-22）可简化为式（10.8-18）。综上所述，仅在$t_d/\tau_c \gg 1$时，即时延相对较长时，频谱$S_{i_d}(\Omega)$是洛伦兹分布形式。半导体激光器的典型频谱可用相似于图 10.16 的装置来获取，它的频谱如图 10.13 所示。对于$t_d/\tau_c = \infty$，1，0.2 三种情况，图 10.18 中画出了由式（10.8-22）给出的频谱的理论分布曲线。

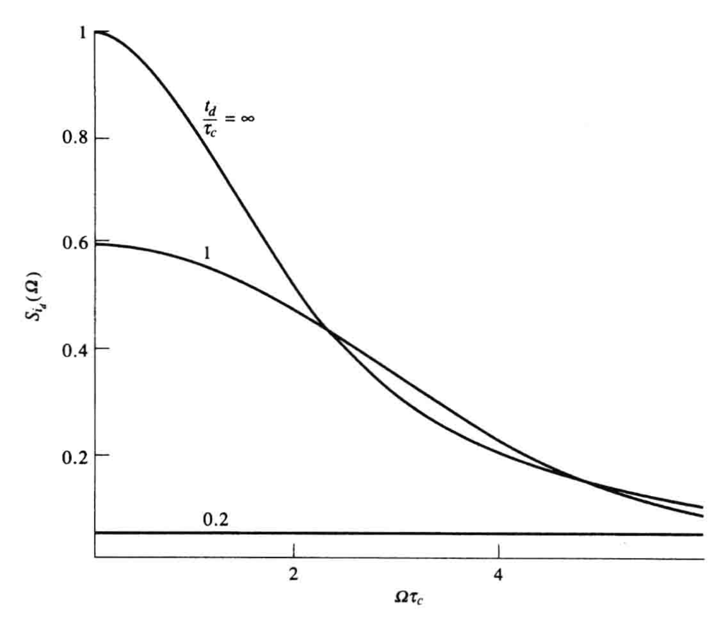


图 10.18　在激光输出的时延自外差法检测中，由式（10.8-22）的光电流给定点频谱密度$S_{i_d}(\Omega)$分布曲线。激光场的延迟时间(t_d)与相干时间(τ_c)之比是个参量。横坐标频率的单位为τ_c^{-1}，$\tau_c = (\Delta\nu)^{-1}_{激光}$

10.9　二进制脉码调制系统中的误码率

集成电子电路对数字处理的简便性和可靠性，增加了以二进位脉冲列的方式传输信息的吸引力。在光通信系统中，要将传送的模拟数据编码成 1 和 0 的电脉冲序列，每一个脉冲带有一个比特的信息。这样产生的电学信号经过调制器对光束进行作用，就形成了光学脉冲序列。经过空气或光导纤维传播的光学信号在接收端被探测器接收，又产生了电脉冲序列。

在理想的情形下，重现的电脉冲序列应该是和输入脉冲序列一模一样的复制品（更一般地说，应该是与原来的信号相同的模拟复制品）。不过在探测器输出中噪声与信号的混杂使上述理想而完美的重现过程不可能实现。一个用来描写重现信号的“质量”的品质因数就是误码率，它被定义成在被探测的脉冲序列中任一给定的脉冲与输入序列中相应的脉冲不一致的概率。

图 10.19 示出了脉冲序列的一部分，它含有三个“1”脉冲和两个“0”脉冲。一个理想的无噪声的探测应该产生如图 10.19(a)所示的序列，其脉冲高（比如说以安培为单位）为 i_S，不过由于噪声的存在会引起随机的涨落，所以探测到的信号可能如图 10-19(b)所示。

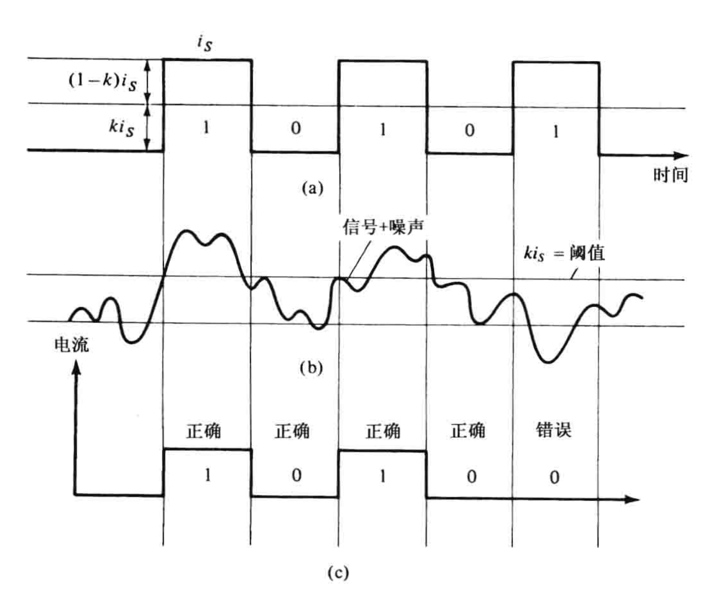


图 10.19　理想的无噪声的脉冲序列(a)受到噪声干扰的脉冲；(b)阈值判决水平为 ki_S 时的重现信号；(c)注意，在重现信号中的最后一个“1”脉冲发生误差，这是因为在该处有一个大的负噪声涨落

通常采用一种阈值判决电路，它在每一周期内对信号采样，如图 10-19(b)所示，如果信号超过事先决定的值 $ki_S\,(k<1)$ 就会产生一个“1”脉冲，如果被测信号的取样小于 ki_S 就会产生一个“0”脉冲[17]。在图 10.19(b)的情形中所选的阈值会使最后一个脉冲产生误差，而其他的重现脉冲则是无误的，显然在最后一个脉冲处的负向噪声涨落使它低于阈值。

如果一个给定的脉冲是“1”，错误的重现可以引起在采样时噪声电流 i_N 是负的，并且有

$$i_N < -i_S(1-k)$$

结果就会发生脉冲重现的误差，因为此时 $i_S + i_N$ 小于阈值 ki_S，结果产生“0”脉冲。依此类似，一个“0”脉冲的重现发生误差的情形是

$$i_N > ki_S$$

平均来说，一半脉冲为 0，一半为 1，所以对一个给定的脉冲，说其重现发生误码率（BER）是

$$\text{BER} = \frac{1}{2}[i_N < -i_S(1-k)\text{ 的概率 } + i_N > ki_S \text{ 的概率}] \qquad (10.9\text{-}1)$$

如果噪声电流 i_N 是一个随机的高斯变量，正如大多数实用的情形一样，可用式（10.1-5）来估计误差概率。在这种情形下 σ 是噪声电流 i_N 的均方根（rms）值，所以 $\sigma^2 = \overline{i_N^2}$ 为均方噪声电流，正如 10.4 节、10.5 节和 10.6 节中推导的那样。为了使结果简化，选取 $k = \frac{1}{2}$。根据式（10.1-5），并利用 $p(i_N) = p(-i_N)$，式（10.9-1）变成

$$\text{BER} = i_N > \frac{i_S}{2}\text{的概率} = \int_{i_S/2}^{\infty} p(i_N)\text{d}i_N = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{i_S/2}^{\infty} \text{e}^{-(i_N^2/2\sigma^2)}\text{d}i_N \qquad (10.9\text{-}2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{i_S/2\sqrt{2}\sigma}^{\infty} \text{e}^{-\xi^2}\,\text{d}\xi \qquad (10.9\text{-}3)$$

应用误差函数的定义

$$\text{erf}\,(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \text{e}^{-\xi^2}\text{d}\xi \qquad \text{和} \qquad \int_0^{\infty} p(i_N)\text{d}i_N = \frac{1}{2}$$

可将式（10.9-3）写成

$$\text{BER} = \frac{1}{2}\left(1 - \text{erf}\,\frac{i_S}{2\sqrt{2}\sigma}\right) \equiv \frac{1}{2}\text{erfc}\,\frac{i_S}{2\sqrt{2}\sigma} = \frac{1}{2}\text{erfc}\,\frac{i_S}{2\sqrt{2}\langle i_N\rangle} \qquad (10.9\text{-}4)$$

式中 $\langle i_N\rangle \equiv \sigma = (=\overline{(i_N^2)}^{1/2})$ 是均方根噪声电流。

图 10.20 画出了误码率（BER）与峰值信噪比 $i_S/\langle i_N\rangle$ 的函数关系的理论曲线。我们记得，$\overline{i_S^2}$ 代表探测器输出中的电信号功率而不是光信号功率，我们有兴趣地注意到即使在中等的信噪功率比条件下引起的误码率也是十分微小的。作为一个例子，当 $i_S/\langle i_N\rangle = 11.89(21.5\text{dB})$ 时，$\text{BER} = 10^{-9}$。

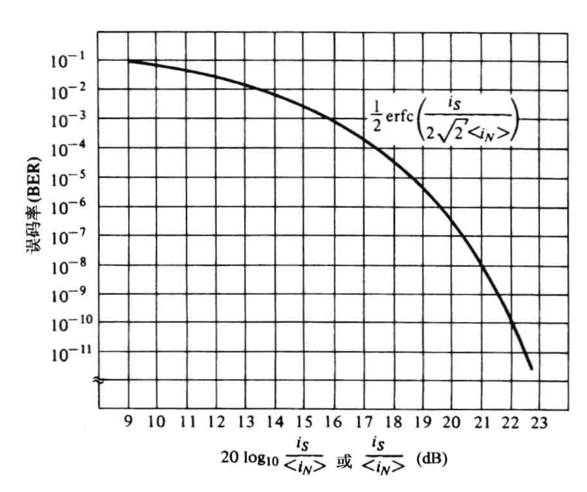


图 10.20　式（10.9-4）表示的误码率（BER）与探测器输出的（峰值）信噪电流比的函数关系

实验上对光脉冲序列测量其误码率的方法可看参考文献[18]，其他有关的讨论可在参考文献[19,20]中找到。

在第 11 章末将给出利用本节的结果来设计一种二进位制光纤通信系统的例子。

习题

10.1 推导方程式（10.4-2）和式（10.4-3）。（提示：对包含电荷薄层的微小体积应用关系式 $\int_S \bar{D}\cdot\bar{n}\mathrm{d}s=\int_v \rho\mathrm{d}v$ 。）

10.2 在没有 $\omega t_a \ll 1$ 的条件限制下（式（10.4-6）），推导散粒噪声的公式，假设在两个电极之间载流子的运动速度是常数。

10.3 推导方程式（10.5-11）。

10.4 补全在推导方程式（10.5-20）过程中省略的步骤。

10.5 估计 $T=300\mathrm{K}$ 时铜中载流子的散射时间 τ_0 。在什么频率下 $\omega\tau_0 \ll 1$ 的条件会被违反?关于铜的电导率请查表。

10.6 对一个载流子浓度为 $10^{22}\,\mathrm{cm}^{-3}$ 和 $\sigma=10^{-5}\,(\Omega\cdot\mathrm{cm})^{-1}$ 的材料重复 10.5 的估计。

10.7 当激光器的共振腔长度改变 Δl ，其谐振频率的变化 $\Delta\nu$ 是多少?

10.8 （a）以熔凝石英棒为光学共振腔的激光器处于温度稳定性为 ±0.5K 的情形下，试估计其频率的不稳定性 $\Delta\nu$ 。[注意：不要忘记 n 对 T 的依赖关系。]

（b）使 $\Delta\nu$ 小于 $10^3\,\mathrm{Hz}$ 的温度稳定性应该是多少?

10.9 当一个高 Q 值的并联 RLC 电路被一个均方振幅 $\overline{i_N^2}(\nu)$ 的电流源短路时，试推导其热噪声表达式（10.5-9） $\overline{i_N^2(\nu)}=4kT\Delta\nu/R$ 。 $\overline{i_N^2}(\nu)$ 的大小应选择使总的电路的激励能量相当于存储的电磁能 kT 。

[提示：因为电能和磁能相等，所以 $kT=C\overline{v^2(t)}=C\int_0^\infty \frac{\overline{V_N^2(\nu)}}{\Delta\nu}\mathrm{d}\nu$

其中 $\overline{V_N^2(\nu)}=\overline{i_N^2(\nu)}\left|Z(\nu)\right|^2$，并假设 $\overline{i_N^2(\nu)}/\Delta\nu$ 与频率无关。]

10.10 在下列情形下推导和画出误差概率与 $i_S/\langle i_N\rangle$ 的函数关系，（a） $k=0.75$ ；（b） $k=0.25$ 。

10.11 设计一个实验装置用于检测激光频率的均方根偏差 $(\Delta\omega)_{\mathrm{rms}}\equiv\left\langle\left(\omega(t)-\omega_0\right)^2\right\rangle^{1/2}$ 。

10.12 （a）写一篇关于激光陀螺仪和萨古纳克旋转探测干涉仪的基本原理的简要报告。你可以检索期刊《量子电子学》关于陀螺仪文献的索引。

（b）当激光场的频谱纯度受到 10.7 节中讨论的量子效应限制时，两种干涉仪所能检测到的最小旋转率为多少?

参考文献

1. Smith, R. A., F. A. Jones, and R. P. Chasmar, *The Detection and Measurement of Infrared Radiation*. Oxford University Press, New York, 1968.
2. Yuen, H. P., and J. H. Shapiro, Optical communication with two-photon coherent states, Part III. *IEEE Trans. Inf. Theory* **IT-26**:78 (1980).
3. Kimble, H. J., and D. F. Walls, Squeezed states of electromagnetic fields. (special issue) *J. Opt. Soc. B* **4**:1353 (1987).
4. Slusher, R. E., L. W. Hollberg, B. Yurke, D. C. Mertz, and J. F. Valley, Observation of squeezed states generated by four-wave mixing in an optical cavity. *Phys. Rev. Lett.* **55**:2409 (1985).
5. The basic concepts of noise theory used in this chapter can be found, for example, in W. B. Davenport and W. L. Root, *An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise*. McGraw-Hill, New York, 1958.
6. Bennett, W. R., Methods of solving noise problems. *Proc. IRE* **44**:609 (1956).
7. The classic reference to this topic is S. O. Rice, Mathematical analysis of random noise. *Bell Syst. Tech. J.* **23**:282 (1944); **24**:46 (1945).
8. Johnson, J. B., Thermal agitation of electricity in conductors. *Phys. Rev.* **32**:97 (1928).
9. Nyquist, H., Thermal agitation of electric charge in conductors. *Phys. Rev.* **32**:110 (1928).
10. Yariv, A., *Quantum Electronics*, 2nd ed. Wiley, New York, 1975.
11. Schawlow, A. L., and C. H. Townes, *Phys. Rev.* **112**:1940 (1958).
12. Courtesy of Kerry Vahala and Chris Harder of the California Institute of Technology.
13. Henry, C. H., Theory of the linewidth of semiconductor lasers. *IEEE J. Quantum Electron* **18**(2):259 (1982).
14. Fleming, M., and A. Mooradian, Fundamental line broadening of single mode (GaAl)As diode lasers. *Appl. Phys. Lett.* **38**:511 (1981).
15. Vahala, K., and A. Yariv, Semiclassical theory of noise in semiconductor lasers. *IEEE J. Quantum Electron* **19**:1096 (1983).
16. Yamamoto, Y., T. Mukai, and S. Saito, Quantum phase noise and linewidth of a semiconductor laser. *Electron. Lett.* **17**:327 (1981). Also: Okoshi, T., K. Kikuchi, and A. Nakayma, Novel method for high resolution measurement of laser output spectrum. *Electron. Lett.* **6**:630 (1980).
17. Bennett, W. R., and J. R. Davey, *Data Transmission*. McGraw-Hill, New York, 1965, p. 100.
18. Goell, J. E., A 274 Mb/s optical repeater experiment employing a GaAs laser. *Proc. IEEE* **61**:1504 (1973).
19. Personick, S. D., Receiver design for digital fiber optic communication systems. *Bell Syst. Tech. J.* **52**:843 (1973).
20. Miller, S. E., T. Li, and E. A. J. Marcatili, Toward optic fiber transmission systems—devices and system considerations. *Proc. IEEE* **61**:1726 (1973).

第 11 章　光辐射的探测

11.0　引言

光辐射的探测常由下列方式来完成：先将辐射能量转换成电信号，再用通常的技术测量电信号的强度。在转换过程中可能涉及的一些物理机制有：

1. 在固态光电导探测器中产生可移动的电荷载流子；
2. 热电偶吸热而发生温度改变，从而引起结电压的改变；
3. 在光电发射体表面因光电效应而放出自由电子。

本章比较详细地讨论下列四种最重要的探测器的工作情形：

1. 光电倍增管；
2. 光电导探测器；
3. 光电二极管；
4. 雪崩光电二极管。

我们将讨论每一种探测器的灵敏度，并将它与理论上的极限值作比较。我们将会发现，采用外差探测法有可能达到灵敏度的理论极限。

11.1　光激励跃迁速率

在本章中将讨论到的所有光学探测方案的一个共同特点是，电信号与光场引起的电子的激励速率成正比。这种激发涉及使电子从某一起始束缚态 a 跃迁到一个（或一组）终态 b，在该态中电子可以自由移动并形成电流。例如对一个 n 型半导体探测器来说，状态 a 代表充满了电子的价带，或者是局部的施主杂质原子，状态 b 代表电子位于导带。图 11.1 示出了上述的两种能级，在激发过程中一个电子吸收 $h\nu$ 的光子能量而从“束缚”态 a 跃迁到“自由”态 b，在自由态的电子对电流有贡献。

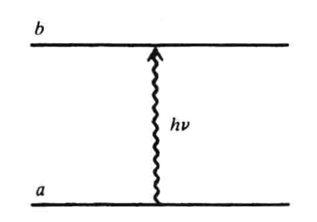


图 11-1　大部分快速光探测器中，吸收能量为 $h\nu$ 的光子，同时使一个电子（或空穴）从低迁移率量子态（a）跃迁到高迁移率量子态（b）

在对不同的探测方案进行分析之前，对下面的一点有所了解是很重要的，这就是每个电子从 a 态到 b 态的跃迁速率与光强的关系。跃迁速率的推导可用量子力学的理论得到。这里，我们采用下列方式加以描述：假设入射光场具有近乎正弦变化的形式

$$e(t)=\frac{1}{2}[E(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}+E^*(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}]\equiv \mathrm{Re}[V(t)] \qquad (11.1\text{-}1)$$

式中，$V(t)=E(t)\exp(i\omega_0 t)$。每一个电子受到该光场激励的跃迁概率与 $V(t)V^*(t)$ 成正比。将

跃迁概率写成 $W_{a\to b}$，我们有

$$W_{a\to b} \propto V(t)V^*(t) \tag{11.1-2}$$

很容易证明 $V(t)V^*(t)$ 是 $e^2(t)$ 平均值的两倍，这里求平均的范围只有几个光学周期。

为了说明上述看似简单的结果的功用，考虑如何确定由场

$$e(t) = E_0\cos(\omega_0 t + \phi_0) + E_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) \tag{11.1-3}$$

引起的跃迁速率问题。令 E_0 和 E_1 为实数，$\omega_1 - \omega_0 \equiv \omega \ll \omega_0$，可将式（11.1-3）重写为

$$\begin{aligned} e(t) &= \mathrm{Re}(E_0 e^{i(\omega_0 t+\phi_0)} + E_1 e^{i(\omega_1 t+\phi_1)}) \\ &= \mathrm{Re}[(E_0 e^{i\phi_0} + E_1 e^{i(\omega t+\phi_1)})e^{i\omega_0 t}] \end{aligned} \tag{11.1-4}$$

利用式（11.1-1），$V(t)$为 $V(t) = [E_0 e^{i\phi_0} + E_1 e^{i(\omega t+\phi_1)}]e^{i\omega_0 t}$，由式（11.1-2）可得到

$$\begin{aligned} W_{a\to b} &\propto (E_0 e^{i\phi_0} + E_1 e^{i(\omega t+\phi_1)})(E_0 e^{-i\phi_0} + E_1 e^{-i(\omega t+\phi_1)}) \\ &= E_0^2 + E_1^2 + 2E_0E_1\cos(\omega t + \phi_1 - \phi_0) \end{aligned} \tag{11.1-5}$$

式（11.1-5）表明除了一个常数项 $E_0^2 + E_1^2$ 之外，跃迁速率还包含一项以差频 ω 振动的分量，其相角等于两个原来的相位之差。这种相干的“拍频”效应正是外差探测原理的基础，见 11.4 节的讨论。

11.2　光电倍增管

光电倍增管是最常用的光探测器之一，它可以用来测量近紫外、可见和近红外的光谱区的辐射。由于光电倍增管具有固有的高电流增益和低噪声的特性，因此，迄今它仍是所发明的最灵敏的测量仪器之一。在最佳工作条件下，比如采用长的积分时间、对光电阴极进行冷却、以及脉冲高度鉴别，光电倍增管曾用来测量低达 10^{-19} W 的微弱光信号[2]。

图 11.2 为一个常用的光电倍增管的示意图，它是由一个光电阴极（*C*）和一系列的所谓倍增电极，在图中由号码 1 到 8 表示。倍增电极的电位与阴极相比逐步升高，相邻倍增电极间电位差的典型值是 100V。最后的一个电极（*A*）为阳极，用来收集电子。整个组件安装在真空管中以期减少电子与气体分子碰撞的可能性。

光电阴极是光电倍增管的关键部分，它将入射的光辐射转换成电流，因此它决定了探测器的波长响应特性，而且后面将看到它也决定了探测器的极限灵敏度。光电阴极是由具有低的表面功函数的材料制备的，常用含有 Ag-O-Cs 和 Sb-Cs 的化合物，参见文献[2，3]。这些化合物的功函数为 1.5eV，而一般典型金属的值则为 4.5eV。从图 11.3 可知，低的功函数使它有可能探测波长较长的光子，因为低频探测极限对应于 $h\nu = \phi$。目前，具有最低功函数的材料使得有可探测波长为 1～1.1 μm 的光电发射。

若干商用光阴极的光谱响应曲线示于图 11.4，图中的量子效率（也常称为量子产额）定义为每个入射的光子所释放的电子数目。

自光电阴极发射出来的电子受到静电聚焦的作用并朝着第一倍增极作加速运动，到达时的典型动能约为 100eV，引起了倍增极表面的次级电子发射，使初始电流成倍增长。上述过程在每一个倍增极都会重复发生，直到由光电阴极处发出的初始电流被放大很多倍。如果在每一个倍增极处的次级发射的放大倍数为 δ（意即每一个入射电子引起 δ 个次级电子），倍增极的数目为 *N*，那么在光电阴极和阳极之间的总电流倍增数为

$$G = \delta^N$$

对于典型的 $\delta=5$ 和 $N=9$ 数值[①]而言，$G\simeq 2\times 10^6$。

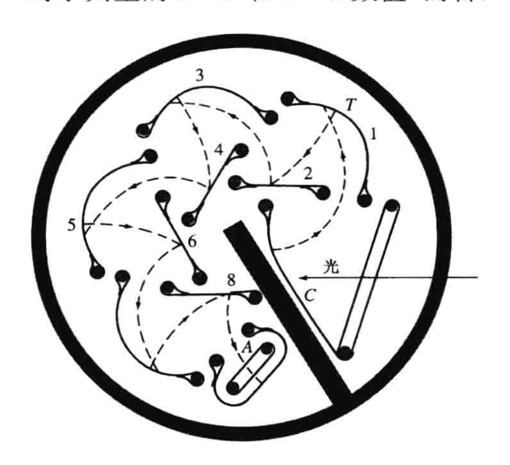


图 11.2　一个典型的商用光电倍增管的光阴极和聚焦倍增电极的示意图。C=阴极；1—8=次级发射电极；A=收集阳极（引自文献[3]）

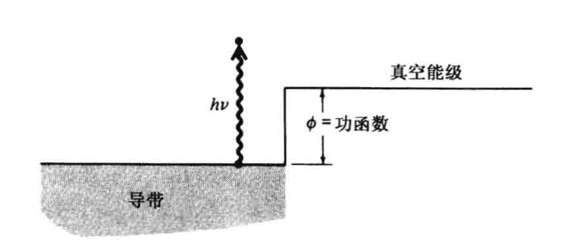


图 11.3　光电倍增管的光阴极。真空能级相当于一个离开阴极无穷远处的静止电子的能量。功函数 ϕ 为将一个电子从金属跃迁到真空能级所需的最低能量，所以只有 $h\nu>\phi$ 的光子才能被探测到

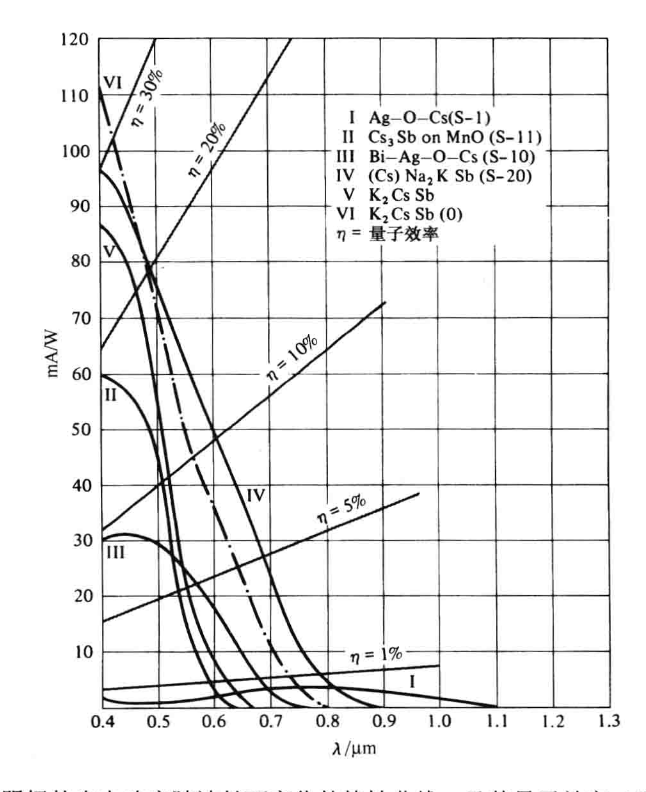


图 11.4　一些商用光阴极的光电响应随波长而变化的特性曲线，及其量子效率（引自文献[3]第 228 页）

① δ 的值取决于倍增极间的电压，当 $V\simeq 400$ 伏时 $\delta\simeq 10$。在商用的倍增管 $V\approx 100$ 伏时通常有 $\delta\approx 5$。

11.3 电倍增管中的噪声机制

从光电倍增管的输出中观察到的随机涨落的起因是：

1. 极散粒噪声，按式（10.4-9）可表达为

$$\overline{(i_{N_1}^2)} = G^2 2e(\overline{i_c} + i_d)\Delta v \tag{11.3-1}$$

其中 $\overline{i_c}$ 是当信号功率入射到光阴极上时它所发射的平均电流。电流 i_d 称为“暗电流”，它是表面电子受到无规则的热激励，以及宇宙线或放射性元素辐照的激发形成的。

2. 阳极散粒噪声，这是由于在倍增极处的次级发射过程的随机性形成的，因为从一个倍增极发出的电流不会按照管子的全部增益而放大，所有的倍增极对于总散粒噪声输出的贡献与阴极相比要小一个因子约 δ^{-1}。由于 $\delta \approx 5$ 时，该项只是一个小的修正，在下面的讨论中可将它忽略。

3. 约翰孙（热）噪声，它来自于与阳极相连的输出电阻 R 的热噪声，其大小按式（10.5-9）可写成

$$\overline{(i_{N_2}^2)} = \frac{4kT\Delta v}{R} \tag{11.3-2}$$

光电倍增管的最小可测功率——视频探测

光电倍增管的应用方法主要有两种。第一种情形被测光波照射到光电阴极之前受到低频 ω_m 的调制，于是所得的信号是一个以频率 ω_m 振荡的输出电流，下面将证明振幅与光强成正比。这种工作方法称为视频或直接探测法。

第二种情形，频率为 ω_s 的被测信号在光电阴极处与一个比它强得多的频率为 $\omega_s+\omega$ 的光波相结合，输出信号则为偏移频率 ω 的电流。这种方法称为“外差”探测法，将在第 11.4 节中详细讨论。视频探测法中的光学信号可以写成

$$\begin{aligned} e_s(t) &= E_s(1+m\cos\omega_m t)\cos\omega_s t \\ &= \mathrm{Re}[E_s(1+m\cos\omega_m t)e^{i\omega_s t}] \end{aligned} \tag{11.3-3}$$

式中的因子 $(1+m\cos\omega_m t)$ 代表载波的振幅调制[②]。按照式（11.1-2），光电阴极电流可以表示为

$$\begin{aligned} i_c(t) &\propto [E_s(1+m\cos\omega_m t)]^2 \\ &= E_s^2\left[\left(1+\frac{m^2}{2}\right)+2m\cos\omega_m t+\frac{m^2}{2}\cos 2\omega_m t\right] \end{aligned} \tag{11.3-4}$$

为了确定式（11.3-4）中的比例常数，考虑 $m=0$ 的情形。信号产生的平均光电阴极电流则为[③]

$$\overline{i_c} = \frac{Pe\eta}{hv_s} \tag{11.3-5}$$

式中 $v_s = \omega_s/2\pi$，P 是平均光功率，η 是每一个入射光子使光阴极发射出来的平均电子数

---

② 振幅调制可能来自于光波携带的信号，或者是在探测前对它进行的斩波。

③ P/hv_s 是光子入射到光电阴极上的速率，所以如果需要 $1/\eta$ 个光子来产生一个电子，平均电流应该由式（11.3-5）表示。

（即量子效率），其数值依赖于光子频率和光阴极表面，在实际情形中（见图 11.4）η 可达到 0.3。利用式（11.3-5），可将式（11.3-4）式重新写成

$$i_c(t)=\frac{Pe\eta}{h\nu_s}\left[\left(1+\frac{m^2}{2}\right)+2m\cos\omega_m t+\frac{m^2}{2}\cos 2\omega_m t\right] \tag{11.3-6}$$

频率为 ω_m 的输出信号电流为

$$i_s=\frac{GPe\eta}{h\nu_s}(2m)\cos\omega_m t \tag{11.3-7}$$

如果探测器的输出经过带宽为 $\Delta\nu$ 、以 ω_m 为中心的滤波器，它所包含的散粒噪声电流的方均振幅应如式（11.3-1）所示

$$\overline{(i_{N_1}^2)}=2G^2e(\overline{i_c}+i_d)\Delta\nu \tag{11.3-8}$$

式中 $\overline{i_c}$ 是平均信号电流，i_d 是暗电流。

噪声和信号的等效电路如图 11.5 所示。为了明确起见，令调制系数 $m=1$。R 代表光电倍增管的输出负载。选择温度为 T_e，则 $4kT_e\Delta\nu/R$ 该项是由 R 的热噪声和紧接光电倍增管后的放大器产生的噪声引起的。

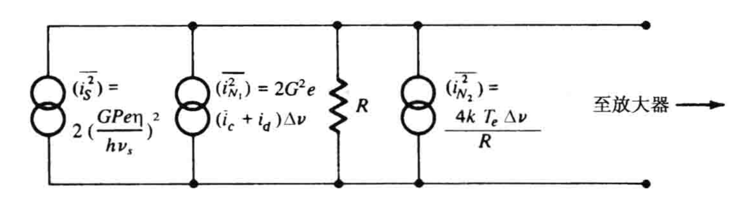


图 11.5　光电倍增管的等效电路

在输出端的信噪功率比

$$\frac{S}{N}=\frac{\overline{i_s^2}}{\overline{(i_{N_1}^2)}+\overline{(i_{N_2}^2)}}$$

$$=\frac{2(Pe\eta/h\nu_s)^2G^2}{2G^2e(\overline{i_c}+i_d)\Delta\nu+(4kT_e\Delta\nu/R)} \tag{11.3-9}$$

由于电流增益（$G\simeq10^6$）很大，式（11.3-9）分母中的第一项——它代表放大了的光电阴极散粒噪声——比热噪声和放大器噪声项 $4kT_e\Delta\nu/R$ 大得多，忽略这一项并假设 $i_d\gg\overline{i_c}$，令 S/N＝1，就能求得最小可探测光功率的表达式为

$$P_{最小}=\frac{h\nu_s(i_d\Delta\nu)^{1/2}}{\eta e^{1/2}} \tag{11.3-10}$$

例：光电倍增管的灵敏度。

考虑满足下列条件的光信号探测的一典型例子

$$\nu_s=6\times10^{14}\,\text{Hz}(\lambda=0.5\mu\text{m})$$

$$\eta=10\%$$

$$\Delta\nu=1\text{Hz}$$

$i_d=10^{-5}$ A（光电阴极暗电流的典型值）

代入式（11.3-10）得

$$P_{最小} = 3\times10^{-16}\,\mathrm{W}$$

相应的光电阴极信号电流是 $\overline{i_c}$ 约 2.4×10^{-17} A，所以前面的假设 $i_d \gg \overline{i_c}$ 是成立的。

信号限制的散粒噪声

如果有办法将热噪声和暗电流完全消除，那么对平均光阴极电流的唯一贡献就来自光信号，利用式（11.3-5）和式（11.3-9）自洽地求解 $P_{最小}$ 可得

$$P_{最小} \simeq \frac{h\nu_s\Delta\nu}{\eta} \tag{11.3-11}$$

它相当于光探测的量子极限，其重要性将在下节讨论。在实际的视频探测中想达到这个极限几乎是不可能的，因为它要求所有的暗电流以及其他各种外来的噪声源，例如到达光阴极的背景辐射所引起的散粒噪声，都近似为零。

然而，式（11.3-11）所表示的量子极限可以在外差式光探测法中达到，这将在下节中讨论。

11.4　光电倍增管的外差探测

在光信号的外差探测法中，被测信号 $E_s\cos\omega_s t$ 与第二个光场，即所谓的本地振荡场 $E_L\cos(\omega_s+\omega)t$ 混频，从而产生频移 $\omega(\omega\ll\omega_s)$，所以入射到光电阴极上的总场由下式给出

$$e(t) = \mathrm{Re}[E_L\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_s+\omega)t} + E_s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_s t}] \equiv \mathrm{Re}[V(t)] \tag{11.4-1}$$

本地振荡场常由接收端的激光器来担当，所以它可以比被测试的信号强得多，下面假设

$$E_L \gg E_s \tag{11.4-2}$$

图 11.6 为采用光电倍增管的外差探测原理的示意图。根据式（11.1-2）和式（11.4-1），光电阴极发射的电流为

$$i_c(t) \propto V(t)V^*(t) = E_L^2 + E_s^2 + 2E_LE_s\cos\omega t$$

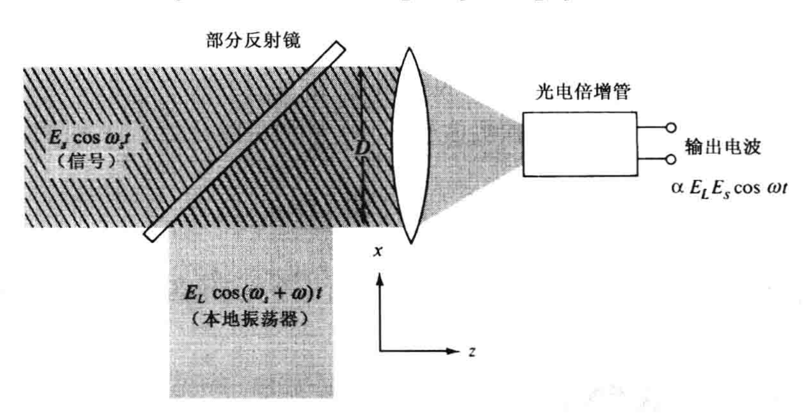


图 11.6　采用光电倍增管的外差探测器的原理图

利用式（11.4-2）可以将其写成

$$i_c(t) = aE_L^2\left(1+\frac{2E_s}{E_L}\cos\omega t\right) = aE_L^2\left(1+2\sqrt{\frac{P_s}{P_L}}\cos\omega t\right) \tag{11.4-3}$$

式中 P_s 和 P_L 分别为信号和本地振荡的功率。式（11.4-3）中的比例常数 a 可以仿照求式（11.3-6）的方法定出，即当 $E_s=0$ 时，直流与本地振荡功率 P_L 之间的关系式是 $\overline{i_c} = P_L\eta e/h\nu_L$，所以令 $\nu \approx \nu_L \approx \nu_s$ 且假设 $P_s \ll P_L$

$$i_c(t) = \frac{P_L e\eta}{h\nu}\left(1+2\sqrt{\frac{P_s}{P_L}}\cos\omega t\right) \tag{11.4-4}$$

于是总的阴极散粒噪声为

$$\overline{(i_{N_1}^2)} = 2e\left(i_d + \frac{P_L e\eta}{h\nu}\right)\Delta\nu \tag{11.4-5}$$

式中，i_d 是平均暗电流，$P_L e\eta / h\nu$ 是强的本地振荡场形成的直流阴极电流。散粒噪声电流被放大了 G 倍，形成的输出噪声为

$$\overline{(i_N^2)}_{阳极} = G^2 2e\left(i_d + \frac{P_L e\eta}{h\nu}\right)\Delta\nu \tag{11.4-6}$$

在输出端的方均信号电流按式(11. 4-4)可写成

$$\overline{(i_s^2)}_{阳极} = 2G^2\left(\frac{P_s}{P_L}\right)\left(\frac{P_L e\eta}{h\nu}\right)^2 \tag{11.4-7}$$

在输出端的信噪功率比由下式给出

$$\frac{S}{N} = \frac{2G^2(P_s P_L)(e\eta/h\nu)^2}{[G^2 2e(i_d + P_L e\eta/h\nu) + 4kT_e/R]\Delta\nu} \tag{11.4-8}$$

如式（11.3-9）那样，分母中的最后一项代表在输出负载上产生的热噪声以及光电倍增管后面放大器的有效输入噪声。外差探测法方案的优点现在就变得一目了然。增加本地振荡功率 P_L 的值，信噪比 S/N 也随之增加，直到分母中 $G^2 2eP_L e\eta / h\nu$ 项占统治地位。此时本地振荡电流产生的散粒噪声使其他所有的噪声都显得微不足道。当这种情形发生时式（11.4-8）就变成

$$\frac{S}{N} \simeq \frac{P_s}{h\nu\Delta\nu/\eta} \tag{11.4-9}$$

它相当于光探测的量子极限。最小可探测信号，即使输出信噪比等于 1 时的输入信号功率就可写成

$$(P_s)_{最小} = \frac{h\nu\Delta\nu}{\eta} \tag{11.4-10}$$

这个功率在 $\eta = 1$ 时相应于每 $(\Delta\nu)^{-1}$ 秒钟内发出一个光子的通量。换句话说，在系统的每一分辨时间内发出一个光子。

例：外差系统的最小探测功率。

将式（11.4-10）表达的外差探测体系的最小探测功率，与第 11.3 节视频探测中的例题计算的值作一个比较是有意义的。采用相同的数据

$\nu = 6\times10^{14}\,\text{Hz}(\lambda = 0.5\,\mu\text{m})$；

$\eta = 10\%$；

$\Delta\nu = 1\text{Hz}$

得到

$$(P_s)_{最小} \approx 4\times10^{-18}\,\text{W}$$

这个数值比视频探测情形中的 $P_{最小} = 3\times10^{-16}\,\text{W}$ 要小得多。

光的粒子性导致的极限灵敏度

光学探测灵敏度的量子极限曾由式（11.4-10）给出

$$(P_s)_{最小} = \frac{h\nu\Delta\nu}{\eta} \tag{11.4-11}$$

已经证明，上述极限的来源是光电发射电流的散粒噪声。换一种说法，可以将这种噪声看成是光的粒子性引起的。根据这样的看法，频率为 ν 的电磁波的最小能量增量为 $h\nu$，一个光波的功率 P 平均值可写成

$$P = \overline{N}h\nu \tag{11.4-12}$$

其中，$\overline{N}$ 为每秒钟到达光电阴极的平均光子数。下面假设有一个假想的无噪声的光电倍增管，其中每 η^{-1} 个入射光子正好产生一个电子。在观察期 T 内对产生的电子计数，然后对大量的类似的观测结果求平均，从而完成对 P 的测量。

在观察期间 T 内，发射电子数的平均值是

$$\overline{N_e} = \overline{N}T\eta \tag{11.4-13}$$

假设光子到达的情形是完全随机的，在固定观测周期内到达的光子数服从泊松统计。因为在我们的理想例子中，电子的发射与光子的到达相类似，故它们服从相同的统计分布规律。这就引起了涨落

$$\overline{(\Delta N_e)^2} \equiv \overline{(N_e - \overline{N_e})^2} = \overline{N_e} \equiv \overline{N}T\eta$$

将最小可测的量子数看成是当方均根涨落等于平均值时的情形，有

$$(\overline{N}_{最小}\,T\eta)^{1/2} = \overline{N}_{最小}\,T\eta$$

或

$$\overline{(N)}_{最小} = \frac{1}{T\eta} \tag{11.4-14}$$

如果将上式两边乘以 $h\nu$ 使它转换成功率的形式，并应用 $T^{-1} \approx \Delta\nu$，$\Delta\nu$ 为系统的带宽，则得

$$(P_s)_{最小} = \frac{h\nu\Delta\nu}{\eta} \tag{11.4-15}$$

上式的结果与式（11.4-10）一致。

上述讨论指出了这样一个事实，光电流的噪声（涨落）可以归结于物理过程的随机性。在泊松分布光子（如普通激光器）和完全光子发射（$\eta = 1$）的情形，涨落是由于光子引起的；在相反的情形，假设没有光子涨落，但是有光子的随机发射（$\eta<1$），这对应于纯散粒噪声。对噪声功率的电子测量会产生同样的结果，测量并不能区分上述的两种情形。

11.5　光电导探测器

光电导探测器的工作原理如图 11.7 所示。一个半导体晶体与一个电阻 R 及电压源 V 串联，被测的光场入射到晶体上并被半导体晶体吸收，从而使电子激发进入导带（或是在 p 型半导体中使空穴激发进入价带）。这种激发降低了半导体的电阻 R_d，于是增加了跨过 R 的电压降，当 $\Delta R_d / R_d \ll 1$ 时该电压与入射光强成正比。

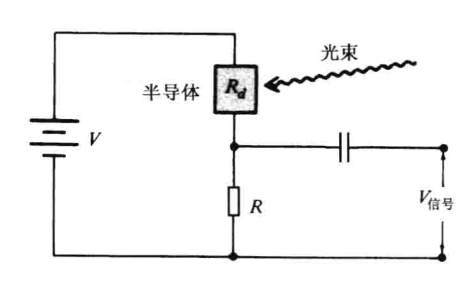


图 11.7　光电导探测器的典型偏置电路

下面说明就一种通用的半导体探测器——汞掺杂的锗[4]所包含的能级情形。汞原子进入锗晶体中以受主的形式存在，其电离能为 0.09eV。这就是说，光子的能量至少应该为 0.09eV（光子波长短于 14μm）才能使一个电子从价带顶跃迁到汞原子（受主）能级处。通常锗晶体中也含有施主，其浓度 N_D 比受主小。在低温时从能量观点考虑，施主上的价电子会跌入数目远较其为多的受主 H_g 能级上，从而使施主变成正电离的状态，同样数目的受主变成负电离的状态。因为受主浓度 $N_A \gg N_D$，大部分受主原子呈中性。

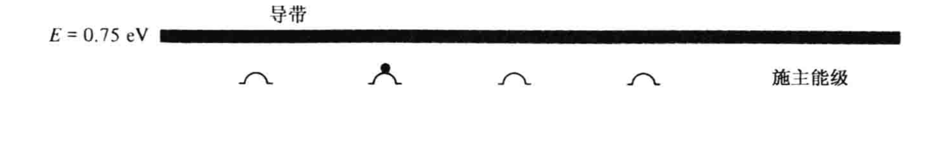
一个入射的光子被吸收时会使一个电子从价带升入受主原子能级，如图 11.8 中的过程 A 所示。在价带中刚形成的电子空缺（即空穴）在外电场的作用下沿着电场的方向漂移，因而形成信号电流。当一个电子从电离了的受主能级跌回价带时，将会使价带中的空穴消失，如图 11.8 中的过程 B 所示，空穴对电流的贡献也就终止了。上述过程即所谓的电子–空穴复合，或者是一个空穴被电离受主原子的陷阱俘获。

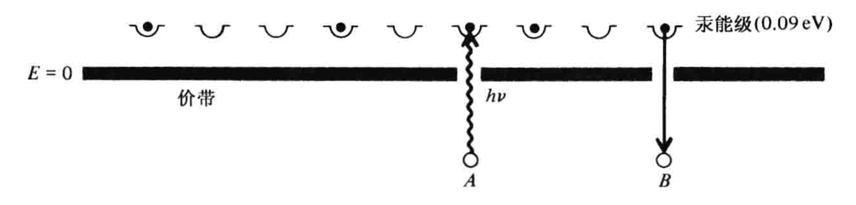
选择电离能较低的杂质，能探测能量较低的光子，事实上通常的光电导探测器所测的波长可长达 $\lambda = 50\mu\text{m}$。例如铜（Cu）作为受主杂质进入锗（Ge）中，其电离能为 0.04eV，它的波长探测限为 $\lambda \approx 32\mu\text{m}$。一些商业上常用的光电导探测器的响应曲线示于图 11.9。

上面的讨论清楚地表明，光电导探测器与光电倍增管相比的主要优点是，它能探测波长较长的辐射，因为此时产生可动载流子的过程并不需要克服大的表面势垒。其缺点是电流的放大倍数不大，而且必须使半导体冷却，以避免光生载流子被热激发所淹没。

考虑功率为 P、频率为 ν 的一光束入射到光电导探测器上，令一个入射光子激发产生一个载流子的概率——即所谓量子效率——为 η，则载流子的产生率为 $G = P\eta / h\nu$。如果载流子在复合前的平均生存时间为 τ_0 秒，平均载流子数目 N_c 可以由产生率与复合率（N_c / τ_0）相等的条件得到，所以

$$N_c = G\tau_0 = \frac{P\eta\tau_0}{h\nu} \tag{11.5-1}$$





图标：● 电子
○ 空穴(一个电子空缺)
中性施主原子(仍拥有电子)
中性受主
正电离的施主原子(失去其价电子)
负电离的受主原子(俘获一个电子)

图 11.8　光电导半导体中的施主和受主杂质能级

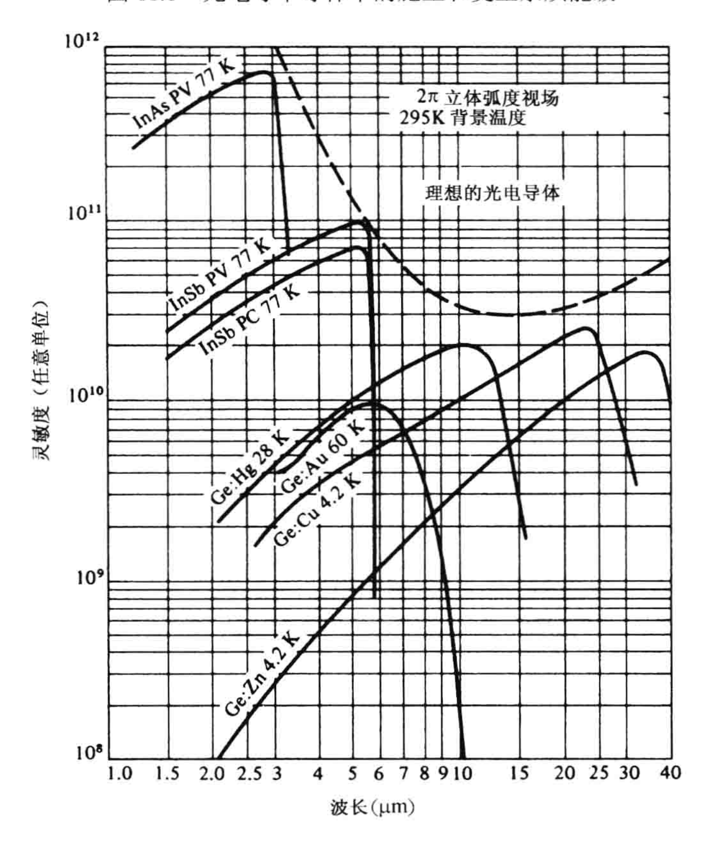


图 11.9　若干商用光电导体的相对灵敏度（由 Santa Barbara 研究公司提供）

每一个载流子在电场的影响下以平均速度 $\overline{v}$ 漂移，按式（10.4-1），在外电路形成的电流为 $i_c = e\overline{v}/d$，其中 d 为电极之间半导体晶体的长度，于是总电流等于 i_e 和所存在的载流子数

目的乘积，或应用式（11.5-1）可得

$$\bar{i} = N_c i_e = \frac{P\eta\tau_0 e\bar{v}}{h\nu d} = \frac{e\eta}{h\nu}\left(\frac{\tau_0}{\tau_d}\right)P \tag{11.5-2}$$

式中，$\tau_d = d/\bar{v}$ 是载流子通过长度 d 的漂移时间。所以因子（τ_0/τ_d）是受激载流子在复合之前的平均漂移长度与晶体长度之比。

方程式（11.5-2）描述了光电导探测器对于恒定光通量的响应，然而我们主要的兴趣在于光电导外差式探测法，在第 11.4 节中曾经证明，它可使探测灵敏度趋近于量子极限。为了确定光电导探测器的极限灵敏度，我们必须首先了解在这些器件中的噪声机制。

光电导探测器中的产生复合噪声

冷却的光电导探测器中的主要噪声机制反映了电流固有的随机性。尽管入射的光通量不随时间变化，但光产生个别载流子的过程却是随机的。它恰好与光电发射中涉及的无规性的类型完全一样，所以可以预期其结果会形成散粒噪声。不过在光电导探测器中有一点却不大相同，即一个光生载流子，被电离的杂质俘获前存在的时间（它的复合寿命）为 τ 秒[④]。从式（11.5-2）可以明显地看出，载流子对外电路电流的贡献是 e（τ/τ_d）。由于寿命 τ 不是一个常数，而必须用统计的方法来描述，所以在电流中引入了另一种随机的因素。

考虑吸收一个光子激发产生的一个载流子，其生存时间为 τ 秒，按式（10.4-1），它对外电路电流的贡献是

$$i_e(t) = \begin{cases} \dfrac{e\bar{v}}{d} & 0 \leqslant t \leqslant \tau \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{11.5-3}$$

它的傅里叶变换为

$$I_e(\omega,\tau) = \frac{e\bar{v}}{2\pi d}\int_0^{\tau} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = \frac{-\mathrm{i}e\bar{v}}{2\pi\omega d}[1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}] \tag{11.5-4}$$

因此

$$|I_e(\omega,\ \tau)|^2 = \frac{e^2\bar{v}^2}{4\pi^2\omega^2 d^2}[2-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}] \tag{11.5-5}$$

按照式（10.3-10）需将 $|I_e(\omega,\tau)|^2$ 对 τ 求平均。采用与第 10.5 节中相同的方法，将概率函数[⑤]写成 $g(\tau) = \tau_0^{-1}\exp(-\tau/\tau_0)$。将式（11.5-5）按下列公式对所有可能的 τ 值求平均，得

$$\begin{aligned}\overline{|I_e(\omega)|^2} &= \int_0^{\infty} |I_e(\omega,\tau)|^2 g(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{2e^2\bar{v}^2\tau_0^2}{4\pi^2 d^2(1+\omega^2\tau_0^2)}\end{aligned} \tag{11.5-6}$$

应用卡森定理式（10.3-10）的电流涨落的谱密度函数是

$$S(\nu) = 2\overline{N}\frac{2e^2(\tau_0^2/\tau_d^2)}{1+\omega^2\tau_0^2} \tag{11.5-7}$$

---

④ 式（11.5.2）中的 τ_0 是 τ 对大量载流子求平均之值。

⑤ $g(\tau)\mathrm{d}\tau$ 是一个载流子复合前存在的时间为 τ 到 $\tau+\mathrm{d}\tau$ 间的概率。

式中 $\tau_d = d/\bar{v}$，而每秒钟产生的平均载流子数目 $\overline{N}$ 可以按下式以平均电流 $\overline{I}$ 表示为[⑥]

$$\overline{I} = \overline{N}\frac{\tau_0}{\tau_d}e \tag{11.5-8}$$

因此有

$$S(\nu) = \frac{4e\overline{I}(\tau_0/\tau_d)}{1+4\pi^2\nu^2\tau_0^2}$$

所以，在频率间隔 ν 到 $\nu+\Delta\nu$ 之间代表噪声功率的方均电流为

$$\overline{i_N^2} \equiv S(\nu)\Delta\nu = \frac{4e\overline{I}(\tau_0/\tau_d)\Delta\nu}{1+4\pi^2\nu^2\tau_0^2} \tag{11.5-9}$$

式（11.5-9）为产生–复合噪声的基本结果。

例：汞掺杂锗光电导探测器中的产生复合噪声。

为了对表达式 $\overline{i_N^2}$ 中所涉及的数值有更好的了解，我们考虑一个在 20K 下工作的一个典型的汞掺杂锗探测器，其特性为

$$\begin{cases} d = 10^{-1}\text{cm} \\ \tau_0 = 10^{-9}\text{s} \\ V\text{（跨过电极间距 } d\text{）} = 10\text{V} \Rightarrow E = 10^2\text{V/cm} \\ \mu = 3\times10^4\text{cm}^2/\text{V}\cdot\text{s} \end{cases}$$

漂移速度是 $\bar{v} = \mu E = 3\times10^6\text{cm/s}$，$\tau_d = d/\bar{v} \simeq 3.3\times10^{-8}\text{s}$，因而 $\tau_0/\tau_d = 3\times10^{-2}$，所以平均来讲，一个载流子在复合之前只行走了样品长度（d=1mm）的 3%。将式（11.5-9）与散粒噪声的结果式（10.4-9）相比较，我们发现，对一个给定的平均电流 $\overline{I}$，产生复合噪声比散粒噪声要小一个因子

$$\frac{\overline{(i_N^2)}_{\text{产生复合}}}{\overline{(i_N^2)}_{\text{散粒噪声}}}\Bigg|_{\omega\tau_0\ll1} = 2\left(\frac{\tau_0}{\tau_d}\right) \tag{11.5-10}$$

在上面的例子中其值为 1/15，遗憾的是，下面将证明，噪声减弱的同时，信号功率的大小也会减弱（τ_0/τ_d）倍，因而抵消了低噪声的优点。

光电导外差探测

这里的情形和图 11.6 描述的光电倍增管外差探测相似。信号场

$$e_s(t) = E_s\cos\omega_s t$$

与一个强的本地振荡场

$$e_L(t) = E_L\cos(\omega+\omega_s)t \qquad E_L \gg E_s$$

混合，于是入射在光电导体上的总电场是

$$e(t) = \text{Re}(E_s e^{i\omega_s t} + E_L e^{i(\omega_s+\omega)t}) \equiv \text{Re}[V(t)] \tag{11.5-11}$$

按式（11.1-2），载流子的产生率是 $aV(t)V^*(t)$，a 是待定常数。描述受激载流子数目 N_c 的方程式则为

---

⑥ 该关系式由以下情形得到：外电路中流动的每个载流子的平均电荷为 $e(\tau_0/\tau_d)$，该值乘以产生率 $\overline{N}$，就得到电流。

$$\frac{\mathrm{d}N_c}{\mathrm{d}t} = aVV^* - \frac{N_c}{\tau_0} \tag{11.5-12}$$

式中，τ_0 是平均载流子寿命，所以 N_c/τ_0 代表载流子的衰减率。假设 $N_c(t)$ 的解由如下形式的一个直流项和一个正弦分量之和组成

$$N_c(t) = N_0 + (N_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{c.c.}) \tag{11.5-13}$$

式中 c.c.代表“复共轭”。

代入式（11.5-12）得

$$N_c(t) = a\tau_0(E_s^2 + E_L^2) + a\tau_0\left(\frac{E_s E_L \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{1 + i\omega\tau_0} + \mathrm{c.c.}\right) \tag{11.5-14}$$

其中，取 E_s 和 E_L 为实数。通过样品的电流为单位长度中的载流子数目 N_c/d 乘以 $e\bar{v}$，$\bar{v}$ 为漂移速度

$$i(t) = \frac{N_c(t)e\bar{v}}{d} \tag{11.5-15}$$

利用式（11.5-14），式（11.5-15）变成

$$i(t) = \frac{e\bar{v}a\tau_0}{d}\left(E_s^2 + E_L^2 + \frac{2E_s E_L \cos(\omega t - \phi)}{\sqrt{1 + \omega^2\tau_0^2}}\right) \tag{11.5-16}$$

其中，$\phi = \tan^{-1}(\omega\tau_0)$。可见电流表达式中含有一个以频率 ω 振荡并与 E_s 成正比的信号分量。当信号功率 $P_s = 0$ 时，由式（11.5-16）决定的直流电流表达式应与式（11.5-2）一致，可以确定式（11.5-16）中的常数 a。为了满足此条件，须将式（11.5-16）重写为

$$i(t) = \frac{e\eta}{h\nu}\left(\frac{\tau_0}{\tau_d}\right)\left[P_s + P_L + \frac{2\sqrt{P_s P_L}}{\sqrt{1 + \omega^2\tau_0^2}}\cos(\omega t - \phi)\right] \tag{11.5-17}$$

式中，P_s 和 P_L 分别代表入射信号功率和本地振荡功率，$\nu = \nu_s = \omega_s/2\pi$，量子效率 η 代表每一个入射的光子所激发的载流子数目。所以信号电流为

$$i_s(t) = \frac{2e\eta}{h\nu}\left(\frac{\tau_0}{\tau_d}\right)\frac{\sqrt{P_s P_L}}{\sqrt{1 + \omega^2\tau_0^2}}\cos(\omega t - \phi) \tag{11.5-18}$$

而直流（平均）电流为

$$\bar{I} = \frac{e\eta}{h\nu}\left(\frac{\tau_0}{\tau_d}\right)(P_s + P_L) \tag{11.5-19}$$

由于在产生复合噪声表达式（11.5-9）中出现的平均电流 $\bar{I}$ 可以写成

$$\bar{I} = \left(\frac{e\eta}{h\nu}\right)\left(\frac{\tau_0}{\tau_d}\right)P_L \qquad P_L \gg P_s$$

可以由增加 P_L 来增加噪声功率 $\overline{i_N^2}$ 同时使信号功率 $\overline{i_s^2}$ 按式（11.5-18）增大，直到由式（11.5-9）所表达的产生复合噪声成为总输出噪声的主要部分。当这个条件被满足时，利用式（11.5-9）、式（11.5-18）和式（11.5-19）并令 $P_L \gg P_s$，可以将信噪比写成

$$\frac{S}{N} = \frac{\overline{i_s^2}}{\overline{i_N^2}} = \frac{2(e\eta\tau_0/h\nu\tau_d)^2 P_s P_L/(1 + \omega^2\tau_0^2)}{4e^2\eta(\tau_0/\tau_d)^2 P_L \Delta\nu/(1 + \omega^2\tau_0^2)h\nu} = \frac{P_s\eta}{2h\nu\Delta\nu} \tag{11.5-20}$$

最小可测信号是与信噪比等于 1 相应的，令式(11.5-20)的左方等于 1，再对 P_s 求解可得

$$(P_s)_{\min}=\frac{2h\nu\Delta\nu}{\eta} \tag{11.5-21}$$

对于同样的η，式（11.5-21）给出的光电导外差探测的极限灵敏度为式（11.4.10）给出的光电倍增管外差探测时的两倍。然而，在实际情况中光电导体探测器的η 可以趋近于 1，最好的光电倍增管的η 只不过约为 30%。

例：采用光电导体的外差探测器在 10.6μ m 时的最小探测功率。

假设

$$\lambda=10.6\mu\text{m}$$
$$\Delta\nu=1\text{Hz}$$
$$\eta\approx 1$$

由式（11.5-21）可算出最小探测功率为

$$(P_s)_{\min}\approx 10^{-19}\,\text{W}$$

实验上已证明[5,9]，式（11.5-20）所给出的理论信噪比在实际工作中是可以达到的，结果见图 11.10。

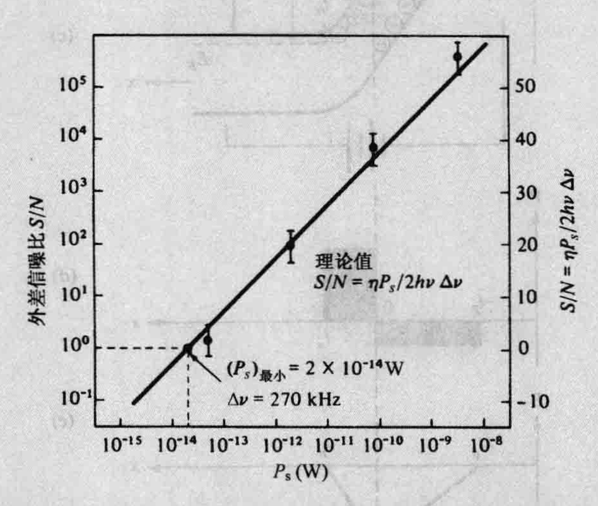


图 11.10　Ge:Cu 探测器中外差频率为 70MHz 时的外差信噪比。数据点代表观测值（引自文献[5]）

11.6　p-n 结

在对 p-n 结二极管探测器进行描述之前，我们需要先了解半导体 p-n 结的工作原理。考虑如图 11.11 所示的结，它包含一个从施主掺杂的半导体区域（n 型）到受主掺杂区（p 型）的突变，在 n 型区中的载流子以电子为主，在 p 型区中的载流子为空穴。掺杂分布图——即在 n 型区中的过剩施主原子浓度或在 p 型区中的过剩受主原子浓度分布，如图 11.11（a）所示。上述突变通常是使合适的杂质原子经过扩散而进入具有相反导电类型的半导体衬底而形成的。在我们的略为理想化的突变结中，假设 n 区（$x>0$）中的净施主浓度 N_D 为常数，p 区（$x<0$）的受主浓度 N_A 为常数。

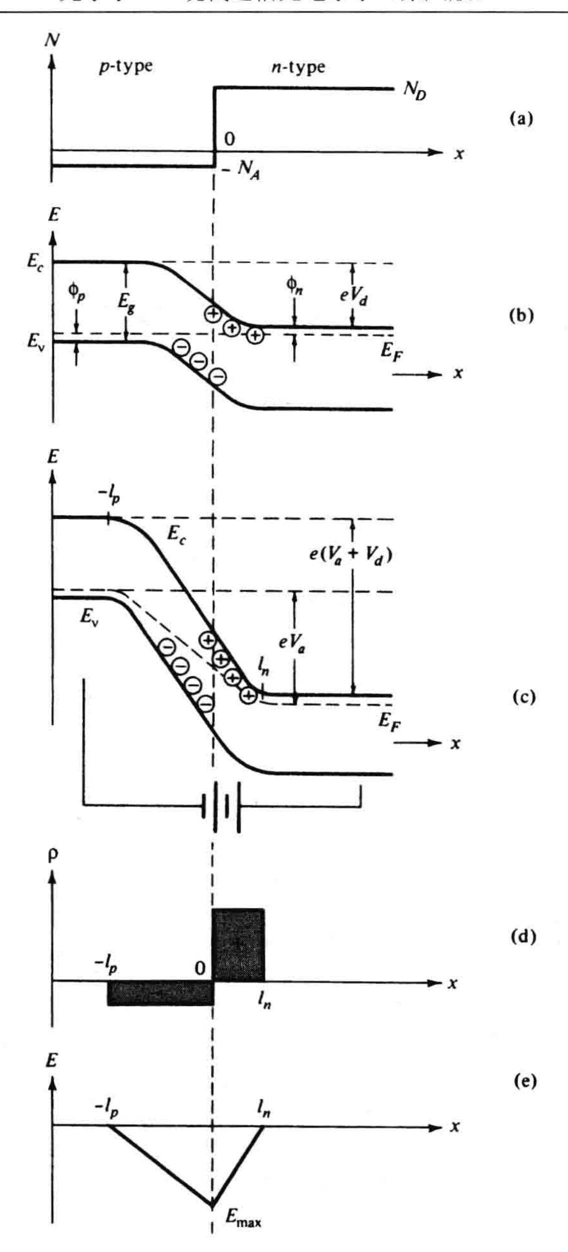


图 11.11　突变 p-n 结。(a) 杂质分布；(b) 偏压为 0 时的能带图；(c) 反向偏置的能带图；(d) 在耗尽层中的净电荷浓度；(e) 电场。(b) 和 (c) 中的圆圈代表耗尽层中电离了的杂质原子

外加电压为零时的能带图见图 11.11 (b)，顶部（或底部）的曲线用来代表电子的势能与位置 x 的函数关系，使一个电子从结的 n 到 p 边所需的能量极小值为 eV_d。如将从费米能级到相应的能带底或能带顶边缘的距离用 ϕ_n 和 ϕ_p 代表，有

$$eV_d = E_g - (\phi_n + \phi_p)$$

V_d 被称为“自建”结电势（扩散电势）。

图 11.11 (c) 所示为施加一个大小为 V_a 的反向偏压时结内的能带图。它使 p 区和 n 区中

的费米能级之差为 eV_a，并使跨过结的势垒高度从 eV_d 增加到 $e(V_d+V_a)$。在 p 区和 n 区之间电势的变化是由于可动载流子在 $-l_p<x<l_n$ 区域中被扫走而造成的，结果在该处形成由固定电离杂质原子组成的双电荷层，如图 11-11（d）所示。

为了对这个问题作解析处理，假设在耗尽层内（$-l_p<x<l_n$）过剩的杂质原子是完全电离的，利用 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon$ 和 $\boldsymbol{E}=-\nabla V$，V 为电势，则有

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}=\frac{eN_A}{\varepsilon}\quad 当 -l_p<x<0 \tag{11.6-1}$$

和

$$\frac{d^2V}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{eN_D}{\varepsilon}\quad 0<x<l_n \tag{11.6-2}$$

式中电子电荷为$-e$，介电常数为 ε。边界条件为

$$在 x=-l_p 和 x=+l_n 时\quad E=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=0 \tag{11.6-3}$$

$$V 和 \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} 在 x=0 处是连续的 \tag{11.6-4}$$

$$V(l_n)-V(-l_p)=V_d+V_a \tag{11.6-5}$$

若取 $V(0)=0$，则式（11.6-1）和式（11.6-2）的解为

$$V=\frac{e}{2\varepsilon}N_A(x^2+2l_px)\qquad -l_p<x<0 \tag{11.6-6}$$

$$V=-\frac{e}{2\varepsilon}N_D(x^2-2l_nx)\qquad 0<x<l_n \tag{11.6-7}$$

利用式（11.6-4）可得

$$N_Al_p=N_Dl_n \tag{11.6-8}$$

所以在双电荷层中含有的正负电荷是相等的。

条件式（11.6-5）给出

$$V_d+V_a=\frac{e}{2\varepsilon}(N_Dl_n^2+N_Al_p^2) \tag{11.6-9}$$

将它与式（11.6-8）联合可得

$$l_p=(V_d+V_a)^{1/2}\left(\frac{2\varepsilon}{e}\right)^{1/2}\left(\frac{N_D}{N_A(N_A+N_D)}\right)^{1/2} \tag{11.6-10}$$

$$l_n=(V_d+V_a)^{1/2}\left(\frac{2\varepsilon}{e}\right)^{1/2}\left(\frac{N_A}{N_D(N_A+N_D)}\right)^{1/2} \tag{11.6-11}$$

所以，和以前一样有

$$\frac{l_p}{l_n}=\frac{N_D}{N_A} \tag{11.6-12}$$

对式（11.6-6）和式（11.6-7）求微分，可得电场表达式为

$$E=-\frac{e}{\varepsilon}N_A(x+l_p)\qquad -l_p<x<0$$

$$E=-\frac{e}{\varepsilon}N_D(l_n-x)\qquad 0<x<l_n \tag{11.6-13}$$

式（11.6-13）的电场分布示于图 11.11（e）。当 $x=0$ 时电场为极大值，它由下式给出

$$E_{\max}=-2(V_d+V_a)^{1/2}\left(\frac{e}{2\varepsilon}\right)^{1/2}\left(\frac{N_D N_A}{N_A+N_D}\right)^{1/2}$$
$$=-\frac{2(V_d+V_a)}{l_p+l_n}\tag{11.6-14}$$

在 p 区那一边单位结面积中存在的电荷 $Q=-eN_A l_p$，以及在 n 区那一边存在着大小相等而符号相反的电荷会引起结电容，，其理由是，按照式（11.6-10）和式（11.6-11），l_p 和 l_n 与外加电压 V_a 有关，所以电压的改变会引起电荷 $eN_A l_p=eN_D l_n$ 的改变，因而存在着单位面积上的微分电容⑦，它的表达式是

$$\frac{C_d}{\text{面积}}\equiv\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V_a}=eN_A\frac{\mathrm{d}l_p}{\mathrm{d}V_a}$$
$$=\left(\frac{\varepsilon e}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{N_A N_D}{N_A+N_D}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{V_a+V_d}\right)^{1/2}\tag{11.6-15}$$

利用式（11.6.10）和式（11.6.11）可以证明，式（11.6-15）可以写成

$$\frac{C_d}{\text{面积}}=\frac{\varepsilon}{l_p+l_n}\tag{11.6-16}$$

它与间距为 $l=l_p+l_n$ 的平行板电容器的公式是一致的。图 11.12 示出了一个 p-n 结的等效电路，其中的 C_d 为上面讨论过的电容，二极管的并联电阻 R_d 在反向偏压的情形下与负载电阻 R_L 比起来是很大的（大于 $10^6\,\Omega$），故可以忽略不计。电阻 R_s 代表在 p，n 区内与结相邻的体内欧姆损耗电阻。

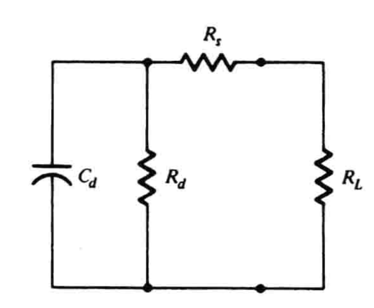


图 11.12　p-n 结的等效电路。在一个典型的反向偏压二极管中，$R_d \gg R_s$ 和 R_L，以及 $R_L \gg R_s$，所以跨过结的电阻可以看成等于负载电阻 R_L

11.7　半导体光电二极管

半导体 p-n 结在光学探测器中得到了广泛的应用，见参考文献[7~9]。在应用中它们被称为结光电二极管。结光电二极管所涉及的主要物理机制如图 11.13 所示。在 A 处，一个入射的光子在 p 型半导体中被吸收并产生一个空穴和一个自由电子。如果这个过程发生在耗尽层

⑦电容定义为 $C=Q/V_a$，但是当外加电压为 V_a 时，通过一个小的交流电压指所“见到”的电容是微分电容 $C_d=\mathrm{d}Q/\mathrm{d}V_a$。

的扩散长度以内（过剩的少数载流子的浓度降低到其峰值的 e^{-1} 倍的距离，或是从物理观点来看，它是少数载流子与相反类型的载流子复合之前行走的平均距离），电子则会有很大的概率到达耗尽层的边界，并在结内电场的作用下漂移穿过它。每一个穿过结的电子将贡献一个电荷 e 给外电路的电流，如 10.4 节所述。如果光子在耗尽层的 n 区附近被吸收，见图中的 C 点，结果生成的空穴会扩散进入结并漂移穿过它，这也会在外电路中形成电荷 e 的流动。光子也可能在耗尽层中 B 处被吸收，此时所产生的空穴和电子两者皆会在电场的作用下 漂移，分别到达 p 区和 n 区。在这种情形下每个载流子穿行的距离比结的整个宽度小，所以它们在外电路中对电流的贡献按式（10.4-1）和式（10.4-7）也为 e。在实用中上述最后的过程是最为可取的，因为每吸收一个光子就会产生一个电荷 e，并且避免了由于载流子有限扩散时间引起的电流响应延迟。作为上面讨论的结果，光电二极管常采用 p-i-n 型的结构，其中一个本征的高电阻率（i）层被夹在 p 和 n 型材料之间，电压降中的绝大部分落在该层，它应该具有足够的厚度，以保证大部分入射光子会在其中被吸收。一个典型的 p-i-n 光电二极管的结构如图 11.14 所示。

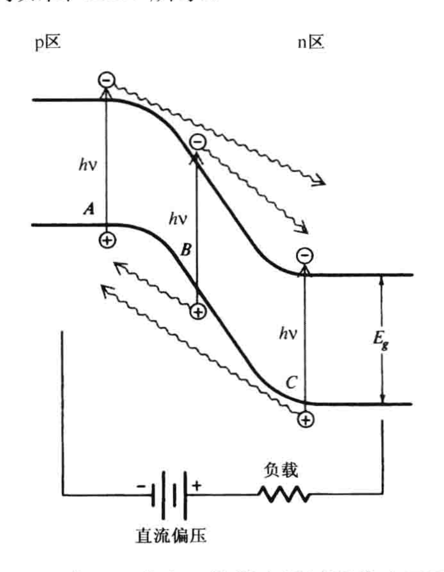


图 11.13　在 p-n 光电二极管中经过吸收光子而形成电流的三种类型的电子－空穴对产生示意图

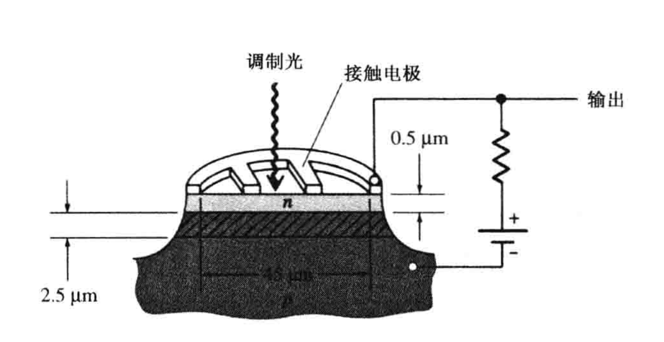


图 11.14　p-i-n 光电二极管（引自文献[10]）

从图 11.13 中可以清楚地看到光电二极管只能用来探测光子能量 $h\nu > E_g$ 的辐射，E_g 为半导体的禁带宽度。如果光子能量过大，即 $h\nu \gg E_g$，在半导体中的光吸收随频率而强烈地增加，在入射表面附近（图 11.14 中的 n 型区）光将被完全吸收，吸收光子所产生的少数载流子在扩散到耗尽层之前将与多数载流子复合。该过程对电流没有贡献，就信号而言，显然，这部分载流子就浪费掉了。这就是当 $h\nu > E_g$ 时二极管的光电响应又会下降的原因。光电二极管典型的频率响应曲线如图 11.15 所示。

光电二极管的量子效率定义为：每个入射光子形成的流过外电路的载流子数目。选择合适的抗反射膜，其本征量子效率可以趋近 100%。图 11.15 给出了若干光电二极管的量子效率。在光通信中，光电二极管的选择基于一些标准，包括速度、灵敏度、线性、偏置电压、

暗电流和成本。通常，间接带隙半导体制造的光电二极管比用直接带隙材料制造的光电二极管速度慢。直接带隙半导体具有强的吸收，因而用其制造的探测器具有高速特性，比如InGaAs。依据图 11.15，InGaAs 光电二极管还可以在 1300nm 和 1500nm 附近的光谱区域提供高的量子效率。

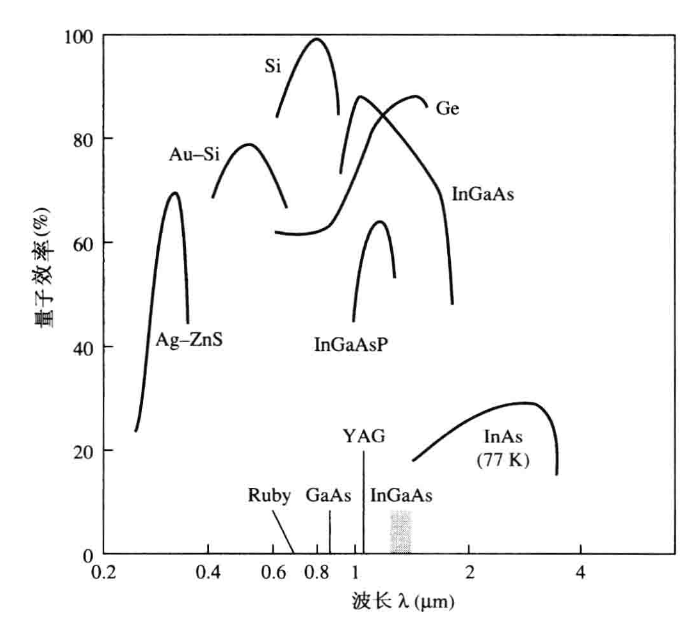


图 11.15　各种光电探测器的量子效率。（引自文献[11]。）各种激光器的发射波长也在图中标出

光电二极管的频率响应

光学探测器的主要特性之一是它们的频率响应，即对入射光强度受到高频调制而引起的变化的响应能力。限制光电二极管频率响应的三个主要机制为：

1. 在 p 和 n 区中产生的载流子的有限扩散时间。此因素在上节中曾被描述，其影响可通过对耗尽层长度作适当的选择而使其减小。

2. 结电容 C_d 对信号电流的分流作用如图 11.12 所示，它对光强调制频率引入一个上限

$$\omega_m \simeq \frac{1}{R_e C_d} \tag{11.7-1}$$

式中，R_e 是与 C_d 并联的等效电阻。

3. 载流子漂移穿过耗尽层的有限渡越时间。

首先分析由渡越时间引起的限制，我们假设一个略为理想化的情况，认为载流子在一个单一的平面上（如图 11.13 中 *A* 点）产生，然后以恒定的速度 *v* 漂移穿过整个耗尽层。当电场足够强时半导体中载流子的漂移速度趋向饱和，所以恒定速度的假设与实际情形并不相差太远。即使是如图 11-11（e）中那样的电场非均匀分布的情形下，如果在绝大部分耗尽层宽度中电场强度超过饱和值，速度是常数的假设还是成立的。作为一个例子，在锗中饱和速度的情形如图 11.16 中数据所示。

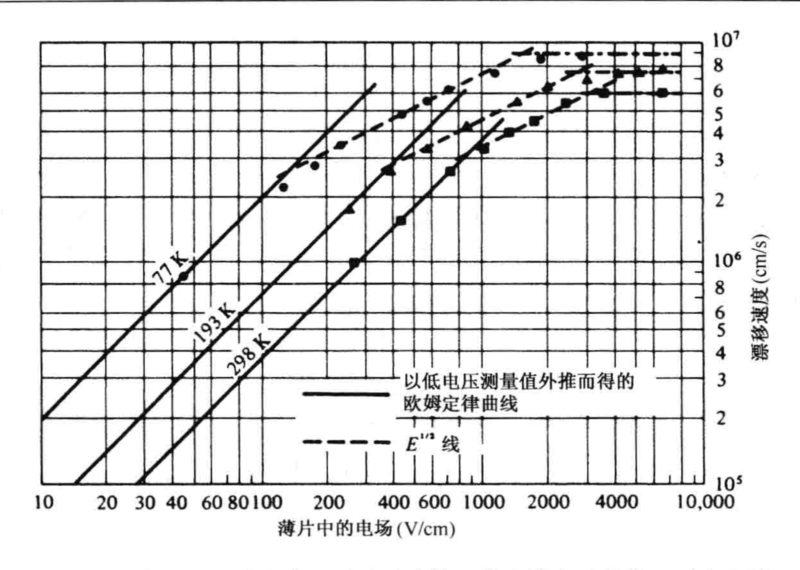


图 11.16　显示高电场时锗中空穴漂移速度趋于饱和的实验数据（引自文献[12]）

入射光场可以写成

$$e(t)=E_s(1+m\cos\omega_m t)\cos\omega t\equiv\mathrm{Re}[V(t)] \tag{11.7-2}$$

式中

$$V(t)\equiv E_s(1+m\cos\omega_m t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{11.7-3}$$

所以振幅受到频率 $\omega_m/2\pi$ 的调制。根据 11.1 节的讨论，取载流子产生率为 $G(t)$，这就是说每秒钟产生的载流子数目与 $e^2(t)$ 在一个比光学周期 $2\pi/\omega$ 长的时间中的平均值成正比。这个平均值等于 $\dfrac{1}{2}V(t)V^*(t)$，所以产生率可以写成

$$G(t)=aE_s^2\left[\left(1+\frac{m^2}{2}\right)+2m\cos\omega_m t+\frac{m^2}{2}\cos 2\omega_m t\right] \tag{11.7-4}$$

式中 a 为待定比例常数。略去上式中含有 $\cos 2\omega_m t$ 的项，并采用复数表示法，可将 $G(t)$重写为

$$G(t)=aE_s^2\left[1+\frac{m^2}{2}+2m\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_m t}\right] \tag{11.7-5}$$

由式（10.4-1）可知，一个以速度 $\bar{v}$ 漂移的载流子在外电路中对瞬时电流的贡献是

$$i=\frac{e\bar{v}}{d} \tag{11.7-6}$$

式中 d 是耗尽层的宽度。在 t' 到 $t'+\mathrm{d}t'$ 时间间隔内产生的载流子所引起的电流为 $(e\bar{v}/d)G(t')\mathrm{d}t'$，但是，因为每一个载流子花在渡越上的时间是 $\tau_d=d/\bar{v}$，所以在时刻 t 的瞬时电流值为所有在 t 和 $t-\tau_d$ 之间产生的载流子的贡献之和

$$i(t)=\frac{e\bar{v}}{d}\int_{t-\tau_d}^{t}G(t')\mathrm{d}t'=\frac{e\bar{v}aE_s^2}{d}\int_{t-\tau_d}^{t}\left(1+\frac{m^2}{2}+2m\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_m t'}\right)\mathrm{d}t'$$

积分后的结果是

$$i(t)=\left(1+\frac{m^2}{2}\right)eaE_s^2+2meaE_s^2\left(\frac{1-e^{-i\omega_m\tau_d}}{i\omega_m\tau_d}\right)e^{i\omega_m t} \tag{11.7-7}$$

因子 $(1-e^{-i\omega_m\tau_d})/i\omega_m\tau_d$ 代表相位延迟以及由有限漂移时间 τ_d 引起的信号电流的减小。如果漂移时间比调制周期短，从而 $\omega_m\tau_d \ll 1$，该因子可达到其最大值 1，此时的信号电流最大。这个因子随渡越相位角 $\omega_m\tau_d$ 而变化的曲线如图 11.17 所示。当调制不存在，即 m=0 时，式（11.7-7）应该符合实验观测值，每个入射光子将产生 η 个载流子，由此，可以求得式（11.7-7）中的常数 a 之值。所以平均直流电流是

$$\bar{I}=\frac{Pe\eta}{h\nu} \tag{11.7-8}$$

式中 P 是 $m=0$ 时的光信号功率。利用式（11.7-8）可以将式（11.7-7）重写成

$$i(t)=\frac{Pe\eta}{h\nu}(1+\frac{m^2}{2})+\frac{Pe\eta}{h\nu}2m\left(\frac{1-e^{-i\omega_m\tau_d}}{i\omega_m\tau_d}\right)e^{i\omega_m t} \tag{11.7-9}$$

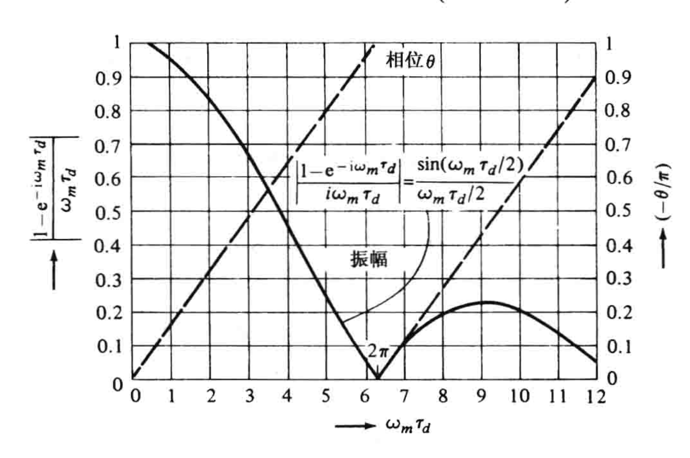


图 11.17　渡越时间减弱因子 $(1-e^{-i\omega_m\tau_d})/i\omega_m\tau_d$ 的相位和振幅

为了估算其他限制因素对光电二极管的调制频率响应的影响，引入二极管的等效交流电路图，如图 11.18 所示。图中 R_d 是二极管的增量交流电阻，C_d 为结电容，R_s 是接触串联电阻，L_p 是寄生电感，主要由接触导体引起的，C_p 则是由接触导体和衬垫引起的寄生电容。

最近的研究[13~16]表明，金属－GaAs（肖特基）二极管的响应频率可高达10^{11} Hz，其原理图如图 11.19 所示。为了实现如此高的频率响应，采用一块非常小的面积（5μm×5μm）以使 C_d 达到最小，还采用了很短的接触导体，从而减小了 R_s 和 L_p。为了减小 C_p，还把二极管制作在半绝缘 GaAs 衬垫[13]上，同时利用很薄（0.3 μm）的 n-GaAs 漂移区，减少了载流子的渡越时间。频率响应的测量结果如图 11.20 所示。测量结果表明，响应频率得到很大的提高，达到 100GHz。这个首次成功得到的测量结果，是通过用锁模激光器[14]产生的皮秒级的脉冲（对于我们感兴趣的频率范围，可看作 δ 函数）激发此光电二极管，测量其脉冲响应而完成的。只有几皮秒的的二极管脉冲响应，可通过一种新的电光采样技术[16,17]来测量。二极管的频率响应可由所测得的脉冲响应的傅里叶变换得到，这在图 11.20 中标出。

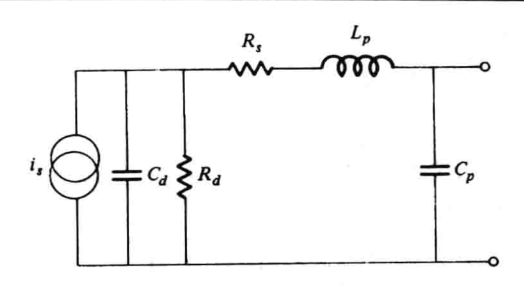


图 11.18　半导体光电二极管的高频等效电路

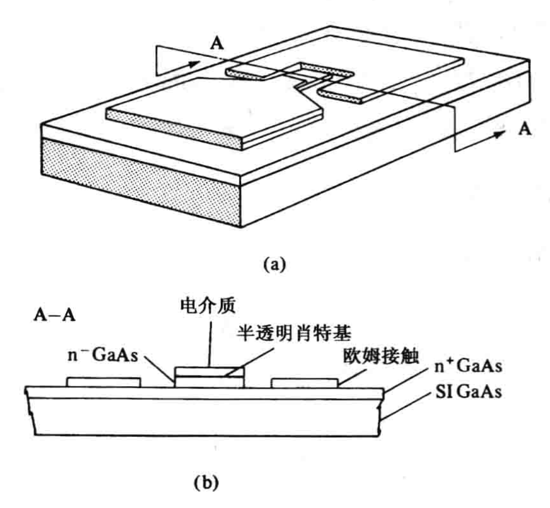


图 11.19　(a) 平板 GaAs 肖特基光电二极管。(b)A－A 截面。n-GaAs（厚 0.3 μm）层与 n^+GaAs 层（厚 0.4 μm）是通过液相外延法在半绝缘 GaAs 衬底形成的。半透明肖特基由 100 Å 的 Pt 组成（引自文献[15]）

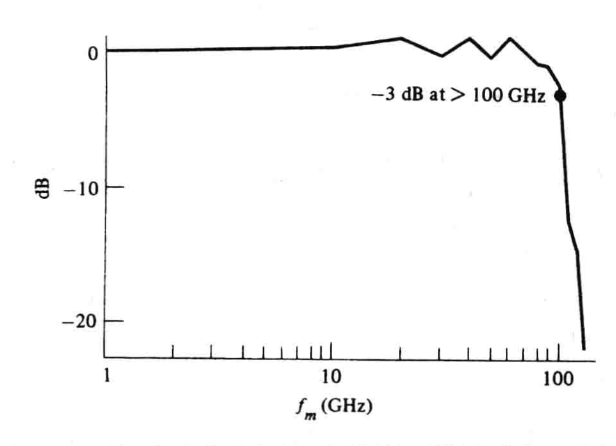


图 11.20　图 11.19 所示的肖特基光电二极管的调制频率响应（引自文献[15]）

例：GaAs p-n 结光电二极管的调制响应。

计算图 11.19 所示的二极管的频率响应上限。下面给出所需参数。

面积 = 5μm×5μm

$\varepsilon = 12.25\varepsilon_0$

$d = 0.3\mu m$ （＝漂移区的厚度）

$\bar{v} = 10^7 cm/s$ （GaAs的电子饱和速度）

$R_s \approx 10\Omega$

由条件 $2\pi f_m \tau_d = 2$，可以得到渡越时间极限 f_m，根据图 11.17，这是响应下降到最大值的 84%时的频率。结果为

$$f_m \approx \frac{\bar{v}}{\pi d} \approx 1.06 \times 10^{11} Hz$$

根据上述参数，结电容约为 10^{-14} F，在这种情况下，寄生电容为约为 10^{-13} F。因为反向偏压结的电阻 R_d 很大，所以通常被忽略不计。

频率响应极限为 $f_m \approx 1/(2\pi R_s C_p) = 1.59 \times 10^{11}$ Hz。因为这个值大于渡越时间极限，所以得出结论，频率响应就是渡越时间，上限约为 10^{11} Hz，这结论与图 11.20 给出的值一致。

光电二极管的探测灵敏度

假设被探测的光的调制频率足够低，从而渡越时间因子为 1，以及条件

$$\omega_m \ll \frac{1}{R_e C_d} \qquad (11.7\text{-}10)$$

成立，所以按照式（11.7-1），二极管电容 C_d 对信号电流的分流作用可以忽略，则二极管电流可由式（11.7-9）给出

$$i(t) = \frac{Pe\eta}{hv}\left(1 + \frac{m^2}{2}\right) + \frac{Pe\eta}{hv} 2m e^{i\omega_m t} \qquad (11.7\text{-}11)$$

与负载电阻 R_L 相连的二极管的噪声等效电路见图 11.21。信号功率与正弦电流分量的方均值成正比，当 $m=1$ 时，它等于

$$\overline{i_s^2} = 2\left(\frac{Pe\eta}{hv}\right)^2 \qquad (11.7\text{-}12)$$

图 11.21　在直接（视频）探测方式下工作的光电二极管的噪声等效电路。取调制系数 $m=1$，并假设凋制频率足够低，结电容和渡越时间可以忽略。假设电阻 R_L 比二极管的并联电阻 R_d 小得多，所以后者可忽略，并假设二极管的串联电阻比 R_L 小，也可以忽略不计

图中示出了两种主要噪声源。第一种为散粒噪声，它与载流子产生的随机性有关。利用式（10.4-9），这可以由方均电流为 $\overline{i_{N_1}^2} = 2e\bar{I}\Delta v$ 的噪声产生器来代表，$\bar{I}$ 为平均电流，如式（11.7-11）右方第一项所示。令 $m=1$，可得

$$\overline{i_{N_1}^2} = \frac{3e^2(P+P_B)\eta\Delta v}{hv} + 2ei_d\Delta v \qquad (11.7\text{-}13)$$

式中 P_B 是进入探测器的背景光功率（除了信号功率之外），i_d 为直流“暗”电流，即使 $P_s = P_B = 0$ 时它也是存在的。第二种噪声源为热（约翰孙）噪声，它由输出负载产生，利用式（10.5-9）可以表示为

$$\overline{i_{N_2}^2} = \frac{4kT_e\Delta v}{R_L} \tag{11.7-14}$$

其中 T_e 为包括二极管后面放大器的有效输入噪声功率贡献在内的等效噪声温度。在放大器输出端的信噪功率比为

$$\frac{S}{N} = \frac{\overline{i_s^2}}{\overline{i_{N_1}^2} + \overline{i_{N_2}^2}} = \frac{2(Pe\eta / hv)^2}{3e^2(P+P_B)\eta\Delta v / hv + 2ei_d\Delta v + 4kT_e\Delta v / R_L} \tag{11.7-15}$$

为了使方程式（11.7-10）得到满足，在大多数实际系统中人们被迫采用较小的负载电阻 R_L。在这样的条件下，以及光信号功率 P 的值接近探测极限（S/N=1）时，式（11.7-14）的热噪声项比式（11.7-13）的散粒噪声大得多，结果探测器不在量子极限附近工作，此时有

$$\frac{S}{N} \simeq \frac{2(Pe\eta / hv)^2}{4kT_e\Delta v / R_L} \tag{11.7-16}$$

根据定义，令 S/N=1，则由式（11.7-16）可得“最小可探测光功率”为

$$(P)_{\text{最小}} = \frac{hv}{e\eta}\sqrt{\frac{2kT_e\Delta v}{R_L}} \tag{11.7-17}$$

最小可探测功率理论极限值为 $hv\Delta v/\eta$，像式（11.3-11）那样，它是在信号中的散粒噪声项占优势时获得的。实际上，R_L 的值与要求的调制带宽 Δv 和结电容 C_d 之间的关系是

$$\Delta v \simeq \frac{1}{2\pi R_L C_d} \tag{11.7-18}$$

代入式（11.7-16）得

$$P_{\text{最小}} \approx 2\sqrt{\pi}\frac{hv\Delta v}{e\eta}\sqrt{kT_e C_d} \tag{11.7-19}$$

式（11.7-19）表明，灵敏的探测要求采用小面积的结，从而使 C_d 之值变得最小。

例：放大器极限探测下的最小可探测信号功率。

假设一个典型的锗光电二极管在 $\lambda = 1.4\mu m$ 下工作，它的结电容 $C_d = 1pF$，$\Delta v = 1GHz$，$\eta = 50\%$，二极管后的放大器的有效噪声温度为 $T_e = 1200+290 = 1490K$[12,18]。代入式（11.7-19）得最小可探测信号功率为

$$P_{\text{最小}} \approx 3.34\times10^{-7}\,W$$

11.8　雪崩光电二极管

当增加 p-n 结上的反向电压时，耗尽层中的电场相应增强，直到载流子（电子或空穴）受到加速作用而穿越耗尽层时获得足够高的动能为止，这时这些高能的载流子会与价带中的电子碰撞而将它们从价带“踢”到导带形成新的自由电子，原来的电子则继续向前穿行。这种过程示于图 11.22，即所谓产生了雪崩倍增。一个被吸收的光子（A）产生一电子—空穴对，该电子受到加速到达 C 点时获得了足够的能量而将一个电子从价带激发到导带，同时产

生一新的电子—空穴对。新产生的正负载流子向相反方向运动，空穴（*F*）也同样能在 *G* 处引起载流子的倍增，一旦电场变得足够强时，结电流就会急剧地增加（雪崩倍增）。上述效应首先在气体等离子体中发现，近年来又在 p-n 结中发现（见参考文献[18，19]）。与通常的（非雪崩）光电二极管电流相比，它造成了电流的倍增。电流倍增因子 M 与结电场的函数关系曲线示于图 11.23。

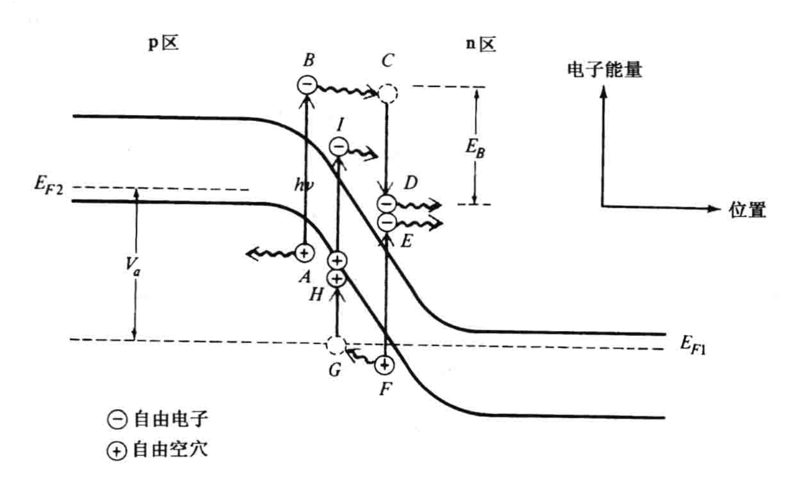


图 11.22　在一个反向偏压的雪崩光电二极管中吸收光子后形成的载流子倍增的能级位置图

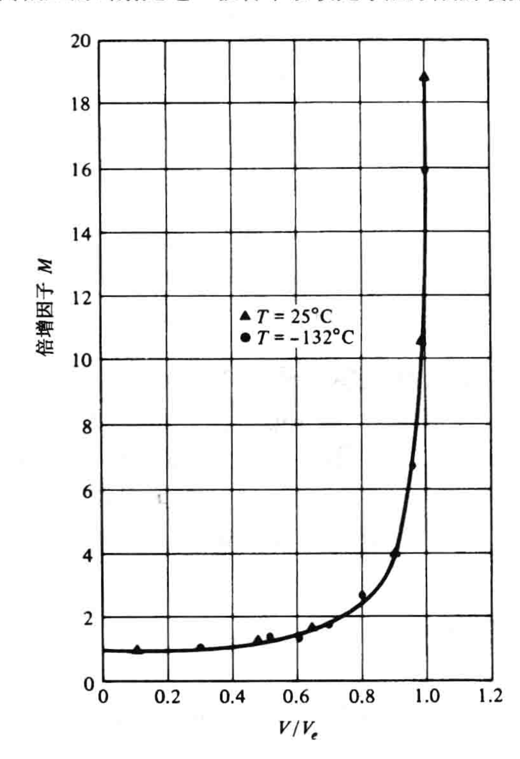


图 11.23　雪崩光电二极管电流倍增因子与电场的函数关系（引自文献[19]）

雪崩光电二极管的结构与一般光电二极管相类似。因为 M 在雪崩区域内随外加电场急剧地变化，因而必须特别注意获得十分均匀的 p-n 结。雪崩光电二极的结构如图 11.24 所示。

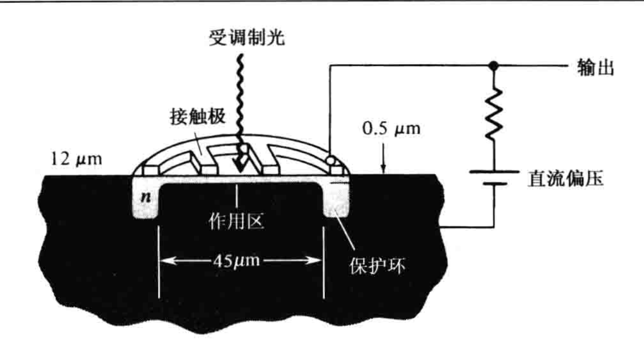


图 11.24　平面型雪崩光电二极管（引自文献[10]）

因为雪崩光电二极管基本上与光电二极管类似，其等效电路元件的表达式也和前面描述过的光电二极管的表达式相似。它的频率响应也受到下列因素的限制：扩散、通过耗尽层的漂移，以及电容负载，与 11.7 节中的讨论相仿。

因为光电流增大 M 倍会导致信号功率 S 比光电二极管的情形增大 M^2 倍，所以利用式（11.7-12）可得到

$$S \propto \overline{i_s^2} = 2M^2\left(\frac{Pe\eta}{h\nu}\right)^2 \tag{11.8-1}$$

式中 P 是入射到二极管上的光功率。这个结果使我们回想起式（11.3-9）的分子所表达的光电倍增管的信号功率，其中雪崩增益 M 的作用就如同次级电子倍增增益 G 的作用一样。我们似乎可以预期散粒噪声功率也会增加 M^2 倍，不过实际观测到的散粒噪声增加了 M^n 倍，其中 $2<n<3$，在实验上观测到的近于理想的 $M^{2.1}$ 因子示于图 11.25。

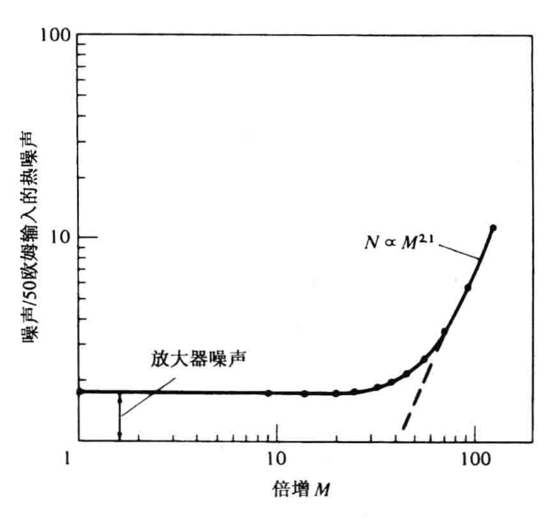


图 11.25　一雪崩肖特基光电二极管的噪声功率（在 30MHz 测量）
与光电倍增因子的函数关系曲线（引自文献[21]）

于是，由式（11.7-15）可以写出二极管输出端的信噪功率比

$$\frac{S}{N} = \frac{2M^2(Pe\eta/h\nu)^2}{[3e^2(P+P_B)\eta\Delta\nu/h\nu]M^n + 2ei_d\Delta\nu M^n + 4kT_e\Delta\nu/R_L} \tag{11.8.2}$$

与一般的光电二极管相比，应用雪崩光电二极管的优点现在就变得很明显了。当 $M=1$ 时，式（11.8-2）变成式（11.7-15），此时式（11.8-2）分母中的热噪声项 $4kT_e\Delta\nu/R_L$ 在典型情形下比散粒噪声项要大得多，所以它使得 S/N 随 M 增大。这种改善情形一直继续到散粒噪声项与 $4kT_e\Delta\nu/R_L$ 可以比拟为止。再进一步增加 M 反而会使 S/N 下降，因为 $n>2$ 时，式（11.8-2）的分母比分子增加得更快。如果假设 M 被调节到最佳值，以至于式（11.8-2）的分母等于热噪声项 $4kT_e\Delta\nu/R_L$ 的两倍，我们可以求解最小可探测功率（与 $S/N=1$ 时相应的功率输入）而得

$$P_{\text{最小}}=\frac{2h\nu}{M'e\eta}\sqrt{\frac{kT_e\Delta\nu}{R_L}} \tag{11.8-3}$$

式中的 M' 是上面所述的最佳 M 值。与式（11.7-17）光电二极管的情形相比，在灵敏度方面的改善大约是 M' 倍。常见的 M' 值在 30 到 100 之间，所以雪崩光电二极管的使用，使得灵敏度方面比一般光电二极管有了相当的改进。

11.9　激光器的功率涨落噪声

由于温度变化、声波振动，以及其他人为因素的影响，所以激光器的输出功率存在涨落。即使排除所有这些外界因素的影响，仍然存在一个基本因素（量子力学）的影响，就是从高能级跃迁到低能级的原子引起的自发辐射对激光模的影响。自发辐射引起的辐射场与激光模场不一致，由此引起了相位与振幅的涨落[1]。因为这种涨落是随机的，所以可以用本章和第 10 章提到的统计噪声工具来对其进行描述与定量计算。

设激光器的输出功率为

$$P(t)=P_0+\Delta P(t) \tag{11.9-1}$$

式中功率涨落的时间平均值为 0。

$$\overline{\Delta P}(t)=0$$

因此 P_0 为平均光功率。利用式（10.2-6）与式（10.2-8），可以用方均差来表征涨落的平方

$$\overline{(P(t)-P_0)^2}\equiv\overline{(\Delta P(t))^2}=\int_0^\infty S_{\Delta P}(f)\mathrm{d}f \tag{11.9-2}$$

$S_{\Delta P}(f)$ 与频谱密度函数 $S_{\Delta P}(\omega)$ 相关，由式（10.2-8）和式（10.2-14）定义，即

$$S_{\Delta P}(f)=2\pi S_{\Delta P}(\omega)\qquad(\omega=2\pi f) \tag{11.9-3}$$

如果频率为 ν，功率为 P（t）的光场入射到量子效率（每光子产生的电子数）为 η 的探测器中，则输出电流为

$$i(t)=\frac{e\eta P(t)}{h\nu}$$

因此，根据式（11.9-1），光功率涨落 $\Delta P(t)$ 引起一个电流的涨落分量，$\Delta i(t)=e\eta\Delta P(t)/h\nu$，其方均值为

$$\overline{i_{NL}^2(t)}\equiv\overline{[\Delta i(t)]^2}=\frac{e^2\eta^2}{(h\nu)^2}\overline{[\Delta P(t)]^2}=\frac{e^2\eta^2}{(h\nu)^2}S_{\Delta P}(f)\Delta f \tag{11.9-4}$$

式中 Δf 为电探测电路的带宽。

相对强度噪声 RIN，定义为在带宽 $\Delta f=1\text{Hz}$ 中的相对的涨落功率

$$\text{RIN} \equiv \frac{S_{\Delta P}\Delta f(=1\text{Hz})}{P_0^2} \tag{11.9-5}$$

对于一个单模半导体激光器其 $\text{RIN} \approx 10^{-16}$（或 -160dB）。设探测电路的带宽为 $\Delta f = 10^9$ Hz，则探测电流的相对方均涨落为

$$\frac{\overline{(\Delta i_d)^2}}{i_{d0}^2} = \frac{\overline{(\Delta P)^2}}{P_0^2} = \frac{S_{\Delta P}(f)\Delta f}{P_0^2} = 10^{-16} \times 10^9 = 10^{-7}$$

功率涨落的均方根值为

$$\frac{\overline{\{[\Delta P(t)]^2\}^2}}{P_0} = 3.16 \times 10^{-4}$$

则由这些涨落引起的在探测器的输出中的方均噪声电流由式（11.9-4）给出

$$\overline{i_{NL}^2}(t) = \frac{e^2\eta^2}{(h\nu)^2}(\text{RIN})P_0^2\Delta f \tag{11.9-6}$$

例如，设 $\lambda = 1.3\mu\text{m}$，$P_0 = 3\text{mW}$，RIN＝10^{-16}Hz^{-1}，$\Delta f = 10^9$ Hz，$\eta = 0.6$，可得

$$\overline{(i_{NL}^2)}^{1/2} = 5.95 \times 10^{-7}\,\text{A}$$

例：光纤线路设计。

这里的任务是确定光纤通信线路中所允许的最大中继距离。假设光源为 1.3 μm GaInAsP 激光器（$\nu = c/\lambda = 2.31 \times 10^{14}$ Hz），光纤衰减为 0.3dB/km（对应的衰减常数为 $\alpha = 0.3/4.343 = 0.0691(\text{km})^{-1}$）。光纤的输入光功率为 $P_0 = 3\text{mW}$。传输速率为 10^9 b/s，则探测电路的带宽为 $\Delta f = 1/$周期$=10^9$ Hz。要求本系统在探测器的输出端的误码率不超过 10^{-10}。探测器的输出阻抗 $R_L = 1000\Omega$，放大器（在探测器后）的噪声指数为 6dB，即 $F = 4$。

从图 10.20 中，我们知道，为了确保探测器的误码率小于 10^{-10}，放大器输出端的信噪功率比必定要超过 22dB。这样，我们的任务就是要计算探测器输出端的信号功率 $\overline{i_s^2}$ 和总的噪声功率 $\overline{i_N^2}$，它们是线路长度 L 的函数。

若假设调制系数 m＝0.5，从式（11.7-11）可得到信号功率为

$$\overline{i_s^2} = \frac{e^2\eta^2 P_0^2 \mathrm{e}^{-2\alpha L}}{2(h\nu)^2} \tag{11.9-7}$$

在放大器输出端的总的噪声功率为

$$\overline{i_N^2} = \overline{i_{NL}^2} + \overline{i_{NS}^2} + \overline{i_{NA}^2} \underset{(\text{依次为})}{=} \frac{\eta^2 e^2}{(h\nu)^2}(\text{RIN})P_0^2 \mathrm{e}^{-2\alpha L}\Delta f + \frac{2\eta e^2}{h\nu}P_0 \mathrm{e}^{-\alpha L}\Delta f + \frac{4kT_e}{R_L}\Delta f \tag{11.9-8}$$

式（11.9-8）的第一项是由功率涨落式（11.9-6）引起的；第二项是与探测器输出端的平均电流 $I_{d0} = \eta P_0 e \exp(-\alpha L)/(h\nu)$ 相关的散粒噪声。第三项是输出电阻 R_L 的热噪声与放大器的输出噪声功率（相对输入端的噪声功率）功率之和。如果输出电阻 R_L 的温度为 T＝290K，则 $T_E = T + (F-1)290 = 1160\text{K}$。

图 11.26（a）表示一个光纤通信系统的主要的组成部分。图 11.26（b）示出了$\overline{i_s^2}$，$\overline{i_{NL}^2}$，$\overline{i_{NS}^2}$和$\overline{i_{NA}^2}$，还示出了总的噪声功率，它是线路长度 L 的函数。重要的是弄清楚传输距离的变化所引起的功率的相应变化。当距离L_0 =87km，它的信噪功率比降低到 22dB。这个距离被选作中继距离。注意，当 L>33km 时，起支配作用的噪声是放大器－探测器产生的噪声$\overline{i_{NA}^2}$。

如果后者减少 3dB，则中继长度可以增加 5km，如图中虚线所示。

当噪声功率主要是由放大器噪声和二极管输出电路的负载电阻R_L的约翰逊（热）噪声组成时，p-n 结二极管探测器的信噪功率比由式（11.7-16）给出。于是，方均噪声电流为

$$\overline{i_N^2} \approx \frac{4kT_e\Delta f}{R_L} \tag{11.9-9}$$

当 m=1/2 时，信号峰值电流由式（11.7-8）给出，结果为

$$i_s = \frac{P_s e\eta}{h\nu} \tag{11.9-10}$$

式中P_s为输入到探测器上的峰值脉冲光功率。这样放大器输出端的信噪电流比为

$$\frac{i_s}{\left(\overline{i_N^2}\right)^{1/2}} = \frac{P_s e\eta / h\nu}{(4kT_e\Delta f / R_L)^{1/2}} \tag{11.9-11}$$

下面的问题是寻找信号功率P_s的最小值，以使得式（11.9-11）中的$i_s/\overline{(i_N^2)}^{1/2}$超过所需的值 12.59，因此需要知道$T_e$，$R_L$和$\Delta f$。$T_e$可由给定的放大器噪声指数（$F$=6dB）得到。取$T$=290K，可得$T_e$=290+（4–1）×290=1160。为了获得所需的带宽，负载电阻R_L必须不超过（见式（11.7-18））以下值

$$R_L = \frac{1}{2\pi\Delta f C} \tag{11.9-12}$$

式中，C 是总的输出电容，其值为3×10^{-12}F。利用上述的Δf 和 C 的值，可得

$$R_L \leqslant 53\,\Omega$$

现在我们回过头看式（11.9-11），取η=0.5，λ=1.35μm，$i_s/\overline{(i_N^2)}^{1/2}=12.59$，得

$$P_s \cong 2.55\times10^{-15}\,\mathrm{W}$$

这个值对应于光电二极管的最小输入功率。对于长为 50km 的光纤，总的传输损耗为 20dB。设由激光器的输出端与光纤的耦合所引起的附加损耗为 4dB，因此在光纤输出端总的损耗为24dB（即 251）。激光器的输出功率必须超过

$$P_{激光器} = 6.4\times10^{-3}\,\mathrm{W}$$

对于 CW 激光二极管，这是个合理的能级。

如果光纤的损耗大于上述例子，使用雪崩光电二极管，仍然可以得到上述结果。

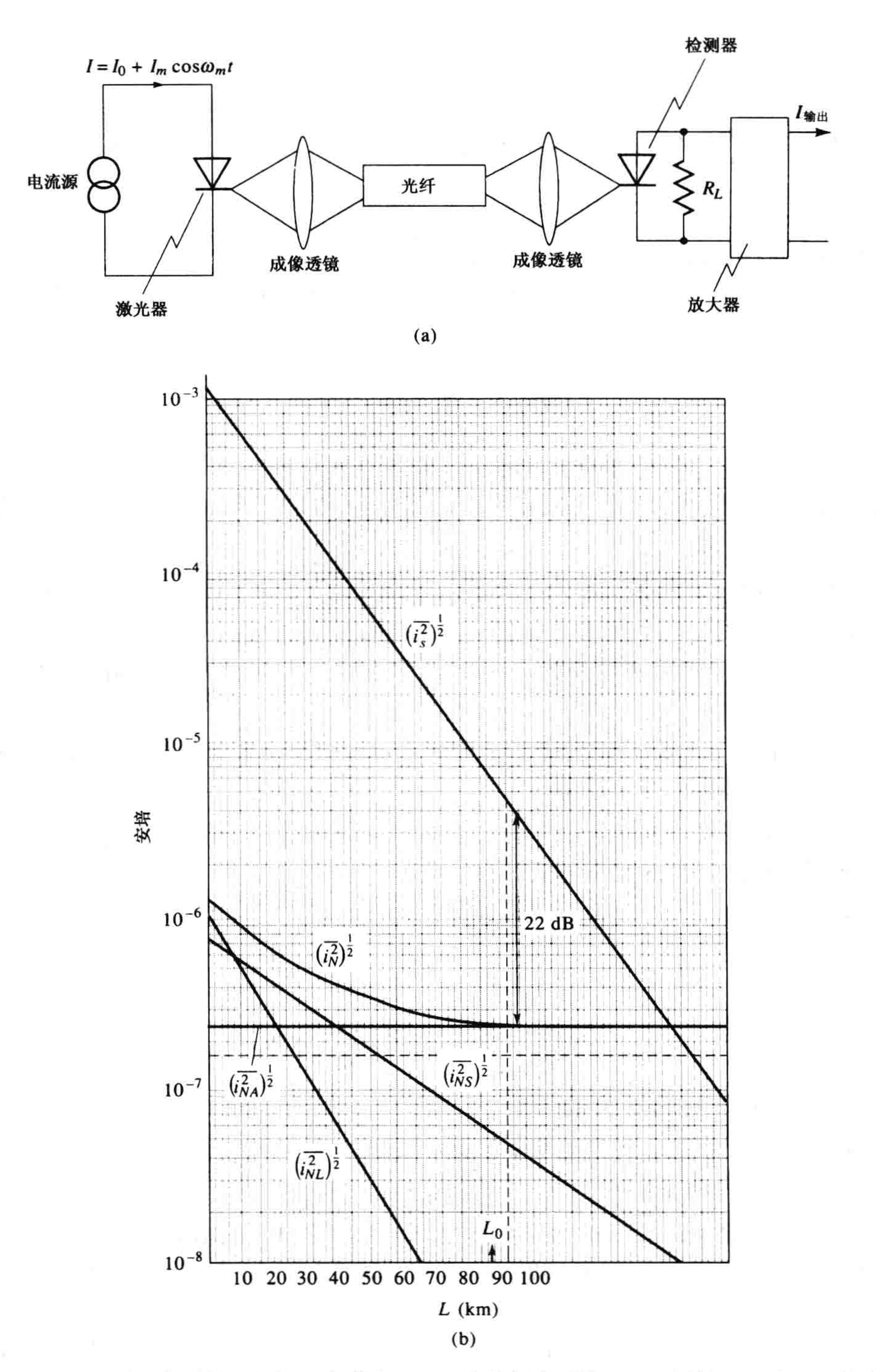


图 11.26 (a) 光纤通信系统，包括一个激光器、一个光耦合系统 c、一根长 L（公里）的光纤、一个检测器 D、输出阻抗 R_L 以及电流增益为 G、噪声指数为 F 的放大器 A。(b) 信号电流 $\overline{i_s^2}$ 、激光辐射涨落 $\overline{i_{NL}^2}$ 、探测器散粒噪声 $\overline{i_{NS}^2}$ 、组合的约翰逊－放大器噪声 $\overline{i_{NA}^2}$ ，总噪声为 $\overline{i_N^2} = \overline{i_{NL}^2} + \overline{i_{NS}^2} + \overline{i_{NA}^2}$ 。电流是环路长度 L 的函数，是在放大器的输入平面，对应于放大器输出电流除以增益 G

习题

11.1　证明包括光电倍增管各中间电极的总的输出散粒噪声功率的表达式是

$$\overline{(i_N^2)} = G^2 2e(\overline{i_c} + i_d)\Delta f \frac{1-\delta^{-N}}{1-\delta^{-1}}$$

其中 δ 是次级发射倍增因子，N 是级的数目。

11.2　当有一个强的光（背景）功率 P_B 存在时，计算光电导体探测器的最小探测功率。

答案：

$$(P_s)_{最小} = 2\left(\frac{P_B h\nu\Delta f}{\eta}\right)^{1/2}$$

11.3　推导一个光电导体在视频探测中（即没有本地振荡功率时）最小探测功率的表达式，假设主要的噪声贡献来自产生复合噪声。光场为 $e(t)=E(1+\cos\omega_m t)\cos\omega t$，信号被取作频率为 ω_m 的光电流分量。

11.4　推导 Ge:Hg（锗:汞）探测器的最小探测功率，其特性与第 11.7 节中描述的情形相同，平均电流的大部分是由入射到光电阴极上的黑体辐射造成的。假设 T＝295K，接收立体角为 $\Omega=\pi$，光电二极管阴极面积为 $1\,\text{mm}^2$。假设对于黑体辐射 $\lambda<14\mu\text{m}$ 的量子产额 η 是 1，$\lambda>14\mu\text{m}$ 时，$\eta=0$。

（提示：利用黑体辐射公式，或者更简单一点利用黑体辐射的数值表或“计算尺”，求出在 $14\mu\text{m}>\lambda>0$ 范围内的光子通量）。

11.5　当输入场的温度为 T＝4.2K 时，求出 11.4 题中的最小探测功率。

11.6　推导方程式（11.6-15）和式（11.6-16）。

11.7　证明式（11.7-7）中的渡越时间减弱因子 $(1-\text{e}^{-\text{i}\omega_m\tau_d})/i\omega_m\tau_d$ 可以写成

$$\alpha - i\beta$$

其中

$$\alpha=\frac{\sin\omega_m\tau_d}{\omega_m\tau_d},\quad \beta=\frac{1-\cos\omega_m\tau_d}{\omega_m\tau_d}$$

作图表示 α 和 β 与 $\omega_m\tau_d$ 的函数关系曲线。

11.8　推导光电二极管在外差探测中的最小探测光功率的公式。

答案：$P_{最小}=h\nu\Delta\nu/\eta$。

11.9　讨论雪崩光电二极管的极限灵敏度，其噪声随 M^2 的增加而增大。将它与光电倍增管作一个比较。在 $M\gg 1$，背景辐射为零，以及没有暗电流的极限情形下，它的最小探测功率是多少?

11.10　在外差探测工作中，推导输出电流振幅与信号光和本地振荡光传播方向的夹角 θ 的函数关系表达式。假设孔径直径（见图 11.6）为 D，如果使输出保持在最大值（$\theta=0°$）附近，证明 θ 不应超过 λ/D。（提示：将图 11.6 中的透镜换成光电发射表面）证明从探测器面积元 dxdy 发出的电流不是由式（11.4-4）而是由下式给出

$$\mathrm{d}i(x,t)=\frac{P_L e\eta}{h\nu(\pi D^2/4)}\left[1+2\sqrt{\frac{P_s}{P_L}}\cos(\omega t+kx\sin\theta)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

设传播方向在 z-x 平面内，$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 对（复数）信号电流的贡献则为

$$\mathrm{d}I_s(x,t)=\frac{2\sqrt{P_s P_L}}{h\nu(\pi D^2/4)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\sin\theta}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

11.11　证明对于泊松分布来说 $(\Delta N)^2=\overline{N}$。

11.12　设一个光纤网络，光源为单个 $\lambda=1.55\mu\mathrm{m}$，输出功率 $P_0=10\mathrm{mW}$ 的半导体激光器。信号功率被分为 N 个分支，每个分支的功率分别被各分支的光放大器进行放大，然后再进一步分为 M 路。证明此系统最大的用户数目为 NM。设 $\Delta f=10^9\ \mathrm{Hz}$；$R$（接收机的输入阻抗）为 $10^3\Omega$，$T_e=1000\mathrm{K}$；每个用户的最小 SNR 为 42dB；放大器输出端的最大能级为 10mW。

参考文献

1. Yariv, A., *Quantum Electronics*, 3rd ed. Wiley, New York, 1988, p. 54.
2. Engstrom, R. W., Multiplier phototube characteristics: application to low light levels. *J. Opt. Soc. Am.* **37**:420 (1947).
3. Sommer, A. H., *Photo-Emissive Materials*. Wiley, New York, 1968.
4. Chapman, R. A., and W. G. Hutchinson, Excitation spectra and photoionization of neutral mercury centers in germanium. *Phys. Rev.* **157**:615 (1967).
5. Teich, M. C., Infrared heterodyne detection. *Proc. IEEE* **56**:37 (1968).
6. Buczek, C., and G. Picus, Heterodyne performance of mercury doped germanium. *Appl. Phys. Lett.* **11**:125 (1967).
7. Lucovsky, G., M. E. Lasser, and R. B. Emmons, Coherent light detection in solid-state photodiodes. *Proc. IEEE* **51**:166 (1963).
8. Riesz, R. P., High speed semiconductor photodiodes. *Rev. Sci. Instrum.* **33**:994 (1962).
9. Anderson, L. K., and B. J. McMurtry, High speed photodetectors. *Appl. Opt.* **5**:1573 (1966).
10. D'Asaro, L. A., and L. K. Anderson, At the end of the laser beam, a more sensitive photodiode. *Electronics*, **May 30**:94 (1966).
11. Sze, S. M., *Physics of Semiconductor Devices*, 2nd ed. Wiley, New York, 1981.
12. Shockley, W., Hot electrons in germanium and Ohm's law. *Bell Syst. Tech. J.* **30**:990 (1951).
13. Bar-Chaim, N., K. Y. Lau, I. Ury, and A. Yariv, High speed GaAlAs/GaAs photodiode on a semi-insulating GaAs substrate. *Appl. Phys. Lett.* **43**:261 (1983).
14. Wang, S. Y., D. M. Bloom, and D. M. Collins, 20-GHz bandwidth GaAs photodiode. *Appl. Phys. Lett.* **42**:190 (1983).
15. Wang, S. Y., and D. M. Bloom, 100 GHz bandwidth planar GaAs Schottky photodiode. *Electron. Lett.* **19**:554 (1983).
16. Kolner, B. H., D. M. Bloom, and P. S. Cross, Characterization of high speed GaAs photodiodes using a 100-GHz electro-optic sampling system. 1983 Conference on Lasers and Electro-optics, paper ThGl.
17. Valdmanis, J. A., G. Mourou, and C. W. Gabel, Picosecond electro-optic sampling system. *Appl. Phys. Lett.* **41**:211 (1982).
18. McKay, K. G., and K. B. McAfee, Electron multiplication in silicon and germanium. *Phys. Rev.* **91**:1079 (1953).

19. McKay, K. G., Avalanche breakdown in silicon. *Phys. Rev.* **94**:877 (1954).
20. McIntyre, R., Multiplication noise in uniform avalanche diodes. *IEEE Trans. Electron. Devices* **ED-13**:164 (1966).
21. Lindley, W. T., R. J. Phelan, C. M. Wolfe, and A. J. Foyt, GaAs Schottky barrier avalanche photodiodes. *Appl. Phys. Lett.* **14**:197 (1969).

第 12 章　周期性媒质中波的传播

12.0　引言

在周期性媒质中，电磁辐射的传播存在很多有趣且有用的现象：包括晶体中 X 射线的衍射；由声波引起的周期性应力变化导致的光的衍射（第 9 章）；光在周期性分层媒质中传播时的光子带隙和光纤布拉 m 格光栅。这些现象被广泛用于光电子器件中，包括衍射光栅、高反射的布拉格反射器、垂直腔表面发射激光器（VCSELs）、分布反馈激光器（DFB 激光器）、分布布拉格反射（DBR）激光器、光纤布拉格光栅（FBGs）和声–光滤波器。本章将会讨论周期性媒质中波传播的性质。我们从布拉格散射的一些基本概念出发，包括能量和动量的守恒；接着描述用于处理周期性媒质的矩阵方法和用于处理透射光栅和反射光栅的耦合模理论。周期性媒质在光学中的表现与电子在晶体中的表现具有很强的类似性，因此也可以使用布洛赫波、禁带和瞬逝波的概念。特别地，将讨论布拉格反射器的透射、反射和散射特性。周期性结构在导波光学中也起重要作用，我们描述了在具有周期性电介质分布的波导中导波的传播，以及它应用于光纤布拉格光栅中时所起到光谱的滤光和色散补偿作用。最后，简要地讨论了二维和三维周期性媒质，即所谓的光子晶体波导。

12.1　周期性媒质

一般地，周期性媒质是介电和导磁常量（张量），都具有平移对称的任意光学结构，它是位置的周期函数

$$\varepsilon(\boldsymbol{x})=\varepsilon(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}),\quad \mu(\boldsymbol{x})=\mu(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}) \tag{12.1-1}$$

其中 $\boldsymbol{a}$ 是任一格矢。这些方程仅说明：观察者处在 $\boldsymbol{x}$ 处和 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}$ 处“看”此媒质，它们完全相同。在周期性媒质中，单色光波的传播可以用麦克斯韦方程来描述

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=i\omega\varepsilon\boldsymbol{E} \tag{12.1-2}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-i\omega\mu\boldsymbol{H} \tag{12.1-3}$$

其中ω是光波的角频率。在算符∇和ε，μ中，用 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}$ 取代 $\boldsymbol{x}$ 时，这些方程保持相同。媒质的平移对称要求传播的标准模式取为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_K(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{12.1-4}$$

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_K(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{12.1-5}$$

其中 $\boldsymbol{E}_K$（$\boldsymbol{x}$）和 $\boldsymbol{H}_K$（$\boldsymbol{x}$）都是 $\boldsymbol{x}$ 的周期函数

$$\boldsymbol{E}_K(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{E}_K(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}) \tag{12.1-6}$$

$$\boldsymbol{H}_K(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{H}_K(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}) \tag{12.1-7}$$

这就是弗洛盖（布洛赫）定理。本节的最后给出了此定理的证明。下标 $\boldsymbol{K}$ 表示函数 $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{K}}$ 和 $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{K}}$ 都依赖于 $\boldsymbol{K}$，而 $\boldsymbol{K}$ 是布洛赫波矢。ω和 $\boldsymbol{K}$ 之间存在色散关系

$$\omega = \omega(\boldsymbol{K}) \tag{12.1-8}$$

在光谱区中 $\boldsymbol{K}$ 是实数，光波可以在周期性媒质中无损传播。光波在周期性媒质中的情形和平面波在均匀媒质中的情形是等价的。在媒质中，这些波的强度是位置的周期函数。我们将会发现存在某一光谱区域，位于该区域内的 $\boldsymbol{K}$ 是复矢量；依据式（12.1-4）和式（12.1-5），此时的光波变为瞬逝波。这些光谱区域称为光子带隙（或者禁带），在光子带隙中光波无法在无限周期媒质中传播。瞬逝波只能存在于能量集中于表面附近或者“缺陷”周围的有限结构中。存在禁带的电介质光学结构即为光子带隙结构。

在光电子学的很多应用中，经常遇到一维周期性媒质，比如

$$\varepsilon(z) = \varepsilon(z + \Lambda) \tag{12.1-9}$$

或者等价地

$$n(z) = n(z + \Lambda) \tag{12.1-10}$$

其中ε是介电常量张量，n 是折射率，Λ是周期。在本章中，我们规定整个周期性结构都由非磁性材料构成，即$\mu = \mu_0$。在这种情况下，就可以仅用介电张量来描述媒质。图 12.1 给出了光电子学中的若干周期性结构的示意图。

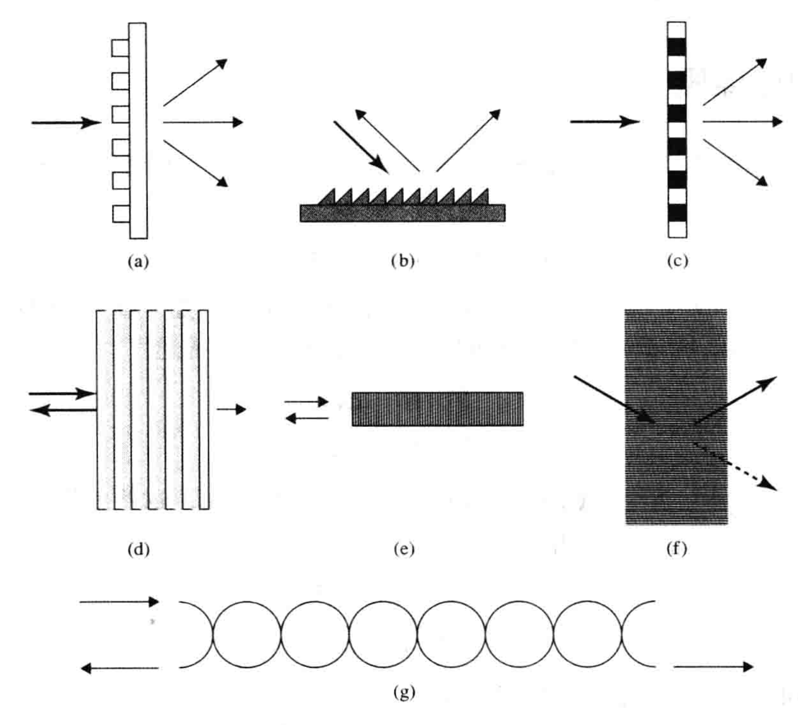


图 12.1　一些周期性结构和光的衍射的示意图：（a）透射相位衍射光栅（例如：在玻璃衬底上表面浮雕），（b）反射相位衍射光栅（例如：金属表面划线），（c）振幅透射光栅（例如：多缝光栅），（d）四分之一波片堆（例如：由 SiO_2 和 TiO_2 层交替沉积构成的多重薄膜），（e）光纤布拉格光栅（FBG），（f）体光栅（例如：布拉格盒）和（g）耦合共振腔的周期性阵列。箭头表示入射光束和衍射光束

布拉格定律和光栅方程

在开始对周期性媒质中光波散射进行电磁分析前，考虑散射的基本动力学特性。这些基本的动力学特性对所有波而言是基础，包括电子波，光波和声波。对这类散射的研究受益于早期对结晶体中 X 射线的衍射所做的工作。考虑极限情况：周期性媒质的折射率调制（或者介电调制）集中在等距离平面的某一阵列，如图 12.2 所示。另外，假设这些平面无穷大，因此来自这些平面的反射是镜面反射（例如：反射镜式的，其反射角等于入射角）。每个平面仅仅反射很小的一部分入射平面波。总的散射波由所有这些部分反射平面波线性叠加构成，当叠加达到一定程度时，才能出现衍射光束。

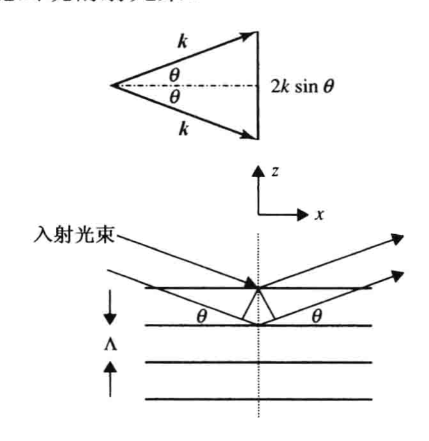


图 12.2　由周期性媒质引起的单色平面波的散射

令这些平面（晶体中称为格面）之间的间隔为Λ。对于一维周期性媒质，Λ是折射率在空间的变化周期。光线从两个相邻平面反射后的光程差是 $2\Lambda\sin\theta$，其中θ是入射角（入射线与入射平面间的夹角）。当光程差是媒质中的波长λ/n 的整数倍时，发生相长干涉，此时

$$2\Lambda\sin\theta = m(\lambda/n),\quad m = 1, 2, 3, \cdots \tag{12.1-11}$$

其中 n 是周期性媒质的空间平均折射率，m 是整数。对于 X 射线，折射率 n 等于 1（n=1）。方程（12.1-11）就是布拉格定律。尽管来自每个平面的反射是镜面反射，但是光束的衍射仅仅发生于θ角取某些值时——服从布拉格定律，因此来自所有平面的反射累计同相。方程式（12.1-11）也可以写成

$$2k\sin\theta = m\frac{2\pi}{\Lambda},\quad m = 1, 2, 3, \cdots \tag{12.1-12}$$

其中 k 是媒质中的光束的波数（$k=2\pi n/\lambda$）。$2\pi/\Lambda$这项是光栅波数，常写成

$$G = \frac{2\pi}{\Lambda} \tag{12.1-13}$$

方程（12.1-12）的左边，即 $2k\sin\theta$，是周期性媒质衍射引起波矢的改变。因此布拉格定律可以简单地解释成动量定律。由周期性媒质（光栅）引起的衍射，其波矢的改变是光栅波矢 G 的整数倍。

事实上，如果将周期性折射率函数 $n(z)$（或者介电函数$\varepsilon(z)$）用傅里叶级数展开，可以得到

$$n(z) = n_0 + n_1 \sum_m a_m \exp\left(-i\frac{2\pi}{\Lambda}mz\right) \qquad (12.1\text{-}14)$$

其中 n_0 是空间平均折射率；n_1 是常数，代表周期性折射率调制的振幅；a_m 是周期性折射率变化的第 m 个傅里叶分量。注意：第 m 个傅里叶分量的波数为 $m(2\pi/\Lambda)$。根据方程（12.1-12），每个傅里叶分量，比如，第 m 个傅里叶分量，可用无穷个间隔为 Λ/m 的部分反射器代表 m 阶的布拉格衍射。尽管布拉格定律是在媒质无穷大的假设下推导的，但是由于规定了反射平面的尺寸比射线尺寸要大得多，方程（12.1-11）和方程（12.1-12）也是正确的。在这些条件下，周期性媒质称为厚光栅（或体光栅）。在声–光衍射的讨论中，仅仅当衍射级次 $m=1$ 时才会发生布拉格衍射，因为大多数由声波引起的折射率微扰是正弦曲线，高阶傅里叶分量消失，即：$|m|>1$，$a_m=0$。

如图 12.3 所示，考虑薄光栅时的情形。在薄光栅中，周期性折射率变化的横向尺寸（厚度）与射线尺寸或光波波长相比要小得多。当平面波入射到周期性媒质上时，除镜面反射之外，每个平面还有衍射发生，衍射是由于这些平面的有限尺寸引起的。散射光沿着角度 θ' 传播，θ' 不等于入射角 θ。利用与方程（12.1-11）相类似的讨论方法，得到相长干涉需要满足以下条件

$$\Lambda \sin\theta + \Lambda \sin\theta' = m(\lambda/n), \quad m = 1, 2, 3, \cdots \qquad (12.1\text{-}15)$$

其中 m 是整数。这就是光栅方程。依据此方程，对于任意给定角度的入射，存在一系列衍射级次，每个衍射级次对应于不同的 m 值。这是薄光栅和厚光栅之间最主要的区别。在厚光栅中，对于任一给定角度的入射，仅存在一个衍射级次。另外，仅当入射角度满足布拉格定律时，才会发生衍射。

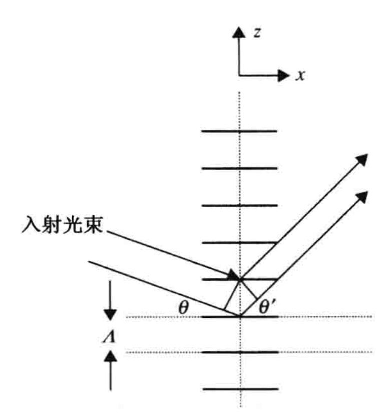


图 12.3　薄光栅引起的衍射（如多缝）

群速度和布洛赫波的能速度

现在研究在周期性媒质中，布洛赫波的功率通量。电磁能的时间平均通量定义为

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^*] \qquad (12.1\text{-}16)$$

时间平均电磁能密度为

$$U = \frac{1}{4}[\boldsymbol{E} \cdot \varepsilon \boldsymbol{E}^* + \boldsymbol{H} \cdot \mu \boldsymbol{H}^*] \qquad (12.1\text{-}17)$$

其中假设介电张量ε和磁导率张量μ均为实数。对于周期性媒质中的布洛赫波的情形，坡印廷矢量 $\boldsymbol{S}$ 和能量密度 U 都是空间的周期函数。定义布洛赫波的能速度为

$$V_e = \frac{\int \boldsymbol{S}\ \mathrm{d}^3x}{\int U\ \mathrm{d}^3x} = \frac{\langle \boldsymbol{S} \rangle}{\langle U \rangle} \tag{12.1-18}$$

其中积分是在单一的晶胞上进行的。〈〉代表在晶胞上的空间平均。利用布洛赫波函数式（12.1-4）和式（12.1-5），得到

$$V_e = \frac{\langle \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}_K \times \boldsymbol{H}_K^*] \rangle}{\langle \frac{1}{4}[\boldsymbol{E}_K \cdot \varepsilon \boldsymbol{E}_K^* + \boldsymbol{H}_K \cdot \mu \boldsymbol{H}_K^*] \rangle} \tag{12.1-19}$$

布洛赫波的群速度定义为

$$V_g = \nabla_K \omega \tag{12.1-20}$$

该矢量垂直于正交面（例如：$\omega(\boldsymbol{K})$=常数）。如果现在将布洛赫波代入麦克斯韦方程式（12.1-2）和式（12.1-3），得到

$$\nabla \times \boldsymbol{H}_K - i\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{H}_K = i\omega\varepsilon \boldsymbol{E}_K \tag{12.1-21}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_K - i\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{E}_K = -i\omega\mu \boldsymbol{H}_K \tag{12.1-22}$$

利用上述方程，开始证明：在周期性媒质中群速度等于能速度。从方程式（12.1-21）和式（12.1-22）出发。假设 $\boldsymbol{K}$ 随着极小量$\delta\boldsymbol{K}$ 而变化。如果$\delta\omega$，$\delta\boldsymbol{E}_K$ 和$\delta\boldsymbol{H}_K$ 分别对应于ω，$\boldsymbol{E}_K$ 和 $\boldsymbol{H}_K$ 的变化，那么经过若干代数运算，从方程（12.1-21）和（12.1-22）可以得到

$$\delta\omega = V_e \cdot \delta\boldsymbol{K} \tag{12.1-23}$$

假设ε和μ与频率无关。

从群速度的定义，有

$$\delta\omega = (\nabla_K \omega) \cdot \delta\boldsymbol{K} = V_g \cdot \delta\boldsymbol{K} \tag{12.1-24}$$

因为$\delta\boldsymbol{K}$ 是一任意矢量，得到

$$V_e = V_g \tag{12.1-25}$$

有一点值得注意：ε和μ都与频率无关时，上述方程才正确。

布洛赫定理的数学证明

这里我们给出介电周期性媒质（$\mu(\boldsymbol{x})$=常数）中布洛赫定律的数学证明。因为媒质具有周期性，介电张量$\varepsilon(\boldsymbol{x})$可以用傅里叶级数展开

$$\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \sum_G \varepsilon_G \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{12.1-26}$$

其中ε_G是傅里叶展开系数，$\boldsymbol{G}$ 代表了所有的倒格矢，包括 $\boldsymbol{G}$=0 的情况。对于一维周期性媒质（如方程（12.1-14）所描述）

$$\boldsymbol{G} = m\frac{2\pi}{\Lambda}\hat{z}, \quad m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots \tag{12.1-27}$$

其中 $\hat{z}$ 是沿着周期方向的单位矢量。矢量 $\boldsymbol{G}$ 是固体物理学中的倒格矢，它在晶体物理学

和周期性媒质光学中都起着最基本的作用。

周期性媒质中的麦克斯韦方程的通解可以表示为傅里叶积分的形式

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{12.1-28}$$

其中 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})$是波矢为 $\boldsymbol{k}$ 的平面波分量的振幅。将方程（12.1-26）和方程（12.1-28）代入方程式（12.1-2）和式（12.1-3），消去磁场矢量 $\boldsymbol{H}$，得到

$$\int \mathrm{d}^3k\ \boldsymbol{k}\times[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + \omega^2\mu\sum_{\boldsymbol{G}}\int \mathrm{d}^3k\ \varepsilon_{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{G})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} = 0 \tag{12.1-29}$$

只有当 $\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$的所有系数都消失时，上述方程才成立。换而言之

$$\boldsymbol{k}\times[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})] + \omega^2\mu\sum_{\boldsymbol{G}}\varepsilon_{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{G}) = 0 \quad 对所有\ \boldsymbol{k} \tag{12.1-30}$$

其中的求和包括了所有倒格矢。对于未知系数 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})$，上式为齐次方程的无穷集。集合中的每个方程都具有不同的 $\boldsymbol{k}$ 值。对于整个集合而言，其特征方程（令方程（12.1-30）的行列式等于 0 可以得到其特征方程）在理论上是可以求解的。然而，注意观察方程（12.1-30），并非所有系数 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})$都是耦合的。事实上，对于给定的波矢 $\boldsymbol{k}$，只有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{G})$的系数是耦合的。这样就可以将整个集合——方程（12.1-30），分成很多的子集，每个子集都用一波矢 $\boldsymbol{K}$ 标注，包括含有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{K})$和 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{G})$（所有可能的 $\boldsymbol{G}$）的方程。每个子集都可以分别求解。在方程（12.1-30）中利用这一事实，用 $\boldsymbol{K}$ 表示的子集的解可以写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{K}} &= \sum_{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{G})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{G})\cdot\boldsymbol{x}} \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{x}}\sum_{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{G})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{x}} \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{x}}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{x})\end{aligned} \tag{12.1-31}$$

其中 $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{x})$代表傅里叶级数的和，它是 $\boldsymbol{x}$ 的周期函数。另外，令齐次方程的子集的行列式等于 0 可以得到ω和 $\boldsymbol{K}$ 的关系。ω和 $\boldsymbol{K}$ 的关系即为色散关系$\omega=\omega(\boldsymbol{K})$。在周期性媒质中，用 $\boldsymbol{K}$ 标注的方程（12.1-31）的解是标准的导波模。$\boldsymbol{K}$ 就是所谓的布洛赫波矢。方程（12.1-28）的通解就变为这些标准模的线性叠加。这就完成了布洛赫定理式（12.1-4）的证明。

12.2　周期性分层媒质——布洛赫波

本节讨论最简单的周期性媒质，它是由具有不同折射率的透明材料层交替构成的。图 12.4 给出了这种媒质的示意图。薄膜沉积技术的新发展使得制造周期和层厚度都控制良好的周期性分层媒质变成可能。在外延晶体生长（例如：分子束外延（MBE））领域中，甚至原子层或者分子层都可以被生长。很多人对分层媒质中的波的传输都进行过研究，在该情况下，可以得到波动方程的精确解。第 4 章中提到的矩阵方法可以用于研究光波在这种结构中的透射和反射。在本章中，我们将引入相似矩阵方法处理周期性分层媒质。假设材料是各向同性和非磁性的。最简单的周期性分层媒质是由两种具有不同折射率的材料构成的，其表达式为

$$n(z)=\begin{cases} n_2, & 0<z<b \\ n_1, & b<z<\Lambda \end{cases} \tag{12.2-1}$$

$$n(z)=n(z+\Lambda) \tag{12.2-2}$$

其中 b 是折射率为 n_2 的层的厚度，$a=\Lambda-b$ 是折射率为 n_1 的层的厚度，z 轴是层交接面的法线，$\Lambda=a+b$ 是周期。无损耗时，我们讨论光波在 yz 平面内的传播。因为媒质在 y 方向是均匀的，波动方程的通解可以写成

$$\boldsymbol{E}(y,z,t)=\boldsymbol{E}(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-k_y y)} \tag{12.2-3}$$

其中 k_y 是传播波矢的 y 分量，在整个媒质中 k_y 为常量。下面，我们分别处理 s 偏振（$\boldsymbol{E}$ 矢量偏振垂直于 yz 平面（传播平面））和 p 偏振（$\boldsymbol{E}$ 矢量偏振平行于 yz 平面）的情况。s 波也就是 TE 波，p 波就是 TM 波。每一均匀层内的电场可以表示成向右传播（$+z$）和向左传播（$-z$）的平面波之和

$$E(z)=\begin{cases} a_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{1z}(z-n\Lambda)}+b_n\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_{1z}(z-n\Lambda)}, & n\Lambda-a<z<n\Lambda \\ c_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{2z}(z-n\Lambda+a)}+d_n\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_{2z}(z-n\Lambda+a)}, & (n-1)\Lambda<z<n\Lambda-a \end{cases} \tag{12.2-4}$$

$$k_{1z}=\sqrt{\left(\frac{n_1\omega}{c}\right)^2-k_y^2} \tag{12.2-5}$$

$$k_{2z}=\sqrt{\left(\frac{n_2\omega}{c}\right)^2-k_y^2} \tag{12.2-6}$$

其中 n 代表第 n 个单位晶胞，a_n，b_n，c_n 和 d_n 是常数。这些常数不是独立的，事实上，它们由分界面上的连续条件联系起来。

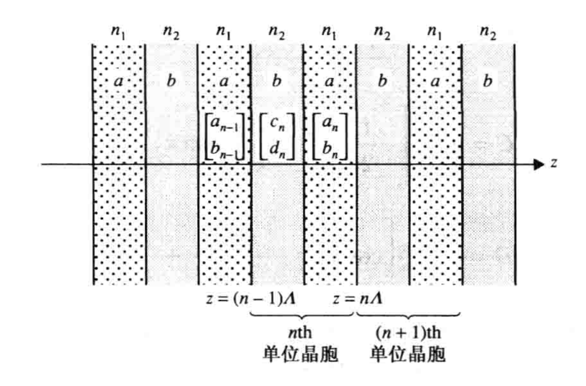


图 12.4　周期性分层媒质的示意图，它由折射率分别为 n_1 和 n_2、厚度分别为 a 和 b 的两种不同的透明材料层交替构成

对 TE 波的情况，假设在 $z=(n-1)\Lambda$和 $z=n\Lambda-a$ 的分界面上，E_x 和 H_y（$H_y\propto\partial E_x/\partial z$）连续，可以得到

$$\begin{aligned} a_{n-1}+b_{n-1}&=c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{2z}b}+d_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{2z}b} \\ ik_{1z}(a_{n-1}-b_{n-1})&=ik_{2z}(c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{2z}b}-d_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{2z}b}) \\ c_n+d_n&=a_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{1z}a}+b_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{1z}a} \\ ik_{2z}(c_n-d_n)&=ik_{1z}(a_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{1z}a}-b_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{1z}a}) \end{aligned} \tag{12.2-7}$$

上述四个方程可以重新写为两个矩阵方程

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ ik_{1z} & -ik_{1z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{ik_{2z}b} & e^{-ik_{2z}b} \\ ik_{2z}e^{ik_{2z}b} & -ik_{2z}e^{-ik_{2z}b} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_n \\ d_n \end{bmatrix} \tag{12.2-8}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ ik_{2z} & -ik_{2z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_n \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{ik_{1z}a} & e^{-ik_{1z}a} \\ ik_{1z}e^{ik_{1z}a} & -ik_{1z}e^{-ik_{1z}a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} \tag{12.2-9}$$

我们注意到，在矩阵表示法中，每层中的两个平面波的复振幅构成了列矢量中的两个元素。因此，单位晶胞中每一层的电场可以用列矢量来表示。这些列矢量不是独立的。它们通过分界面上连续的条件联系起来。结果，只有一个列矢量（或者不同的列矢量的两个元素）可以任意表示。

通过消去列矢量

$$\begin{bmatrix} c_n \\ d_n \end{bmatrix} \tag{12.2-10}$$

得到矩阵方程

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} \tag{12.2-11}$$

矩阵中各元素为

$$\begin{aligned} A &= e^{ik_{1z}a}\left[\cos k_{2z}b + \frac{i}{2}\left(\frac{k_{2z}}{k_{1z}} + \frac{k_{1z}}{k_{2z}}\right)\sin k_{2z}b\right] \\ B &= e^{-ik_{1z}a}\left[\frac{i}{2}\left(\frac{k_{2z}}{k_{1z}} - \frac{k_{1z}}{k_{2z}}\right)\sin k_{2z}b\right] \\ C &= e^{ik_{1z}a}\left[-\frac{i}{2}\left(\frac{k_{2z}}{k_{1z}} - \frac{k_{1z}}{k_{2z}}\right)\sin k_{2z}b\right] \\ D &= e^{-ik_{1z}a}\left[\cos k_{2z}b - \frac{i}{2}\left(\frac{k_{2z}}{k_{1z}} + \frac{k_{1z}}{k_{2z}}\right)\sin k_{2z}b\right] \end{aligned} \tag{12.2-12}$$

方程式（12.2.11）中的矩阵是单位晶胞平移矩阵，它将某一单位晶胞内层 1（折射率为 n_1）中的平面波复振幅与下一个单位晶胞中等价层的平面波复振幅联系起来。因为平移矩阵使得两个具有相同折射率的等价层的场振幅联系起来，所以它是单位矩阵，即

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC = 1 \tag{12.2-13}$$

注意：当单位晶胞平移矩阵使得层 2（折射率为 n_2）场振幅发生联系时，此时的平移矩阵与方程（12.2-12）是不同的。这些矩阵，然而，确实具有相同的迹。后面将会证明：单位晶胞平移矩阵的迹与周期性媒质的光子能带结构$\omega=\omega(\boldsymbol{K})$直接相关。

TM 波（$\boldsymbol{H}$ 矢量垂直于 yz 平面）的矩阵元（A,B,C,D）与 TE 波的矩阵元不同。TM 波的矩阵元为

$$A_{\mathrm{TM}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{1z}a}\left[\cos k_{2z}b + \frac{i}{2}\left(\frac{n_2^2 k_{1z}}{n_1^2 k_{2z}} + \frac{n_1^2 k_{2z}}{n_2^2 k_{1z}}\right)\sin k_{2z}b\right]$$

$$B_{\mathrm{TM}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{1z}a}\left[\frac{i}{2}\left(\frac{n_2^2 k_{1z}}{n_1^2 k_{2z}} - \frac{n_1^2 k_{2z}}{n_2^2 k_{1z}}\right)\sin k_{2z}b\right]$$

$$C_{\mathrm{TM}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{1z}a}\left[-\frac{i}{2}\left(\frac{n_2^2 k_{1z}}{n_1^2 k_{2z}} - \frac{n_1^2 k_{2z}}{n_2^2 k_{1z}}\right)\sin k_{2z}b\right] \tag{12.2-14}$$

$$D_{\mathrm{TM}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{1z}a}\left[\cos k_{2z}b - \frac{i}{2}\left(\frac{n_2^2 k_{1z}}{n_1^2 k_{2z}} + \frac{n_1^2 k_{2z}}{n_2^2 k_{1z}}\right)\sin k_{2z}b\right]$$

上式中只有一个列矢量是独立的。我们可以选择，例如，第 0 个单位晶胞内层 1 的列矢量。等价层中剩余的列矢量与第 0 个单位晶胞的关系如下

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} \tag{12.2-15}$$

可以转化为

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-n} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} \tag{12.2-16}$$

其中最后一个等式是单位矩阵。利用方程（12.2-9），可以得到相同单位晶胞内层 2 的列矢量。

布洛赫波和光子能带结构

周期性媒质中波的传播与结晶固体中电子的运动十分类似。事实上，固体的基本能带理论中的克勒尼希－彭尼模型与周期性分层媒质中的电磁辐射（TE 波）在数学上是等价的。因此固体物理中用到的若干物理概念，例如布洛赫波，布里渊区和能带，也可以用在这里。周期性分层媒质与一维晶体等价，在格子平移时保持不变。如下式所示

$$n^2(z) = n^2(z + \Lambda) \tag{12.2-17}$$

其中Λ是周期。

根据布洛赫定理，周期性媒质中的标准导波模的电场矢量为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_K(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Kz}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k_y y)} \tag{12.2-18}$$

其中 $\boldsymbol{E}_K(z)$是关于周期Λ的周期函数，即

$$\boldsymbol{E}_K(z) = \boldsymbol{E}_K(z + \Lambda) \tag{12.2-19}$$

下标 K 说明函数 $\boldsymbol{E}_K(z)$依赖于 K。常量 K 就是布洛赫波的波数。现在的问题是确定 K 和 $\boldsymbol{E}_K(z)$为ω和 k_y 的函数。根据列矢量的表示法和方程（12.2-4），布洛赫波的周期性条件（12.2-19）很简单

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}K\Lambda} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \tag{12.2-20}$$

从方程式（12.2-11）和式（12.2-20）可以得出：布洛赫波的列矢量满足下面的本征值问题

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = e^{iK\Lambda}\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} \tag{12.2-21}$$

因此，相因数 exp($iK\Lambda$)是单位晶胞平移矩阵（A,B,C,D）的本征值，表示如下

$$e^{iK\Lambda} = \frac{1}{2}(A + D) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(A + D)^2 - 1} \tag{12.2-22}$$

或者等价为

$$\cos K\Lambda = \frac{1}{2}(A + D) \tag{12.2-23}$$

从方程（12.2-21）可以得到上述本征值对应的本征矢量以及乘以任意常数的本征矢量。

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = e^{-inK\Lambda}\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = e^{-inK\Lambda}\begin{bmatrix} B \\ e^{iK\Lambda} - A \end{bmatrix} \tag{12.2-24}$$

由方程（12.2-24）产生的布洛赫波可以认为是单位晶胞平移矩阵（其本征值为 exp($\pm iK\Lambda$)，由方程（12.2-22）给出）的本征矢量。两个本征值互为倒数，因为平移矩阵是单位矩阵。方程（12.2-23）给出了ω, k_y和 K 之间的色散关系

$$K(\omega, k_y) = \frac{1}{\Lambda}\cos^{-1}[\frac{1}{2}(A + D)] \tag{12.2-25}$$

其中当$|(A+D)/2|<1$时对应的 K 为实数，因此可以传播布洛赫波；当$|(A+D)/2|>1$时，$K=m\pi/\Lambda+iK_i$，由于存在虚部 K_i 使得布洛赫波消失，这就是所谓的周期性媒质的光子带隙。光子带隙的边缘是$|(A+D)/2|=1$。

根据方程（12.2-4）和（12.2-20），对于第 n 个单位晶胞内 n_1 层中的布洛赫波，其最终结果为

$$E(x) = [(a_0 e^{-ik_{1z}(z-n\Lambda)} + b_0 e^{+ik_{1z}(z-n\Lambda)})e^{iK(z-n\Lambda)}]e^{-iKz} \tag{12.2-26}$$

其中 a_0 和 b_0 都是常数，由方程（12.2-24）给出。这就完成了对布洛赫波的求解。注意方程（12.2-26）中方括号内的表达式具有周期性。色散关系方程（12.2-25）可以写成

$$\cos K\Lambda = \begin{cases} \cos k_{1z}a \cos k_{2z}b - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{k_{2z}}{k_{1z}} + \dfrac{k_{1z}}{k_{2z}}\right)\sin k_{1z}a \sin k_{2z}b & \text{(TE)} \\ \cos k_{1z}a \cos k_{2z}b - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n_2^2 k_{1z}}{n_1^2 k_{2z}} + \dfrac{n_1^2 k_{2z}}{n_2^2 k_{1z}}\right)\sin k_{1z}a \sin k_{2z}b & \text{(TM)} \end{cases} \tag{12.2-27}$$

从方程（12.2-25）中获得的典型的周期性分层媒质的光子带隙结构如图 12.5 和图 12.6 所示，它们分别对应 TE 波和 TM 波。注意到一个有趣的现象：对于 TM 波，当$k_y=(\omega/c)n_2\sin\theta_B$时，其光子带隙消失，$\theta_B$是布儒斯特角。因为取该角度时，入射波和反射波是非耦合的。

对于特殊情况 k_y=0（例如：正入射）时，ω和 K 之间的色散关系如图 12.7 所示。此时ω和 K 之间的色散关系可以写成

$$\cos K\Lambda = \cos k_1 a \cos k_2 b - \frac{1}{2}\left(\frac{n_2}{n_1} + \frac{n_1}{n_2}\right)\sin k_1 a \sin k_2 b \tag{12.2-28}$$

其中 $k_1=(\omega/c)n_1$ 和 $k_2=(\omega/c)n_2$。

一般地，当 $\mathrm{Re}[K\Lambda]=m\pi$, $m=1,2,3,\cdots$时，出现禁带。借用固体物理学中布里渊区的概念，可以在 0 到π区间内画出色散关系（ω和 K），如图 12.7 所示。从方程（12.2-27）可以大致求解出光子带隙中的 K。第一个光子带隙的复布洛赫波数可以写为

$$K\Lambda = \pi + i\xi \tag{12.2-29}$$

令ω_0处于光子带隙的中心，那么

$$k_1 a = k_2 b = \pi/2 \tag{12.2-30}$$

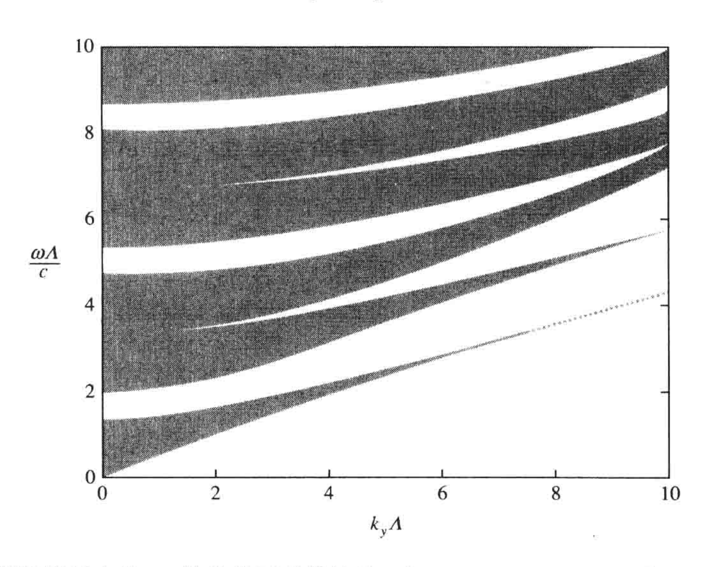


图 12.5　周期性媒质中的 TE 波的光子带隙结构。（n_1=1.45，n_2=2.65，$a=\lambda_0/4n_1$，$b=\lambda_0/4n_2$，λ_0=1.5μm。）深色区域为允许光子存在的带，该区域内$|\cos K\Lambda|<1$

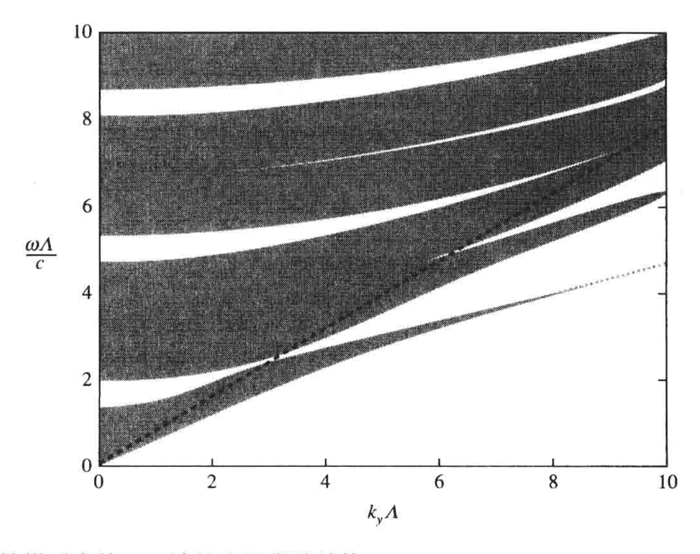


图 12.6　周期性媒质中的 TM 波的光子带隙结构。（n_1=1.45，n_2=2.65，$a=\lambda_0/4n_1$，$b=\lambda_0/4n_2$，λ_0=1.5μm。）深色区域为允许光子存在的带，该区域内$|\cos K\Lambda|<1$。虚线为$k_y=(\omega/c)n_2\sin\theta_B$。取布儒斯特角（此时入射波和反射波是非耦合的）时，光子带隙消失

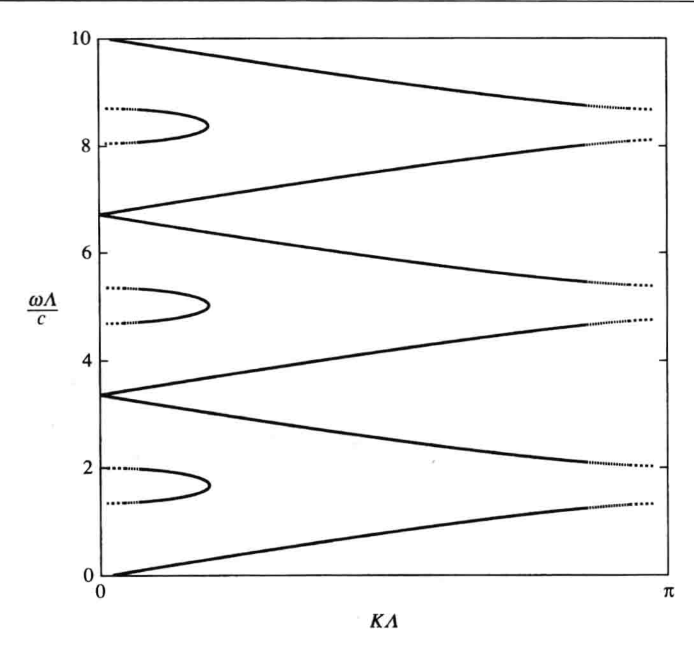


图 12.7　正入射（$k_y=0$）时，周期性媒质的光子带隙结构。纵坐标附近打点的曲线代表布洛赫波数的虚部。该周期性媒质是四分之一波片堆（n_1=1.45，n_2=2.65，$a=\lambda_0/4n_1=259$nm，$b=\lambda_0/4n_2=142$nm，λ_0=1.5μm）

满足上式的结构即为四分之一波片堆（QWS）。在频率ω_0处，方程（12.2-28）变为

$$\cos K\Lambda = -\frac{1}{2}\left(\frac{n_1}{n_2}+\frac{n_2}{n_1}\right) \tag{12.2-31}$$

将方程（12.2-29）代入方程（12.2-3），解出ξ，得到

$$\xi = \log\left|\frac{n_2}{n_1}\right| \cong \frac{2(n_2-n_1)}{n_1+n_2} \tag{12.2-32}$$

$|n_2-n_1| \ll n_{1,2}$时，上式中最后一个等式成立。上式为第一个光子带隙中心处 $K\Lambda$的虚部。在光子带隙内，虚部 x 从 0（能带边缘处）变化到其最大值（方程（12.3-32）在ω_0处）。令ξ为第一光子带隙中心ω_0处的归一化频率偏移

$$\zeta = \frac{\omega-\omega_0}{c}n_1 a = \frac{\omega-\omega_0}{c}n_2 b \tag{12.2-33}$$

将方程（12.2-29）和（12.2-33）代入方程（12.2-28）得

$$\cosh\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{n_2}{n_1}+\frac{n_1}{n_2}\right)\cos^2\zeta - \sin^2\zeta \tag{12.2-34}$$

这就是在光子带隙中 $K\Lambda$的虚部的表达式，它是频率的函数。令$\xi=0$可以获得光子带隙的边缘

$$\zeta_{\text{edge}} = \frac{\omega_{\text{edge}}-\omega_0}{c}n_1 a = \frac{\omega_{\text{edge}}-\omega_0}{c}n_2 b = \pm\arcsin\frac{n_2-n_1}{n_2+n_1} \tag{12.2-35}$$

光子带隙的尺寸为

$$\Delta\omega_{\text{gap}} = \omega_0 \frac{4}{\pi} \arcsin\left|\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right| \tag{12.2-36}$$

光子带隙中心处 $K\Lambda$的虚部为

$$(K_i\Lambda)_{\max} = \log\left|\frac{n_2}{n_1}\right| \cong 2\left|\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right| \tag{12.2-37}$$

上述计算是针对第一光子带隙的。如图 12.7 所示，在正入射时，偶数光子带隙（$K\Lambda=2\pi, 4\pi, 6\pi, \cdots$）消失。这仅在四分之一波片堆的情形下是正确的。在高阶光子带隙时，四分之一波片堆实际上变成了半波片堆，全波堆，等等。根据方程（12.2-28），当$k_1a=k_2b=m\pi$，$m=1, 2, 3, \cdots$时，$\cos K\Lambda=\pm1$。因此$|\cos K\Lambda|=1$时，虚部为零。

作为练习，学生可能想知道周期性分层媒质中介电常量的傅里叶展开系数。其结果为

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_a} = \frac{4}{\pi}\left|\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right| \tag{12.2-38}$$

其中ε_1为介电函数$\varepsilon(z)$的第一级傅里叶展开系数；ε_a为介电函数$\varepsilon(z)$的第零级傅里叶展开系数，而且ε_a同时也是介电函数$\varepsilon(z)$的空间平均。注意：周期性分层媒质的基本光子带隙与介电函数$\varepsilon(z)$的傅里叶展开系数的基波分量的振幅成比例。类似地，高阶光子带隙与相应的傅里叶展开的空间分量的振幅成比例。

对于非四分之一波片堆的特殊情况 $k_y=0$（如正入射），其ω和 K 之间的色散关系如图 12.8 所示的。此时，所有高阶光子带隙都是有限的。频率位于周期性分层媒质的第一光子带隙中心频率处的瞬逝布洛赫波的电场$E(z)$如图 12.9 所示。场幅度按指数衰减，是距离 z 的函数。

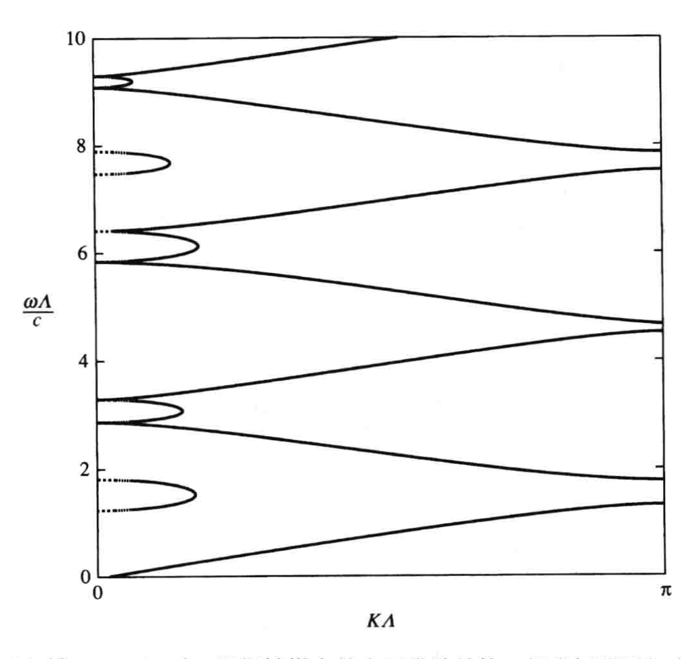


图 12.8　正入射（$k_y=0$）时，周期性媒介的光子带隙结构。纵坐标附近打点的曲线代表布洛赫波数的虚部。注意这里不是四分之一波片堆（$n_1=1.45$，$n_2=2.65$，$a=b=200\text{nm}$）

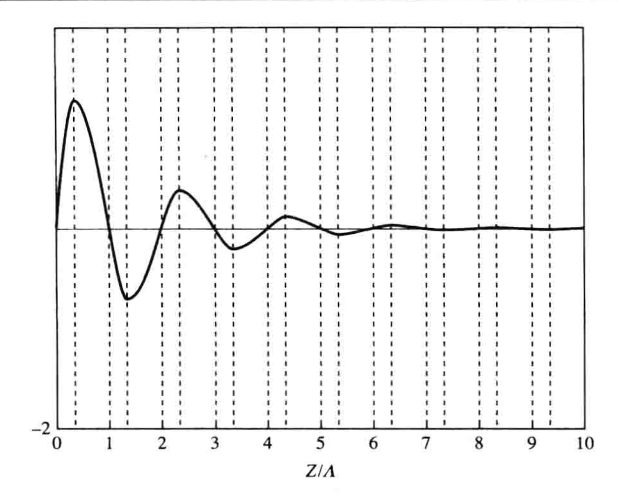


图 12.9　频率位于周期性分层媒质的第一光子带隙中心频率处的瞬逝布洛赫波的电场分布 $E(z)$。该周期性媒质是四分之一波片堆（n_1=1.45，n_2=2.65，$a=\lambda_0/4n_1$=259nm，$b=\lambda_0/4n_2$=142nm，λ_0=1.5μm）

ABCD 矩阵的一般属性

单位晶胞平移矩阵具有若干有趣且有用的特性，包括它是单模矩阵和矩阵元之间具有对称性。

$$\begin{aligned} &AD - BC = 1 \quad (\text{幺模}) \\ &D = A^*, \quad C = B^* \end{aligned} \tag{12.2-39}$$

对于一般的周期性分层媒质（它的每个单位晶胞都是由任意层数的透明层构成的），上述这些特性都是正确的。利用能量守恒和时间反演对称性，可以推导这些特性。

时间反演对称性

单位晶胞平移矩阵（A,B,C,D）提供了一单位晶胞内某一层的平面波振幅与下一个单位晶胞内等价层中的平面波振幅之间的线性关系。如图 12.10 所示，我们讨论由任意数目的层所构成的一般单位晶胞。

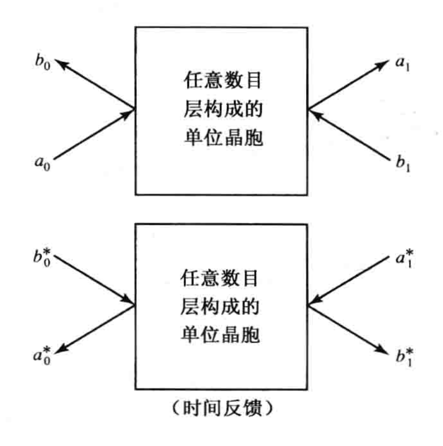


图 12.10　由任意层数构成的单位晶胞的示意图

场振幅的列矢量之间的矩阵关系表示如下

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \quad (12.2\text{-}40)$$

其中（a_0，b_0）是折射率为 n_1 的层内平面波成分的振幅，而（a_1，b_1）是下一个单位晶胞中折射率为 n_1 的等价层内平面波成分的振幅。

如果时间是反转的，所有平面波的传播方向也是反转的；矩阵关系仍然成立。因此有

$$\begin{bmatrix} b_0^* \\ a_0^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1^* \\ a_1^* \end{bmatrix} \quad (12.2\text{-}41)$$

从矩阵方程（12.2-40）和方程（12.2-41）得到

$$\begin{aligned} C &= B^* \\ D &= A^* \end{aligned} \quad (12.2\text{-}42)$$

能量守恒

在一无损耗的周期性媒质中，坡印廷矢量为常数。对于 TE 波，坡印廷矢量的 z 分量可以写成

$$P_z = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}[E_x H_y^*] = \frac{k_{1z}}{2\omega\mu}(|a_0|^2 - |b_0|^2) = \frac{k_{1z}}{2\omega\mu}(|a_1|^2 - |b_1|^2) \quad (12.2\text{-}43)$$

能量守恒要求

$$(|a_0|^2 - |b_0|^2) = (|a_1|^2 - |b_1|^2) \quad (12.2\text{-}44)$$

利用方程（12.2-40），方程（12.2-42）和方程（12.2-44），可以得到单模关系

$$AD - BC = 1 \quad (12.2\text{-}45)$$

对于 TM 波，也可以得到类似的结果。

利用方程（12.2-24）——布洛赫波的列矢量和方程（12.2-43）——坡印廷矢量的 z 分量，可以证明：在光子带隙内（其中的 K 是复数），沿着 z 轴的坡印廷功率通量为 0。换而言之（见习题 12.8），倘若 $K\Lambda = m\pi + iK_i\Lambda$

$$P_z = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}[E_x H_y^*] = \frac{k_{1z}}{2\omega\mu}(|a_0|^2 - |b_0|^2) \propto (|B|^2 - |\mathrm{e}^{\mathrm{i}K\Lambda} - A|^2) = 0 \quad (12.2\text{-}46)$$

z 方向的零功率通量是由按指数衰减的场振幅所构成的，如图 12.9 所示。

12.3　布拉格反射器

当单色平面波入射到周期性分层媒质上时，根据上一节的讨论，此时在周期性媒质中产生布洛赫波。如果入射波的频率落入光子带隙内，在周期性媒质中产生的布洛赫波就变成瞬逝波，无法在媒质中传播。事实上，如图 12.9 所示，在周期性媒质中的电场振幅按指数衰减。根据方程（12.2-46），沿着 z 轴的功率通量为零。在此情形下，入射光束的能量完全反射；对于入射光束而言，此时的媒质就如同一高反射的反射器。对于具有有限个周期单元的媒质，剩余的总能量将透射。通过合理的设计周期性分层媒质，在若干选定的光谱区域，可以获得反射率几乎为 1 的反射器。

在本节中，我们讨论通过周期性分层媒质时，电磁辐射的反射和透射。该结构内存在的共振反射，与通过晶格平面的 X 射线衍射十分类似。因此称为布拉格反射器。为了说明布拉格反射器最基本的特性，我们讨论一简单的情形：由 N 个单位晶胞（如 N 对层）构成的周期性分层媒质。该结构的几何图形如图 12.11 所示。

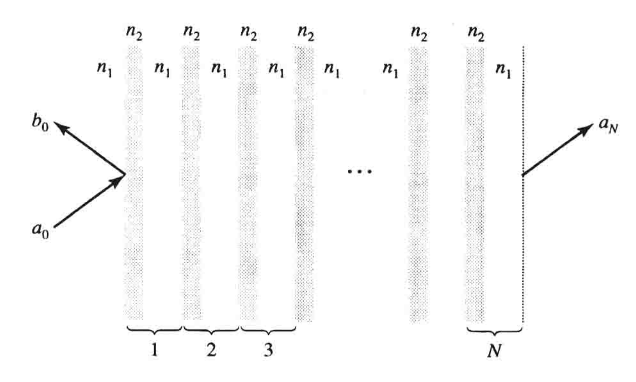


图 12.11　布拉格反射器的示意图，它是由 N 对两种不同材料的交替层构成

振幅反射系数可以写成

$$r_N = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)_{b_N=0} \tag{12.3-1}$$

从 12.2 节的讨论和方程（12.2-25），有

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^N \begin{bmatrix} a_N \\ b_N \end{bmatrix} \tag{12.3-2}$$

利用下面的矩阵恒等式，可以化简第 N 层单位矩阵的能量

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^N = \begin{bmatrix} AU_{N-1} - U_{N-2} & BU_{N-1} \\ CU_{N-1} & DU_{N-1} - U_{N-2} \end{bmatrix} \tag{12.3-3}$$

其中

$$U_N = \frac{\sin(N+1)K\Lambda}{\sin K\Lambda} \tag{12.3-4}$$

K 由方程（12.2-25）定义。

从方程（12.3-1）～（12.3-3）可以直接得到电振幅的反射系数

$$r_N = \frac{CU_{N-1}}{AU_{N-1} - U_{N-2}} \tag{12.3-5}$$

对 r_N 取绝对值且平方后可得到反射率（或者反射强度）。经过若干步的基本代数运算，得到

$$|r_N|^2 = \frac{|C|^2}{|C|^2 + (\sin K\Lambda / \sin NK\Lambda)^2} \tag{12.3-6}$$

式（12.3-6）为用周期性分层媒质制作的布拉格反射器的反射率的解析表达式，此周期性分层媒质由两种不同透明材料的交替层构成。当 $N=1$ 时，得

$$|r_1|^2 = \frac{|C|^2}{|C|^2+1} \tag{12.3-7}$$

这是该结构的一个周期所引起的反射率。注意：$|C|^2$ 与单一周期的结构的反射率直接关联。从式（12.3-7）可以得到

$$|C|^2 = \frac{|r_1|^2}{1-|r_1|^2} \tag{12.3-8}$$

对于$|r_1|^2$比 1 小得多的布拉格反射器，$|C|^2$粗略地等于$|r_1|^2$。方程（12.3-6）分母中第二项是 K 的快变函数，或者等价地，是β和ω的快变函数。因此它决定了结构的反射光谱。图 12.12 给出了集中于基本光子带隙附近的 10 个周期（N=10）的布拉格反射器的反射光谱。注意到反射率的峰值出现在光子带隙的中心处。光子带隙附近存在旁瓣。这些旁瓣处在包络 $|C|^2/(|C|^2+\sin^2 K\Lambda)$ 以下。在光子带隙的边缘，$K\Lambda=m\pi$，反射率为

$$|r_N|^2 = \frac{|C|^2}{|C|^2+(1/N)^2} \tag{12.3-9}$$

可以看出：对于具有若干周期（N≫1）的布拉格反射器，其反射率在光子带隙边缘接近 1。在光子带隙内，$K\Lambda$是复数

$$K\Lambda = m\pi + iK_i\Lambda \tag{12.3-10}$$

反射率的公式（12.3-6）变为

$$|r_N|^2 = \frac{|C|^2}{|C|^2+(\sinh K_i\Lambda/\sinh NK_i\Lambda)^2} \tag{12.3-11}$$

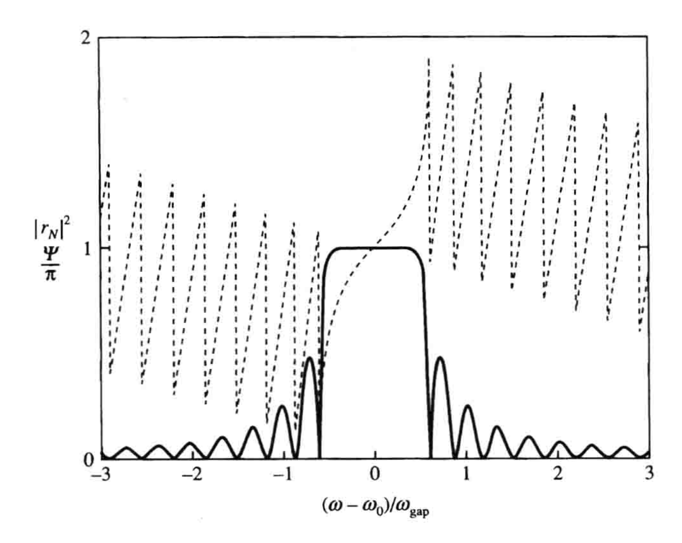


图 12.12　10 个周期的布拉格反射器（N=10，n_1=1.45,n_2=2.25,a=259nm,b=167nm）的反射光谱（实线）和相移（虚线）。基本光子带隙的中心位于λ_0=1500nm

N 很大时，式（12.3-11）分母中的第二项接近于零，约为 $\exp[-2(N-1)K_i\Lambda]$。于是对于有足够周期数的布拉格反射器，光子带隙中的反射率接近 1。在每个光子带隙的中心，分层媒质的每个周期大约是半波的整数倍。对于四分之一波片堆的情形，在光子带隙的中心处，

每个周期精确地等于半波。光波将被强烈反射，因为来自相邻周期的相继反射是同相的，它们会有效叠加。这种情况类似于来自晶体平面的 X 射线的布拉格反射。

来自布拉格反射器的反射光束的相移Ψ也很有意思。定义为

$$r_N = |r_N| \exp(-i\Psi) \tag{12.3-12}$$

图 12.12 也说明了 10 个周期的布拉格反射器的相移是频率的函数。注意：相移具有强的色散，它是频率的函数。回顾前文，群时延是相移的导数

$$\tau = \frac{d\Psi}{d\omega} \tag{12.3-13}$$

图 12.13 说明，10 个周期的布拉格反射器的群时延τ是频率的函数。从图中可以看到，在光子带隙中心处群时延最小，这是由于在光子带隙的中心处，周期性媒质的光透过率最小。

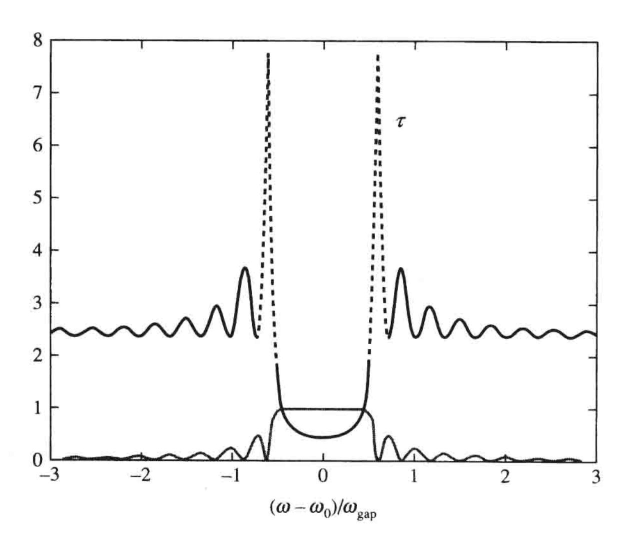


图 12.13　10 个周期的布拉格反射器（N=10，n_1=1.45，n_2=2.25，a=259nm，b=167nm）的群时延（虚线，单位是 10fs），它是频率的函数。实线代表反射光谱。基本光子带隙的中心位于λ_0=1500nm

透射滤波器

在光子带隙的选定光谱区域内，布拉格反射器类于高反射的反射镜。对于四分之一波片堆，根据方程（12.2-35），基本光子带隙为

$$\Delta\omega_{gap} = \omega_0 \frac{4}{\pi} \arcsin\left|\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right| \tag{12.3-14}$$

其中ω_0 是光子带隙的中心。禁带与折射率突变$|n_2 - n_1|$成比例。因此，利用$|n_2 - n_1|$较小的四分之一波片堆可以得到窄带反射滤波器。然而，由于$|n_2 - n_1|$较小，需要采用较多周期才能在光子带隙中心得到高的反射率。

将一半波层置于两个四分之一波片堆中间可得到窄带光谱透射滤波器，图 12.14 给出了该滤波器的结构示意图。该结构也可视为带有缺陷（例如：一附加的四分之一波长层）的四分之一波片堆，缺陷位于堆的中心。由于附加层的存在，该结构类似于一窄带透射滤波器，

其通带局限于四分之一波片的光子带隙中心。此结构也可视为带一仅有一个四分之一波长层的薄腔的法布里–珀罗标准具。前面的四分之一波片堆和后面的四分之一波片堆充当了标准具的反射镜。因为四分之一波片堆是高反射的反射镜，整个结构类似具有高精细度的法布里–珀罗标准具，有尖锐的透射峰。

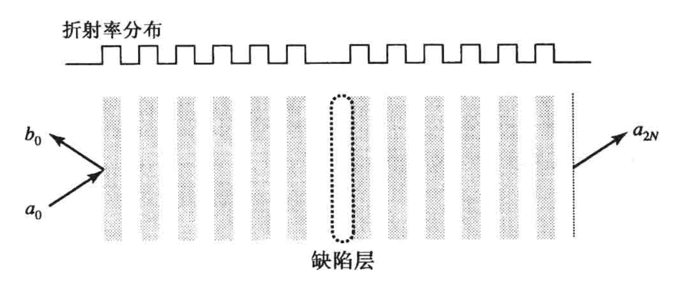


图 12.14　透射滤波器的示意图。它是由两个四分之一波片堆和位于这两者之间的半波层构成的。这种结构也可视为带有缺陷（例如：一附加的四分之一波长层）的四分之一波片堆，缺陷位于堆的中心

图 12.15 给出了经计算得到的滤波器的反射光谱，该滤波器是由两个 10 周期的四分之一波片堆和位于这两者之间的单一四分之一波长层构成的。利用本章前面部分介绍的矩阵方法，可以得到反射光谱。特别地，对于图 12.14 所示的结构，使得入射振幅 a_0 和透射振幅 a_{2N} 发生联系的矩阵方程可以写成

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^N \begin{bmatrix} e^{ik_1 a} & 0 \\ 0 & e^{-ik_1 a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^N \begin{bmatrix} a_{2N} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12.3-15}$$

其中 a 是缺陷层的厚度，$k_1=n_1\omega/c$。

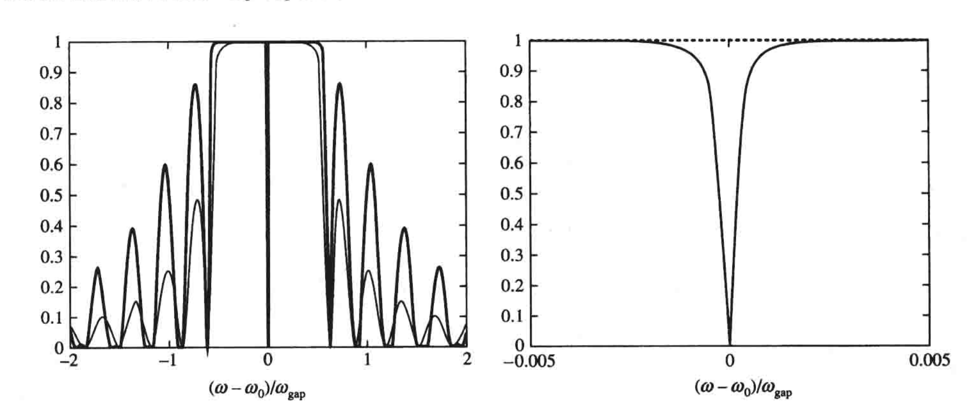


图 12.15　$(N)Q\,(N)$结构的反射光谱，其中 N 代表 10 周期的周期性分层堆，Q 代表 n_1 层的四分之一波长层，其中 $n_1=1.45$，$n_2=2.25$，$a=259$nm，$b=167$nm。基本光子带隙的中心位于$\lambda_0=1500$nm。在光子带隙中心处，这种结构能提供窄的通带

12.4　耦合波分析

在 12.2 节中，我们得到了周期性分层媒质中电磁辐射传播的精确解。得到光子带隙结构的闭形布洛赫波。然而，在很多周期性媒质中，仅仅能够得到麦克斯韦方程的近似解。在本

节中，我们描述的耦合波分析，它认为介电张量的周期性变化为微扰，会与结构内所传播的无微扰的简正模耦合。换言之，介电张量是空间的函数，可以写成

$$\varepsilon(x, y, z) = \varepsilon_a(x, y) + \Delta\varepsilon(x, y, z) \tag{12.4-1}$$

其中$\varepsilon_a(x,y)$是介电张量的无微扰部分，$\Delta\varepsilon(x,y,z)$代表介电微扰，在 z 方向是周期性的，是介电张量唯一周期性变化的部分。

我们假设：在无微扰介电媒质中传播的简正模可以用$\varepsilon_a(x,y)$来描述。无微扰结构的例子包括自由空间，平面波导和圆介质波导（光纤）。因为无微扰介电媒质在 z 方向是均匀的，所以无微扰结构内传播的简正模可以写成如下形式

$$\boldsymbol{E}(x, y, z, t) = \boldsymbol{E}_m(x, y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\beta_m z)} \tag{12.4-2}$$

其中β_m 第 m 个模式的传播常数，m 是模折射率（对于约束模，其值通常为整数），$\boldsymbol{E}_m(x,y)$是简正模的波函数。这些简正模满足

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \omega^2\mu\varepsilon_a(x, y) - \beta_m^2\right)\boldsymbol{E}_m(x, y) = 0 \tag{12.4-3}$$

假设$(\boldsymbol{\nabla} \bullet \boldsymbol{E}) = 0$，上式为波函数的近似。阶跃型圆光纤中的 LP 模和第 3 章提到的介质平板中的 TE 模满足方程（12.4-3）。如果频率为ω的任意场在 z=0 处受激，该场在无微扰媒质中的传播通常可以表示为简正模的线性组合

$$\boldsymbol{E} = \sum_m A_m \boldsymbol{E}_m(x, y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\beta_m z)} \tag{12.4-4}$$

其中 A_m 是常数，求和包含了所有的导模。倘若简正模构成完整集，那么方程（12.4-4）是个合理的展开式。为了方便，简正模通常标准化为在 z 方向上的 1W 的功率通量。因此模式的正交关系可以写成

$$\frac{1}{2}\int (\boldsymbol{E}_m \times \boldsymbol{H}_n^*)_z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \delta_{mn} \tag{12.4-5}$$

其中δ_{mn} 是用于离散谱模（约束模）的克罗内克符号，而狄拉克δ函数是用于连续光谱模（非受限模），$\boldsymbol{H}_n^*$是第 n 个模式的磁场，$\boldsymbol{E}_m$ 是第 m 个模式的电场。当$(\boldsymbol{\nabla} \bullet \boldsymbol{E}) = 0$，且模式满足方程（12.4-3）时，正交关系变为（见习题 13.7）

$$\int \boldsymbol{E}_n^*(x, y) \cdot \boldsymbol{E}_m(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{2\omega\mu}{|\beta_m|}\delta_{mn} \tag{12.4-6}$$

其中δ_{mn} 是用于约束模的克罗内克符号，狄拉克δ函数用于非受限模（例如：辐射模）。如果单个模式，比如$\boldsymbol{E}_1(x, y)\mathrm{e}^{i(\omega t-\beta_1 z)}$，在 z=0 处受激，那么在整个无微扰介质中电磁波都将保持该模式。

下面讨论在周期性微扰媒质中——可以用介电张量$\varepsilon(x, y, z) = \varepsilon_a(x, y) + \Delta\varepsilon(x, y, z)$描述，在 z=0 处受激的无微扰的模式$\boldsymbol{E}_1(x, y)e^{\mathrm{i}(\omega t-\beta_1 z)}$ 的传播。由于介电微扰$\Delta\varepsilon(x, y, z)$的存在，引起附加的偏振

$$\Delta\boldsymbol{P} = \Delta\varepsilon(x, y, z)\boldsymbol{E}_1(x, y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\beta_1 z)} \tag{12.4-7}$$

如果此偏振波，类似一分布辐射源，能够将能量转入（或者取出）其他模式$\boldsymbol{E}_2(x, y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\beta_2 z)}$，那么我们说介电微扰$\Delta\varepsilon(x, y, z)$在模式 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$ 之间耦合（例如：引起能量

改变）。下面我们要研究的就是，满足什么条件时发生耦合。

无微扰模式之间的能量变化是由于介电微扰 $\Delta\varepsilon(x,y,z)$ 引起的，它类似于在含时微扰影响下，原子（例如：氢原子）的电子本征态之间的能量转换。一个到达的光子被吸收，一个电子受激从基态跃迁到上能态。用于模式耦合的数学形式体系非常类似于量子力学中与时间有关的微扰理论。这种数学逼近也常称为常数变易法。这个过程包括将电磁波的电场矢量表示成无微扰介电媒质简正模的线性组合，很明显其中的展开系数依赖于 z，因为 $\Delta\varepsilon(x,y,z)\neq 0$ 时，波 $\boldsymbol{E}_m(x,y)\mathrm{e}^{i(\omega t-\beta_m z)}$ 不再是本征模式

$$\boldsymbol{E}=\sum_m A_m(z)\boldsymbol{E}_m(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\beta_m z)} \tag{12.4-8}$$

与 z 有关的振幅 $A_m(z)$是简正模之间耦合的反映。将方程（12.4-8）代入波动方程

$$\{\nabla^2+\omega^2\mu[\varepsilon_a(x,y)+\Delta\varepsilon(x,y,z)]\}\boldsymbol{E}=0 \tag{12.4-9}$$

利用方程（12.4-3），我们得到

$$\sum_m\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}A_m-2i\beta_m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A_m\right)\boldsymbol{E}_m(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\beta_m z)}=-\omega^2\mu\sum_n\Delta\varepsilon(x,y,z)A_n\boldsymbol{E}_n(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\beta_n z)} \tag{12.4-10}$$

进一步假设：介电微扰“弱”，因此模振幅的变化“缓慢”且满足条件

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}A_m\ll\beta_m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A_m \tag{12.4-11}$$

这也叫做缓变振幅（SVA）近似法，常用于微扰较弱的情况下。忽略方程（12.4-10）中二次导数得

$$-2i\sum_m\beta_m\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A_m\right)\boldsymbol{E}_m(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_m z}=-\omega^2\mu\sum_n\Delta\varepsilon(x,y,z)A_n\boldsymbol{E}_n(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_n z} \tag{12.4-12}$$

下面取方程（12.4-12）的标积和 $\boldsymbol{E}_k^*(x,y)$，且对所有 x 和 y 积分。利用方程（12.4-6）简正模的正交特性，结果为

$$\langle k|k\rangle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A_k=\frac{\omega^2\mu}{2i\beta_k}\sum_n\langle k|\Delta\varepsilon|n\rangle A_n(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta_k-\beta_n)z} \tag{12.4-13}$$

其中

$$\langle k|k\rangle=\int E_k^*\cdot E_k\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{2\omega\mu}{|\beta_k|} \tag{12.4-14}$$

$$\langle k|\Delta\varepsilon|n\rangle=\int\boldsymbol{E}_k^*\cdot\Delta\varepsilon(x,y,z)\boldsymbol{E}_n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{12.4-15}$$

因为介电微扰 $\Delta\varepsilon(x,y,z)$ 在 z 方向具有周期性，将其展开成傅里叶级数

$$\Delta\varepsilon(x,y,z)=\sum_{m\neq 0}\varepsilon_m(x,y)\exp\left(-im\frac{2\pi}{\Lambda}z\right) \tag{12.4-16}$$

其中的求和包含了所有的整数 m，除去 $m=0$ 的情况，这是由方程式（12.4-1）中 $\Delta\varepsilon(x,y,z)$ 的定义所致。

将方程式（12.4-14），式（12.4-15）和式（12.4-16）代入方程式（12.4-13）推导出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A_k=-i\frac{\beta_k}{|\beta_k|}\sum_m\sum_n C_{kn}^{(m)}A_n(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta_k-\beta_n-m2\pi/\Lambda)z} \tag{12.4-17}$$

其中耦合系数 $C_{kn}^{(m)}$ 定义如下

$$C_{kn}^{(m)} = \frac{\omega}{4}\langle k|\varepsilon_m(x, y)|n\rangle = \frac{\omega}{4}\int \boldsymbol{E}_k^* \cdot \varepsilon_m(x, y)\boldsymbol{E}_n \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{12.4-18}$$

耦合系数 $C_{kn}^{(m)}$ 反映了由介电微扰的第 m 阶傅里叶成分引起的第 k 个和第 n 个模式之间的耦合程度。

方程（12.4-17）由一组耦合线性微分方程构成。理论上，该式包含无限多个模振幅。然而，实际上，特别在谐振耦合条件附近，仅有两个模式强烈耦合，方程（12.4-17）缩减为仅含有两个模振幅的两个方程。利用谐振耦合，对于若干整数 m，在条件

$$\beta_k - \beta_n - m\frac{2\pi}{\Lambda} = 0 \tag{12.4-19}$$

对两个模式（模式 k 和 n）间的模式耦合求平均。此条件很重要，下面将称它为“纵向相位匹配”或者相位匹配。在量子力学与时间有关的微扰理论中，该条件是能量守恒的空间模拟，因此可称为动量守恒。谐振耦合可作如下解释。根据方程（12.4-17），在介电微扰第 m 阶傅里叶成分作用下，第 k 个模式与第 n 个模式在区间 z 到 $z+\mathrm{d}z$ 之间的模式耦合引起其场振幅的增加 $\mathrm{d}A_k$，可以写成

$$\mathrm{d}A_k = -i\frac{\beta_k}{|\beta_k|}C_{kn}^{(m)}A_n(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta_k-\beta_n-m2\pi/\Lambda)z}\mathrm{d}z \tag{12.4-20}$$

因为场振幅是空间的缓变函数，可以在距离 L（L 比周期Λ大得多，然而比场振幅的变化尺度要小得多）上对式（12.4-20）进行积分。于是产生场振幅的净增量 ΔA_k，它是在介电微扰的第 m 阶傅里叶成分作用下，由于第 k 个与第 n 个模式在距离 z 到 $z+L$ 上模式耦合引起的，可以表示如下

$$\Delta A_k = -i\frac{\beta_k}{|\beta_k|}C_{kn}^{(m)}A_n\int_{L\gg\Lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta_k-\beta_n-m2\pi/\Lambda)z}\mathrm{d}z \tag{12.4-21}$$

从式（12.4-21）可见：对于某些整数 m，不满足方程式（12.4-19）时，第 k 个和第 n 个模式间的耦合是可忽略的。因为方程式（12.4-21）仅在指数为零时其积分才为非零，而指数为零时就变成了相位匹配条件式（12.4-19）。

概括地说，在周期性微扰媒质中电磁辐射可以用常数变易法描述。这些模振幅（“常数”）由方程（12.4-17）控制。为了获得明显的模耦合，必须满足两个条件：第一个条件由方程（12.4-19）给出，为动力学条件；第二个条件要求耦合常量 $C_{kn}^{(m)}$ 必须不为零。后者也常叫做动力学条件，因为它依赖于波的特性，例如波的偏振和模式波函数。

上述模式耦合的一般属性很重要，因为它可用于确定什么过程能发生以及需要什么类型的微扰才能使得给定的简正模对发生耦合。为了证明此观点，在本章中将会讨论若干例子。

方程式（12.4-19）即布拉格条件，因为它类似于晶体中的 X 射线衍射。满足方程式（12.4-19）时，入射波——用平面波代表，其电场与 $\exp(-ik_y y - i\beta z)$ 成比例，与反射波——其电场与 $\exp(-ik_y y + i\beta z)$ 成比例，强烈耦合。常数β是波矢分量，垂直于相应的晶体平面。它服从方程式（12.4-19），且晶体平面间的间隔Λ满足

$$\beta - (-\beta) - m\frac{2\pi}{\Lambda} = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \cdots) \tag{12.4-22}$$

由于$\beta=k\sin\theta$，其中θ为入射角（从晶体平面测量），式（12.4-22）可以等价为

$$2\Lambda \sin\theta = m\lambda \quad (m = 1, 2, 3, \cdots) \tag{12.4-23}$$

式（12.4-23）就是著名的 X 射线衍射的布拉格条件，该条件是必要不充分的。衍射强度与周期性介电微扰的傅里叶展开系数有关，也和波的偏振有关。

耦合模方程

方程（12.4-17）描述了由周期性介电微扰引起的模耦合的最一般的情形，实际上，它常常仅包含两个模式之间的耦合。令这两个耦合模分别是$\boldsymbol{E}_1(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\beta_1 z)}$和$\boldsymbol{E}_2(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\beta_2 z)}$。忽略与其他任何模式间的相互作用，此时的耦合方程变为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A_1 &= -i\frac{\beta_1}{|\beta_1|}C_{12}^{(m)}A_2(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\beta z}\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A_2 &= -i\frac{\beta_2}{|\beta_2|}C_{21}^{(-m)}A_1(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta\beta z}\end{aligned} \tag{12.4-24}$$

其中

$$\Delta\beta = \beta_1 - \beta_2 - m\frac{2\pi}{\Lambda} = \beta_1 - \beta_2 - mK \tag{12.4-25}$$

其中 $K=2\pi/\Lambda$，耦合系数$C_{12}^{(m)}$和$C_{21}^{(-m)}$由方程（12.4-18）定义。常数 K 也就是所熟知的光栅波数。倘若介电微扰$\Delta\varepsilon(x,y,z)$是厄米介电张量，从方程（12.4-18）出发可直接证明

$$C_{12}^{(m)} = [C_{21}^{(-m)}]^* \tag{12.4-26}$$

如果介电张量ε仅是 z 的函数（如与 x，y 无关），那么无微扰媒质的简正模是平面波，周期性介电微扰的傅里叶展开系数ε_m是常数。此时耦合系数变为

$$C_{kn}^{(m)} = \frac{\omega^2\mu}{2\sqrt{|\beta_k\beta_n|}}\boldsymbol{p}_k^*\cdot\varepsilon_m\boldsymbol{p}_n \tag{12.4-27}$$

其中 $\boldsymbol{P}_k$ 和 $\boldsymbol{P}_n$ 代表平面波偏振态的单位矢量。注意：耦合系数依赖于耦合模的偏振态和介电微扰的傅里叶展开系数ε_m的张量特性。

耦合方程（12.4-24）中的因子$\beta_1/|\beta_1|$和$\beta_2/|\beta_2|$很重要，将决定耦合的程度。这些因子也依赖于耦合模的传播方向，因此耦合可以分成两类：同向耦合和相向耦合。

同向耦合（$\beta_1\beta_2>0$）

当两个耦合模沿着相同方向传播时，比如$+z$ 方向，因子$\beta_1/|\beta_1|$和$\beta_2/|\beta_2|$都等于 1。耦合方程（12.4-24）变为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A_1 &= -i\kappa A_2(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\beta z}\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A_2 &= -i\kappa^* A_1(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta\beta z}\end{aligned} \tag{12.4-28}$$

其中耦合常数可以写成

$$\kappa = C_{12}^{(m)} \tag{12.4-29}$$

由于 A_1 和 A_2 是简正模的复振幅，因此$|A_1|^2$和$|A_2|^2$分别代表模式 1 和模式 2 中的功率通量。耦合方程（12.4-28）和能量守恒（见习题 12.10）是一致的，要求

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(|A_1|^2+|A_2|^2)=0 \qquad (12.4\text{-}30)$$

为了求解耦合方程，我们首先考虑：完美的相位匹配（$\Delta\beta$=0）这一简单情形。

$\Delta\beta=0$ 的情形

对于某些整数 m，当满足

$$\Delta\beta=\beta_1-\beta_2-m\frac{2\pi}{\Lambda}=0 \qquad (12.4\text{-}31)$$

时发生相位匹配。在相位匹配条件下，耦合方程变为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A_1&=-i\kappa A_2\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A_2&=-i\kappa^* A_1\end{aligned} \qquad (12.4\text{-}32)$$

求解式（12.4-32）可通过先消去 A_2，接着从总微分方程中求出 A_1。推出

$$\begin{aligned}A_1(z)&=A_1(0)\cos|\kappa|z-i\frac{\kappa}{|\kappa|}A_2(0)\sin|\kappa|z\\ A_2(z)&=-i\frac{\kappa^*}{|\kappa|}A_1(0)\sin|\kappa|z+A_2(0)\cos|\kappa|z\end{aligned} \qquad (12.4\text{-}33)$$

其中 $A_1(0)$和 $A_2(0)$是 z=0 处的模振幅。对于在 z=0 处入射的单光束（例如：$A_2(0)$=0）的情况，其解变为

$$\begin{aligned}A_1(z)&=A_1(0)\cos|\kappa|z\\ A_2(z)&=-i\frac{\kappa^*}{|\kappa|}A_1(0)\sin|\kappa|z\end{aligned} \qquad (12.4\text{-}34)$$

由于

$$|A_1(z)|^2+|A_2(z)|^2=|A_1(0)|^2 \qquad (12.4\text{-}35)$$

所以由两光波所携带的总的能量是守恒的。如果两光波间的相互作用距离 L 满足$|\kappa|L=\pi/2$，那么模式 1 的总能量能完全转移到模式 2 中去。对于一般的相互作用距离，耦合效率可定义为

$$\eta=\left|\frac{A_2(L)}{A_1(0)}\right|^2=\sin^2|\kappa|L \qquad (12.4\text{-}36)$$

图 12.16（a）给出了模功率$|A_1|^2$和$|A_2|^2$与相互作用距离 z 的函数关系。可以看出：功率在两个耦合模之间来回转移，而当$|\kappa|L=\pi/2,3\pi/2,5\pi/2,\cdots$时，功率会从某一模式完全转移至另一模式中。下面，我们讨论相位不匹配的情形。在该情形时，只会发生部分的功率转移现象。

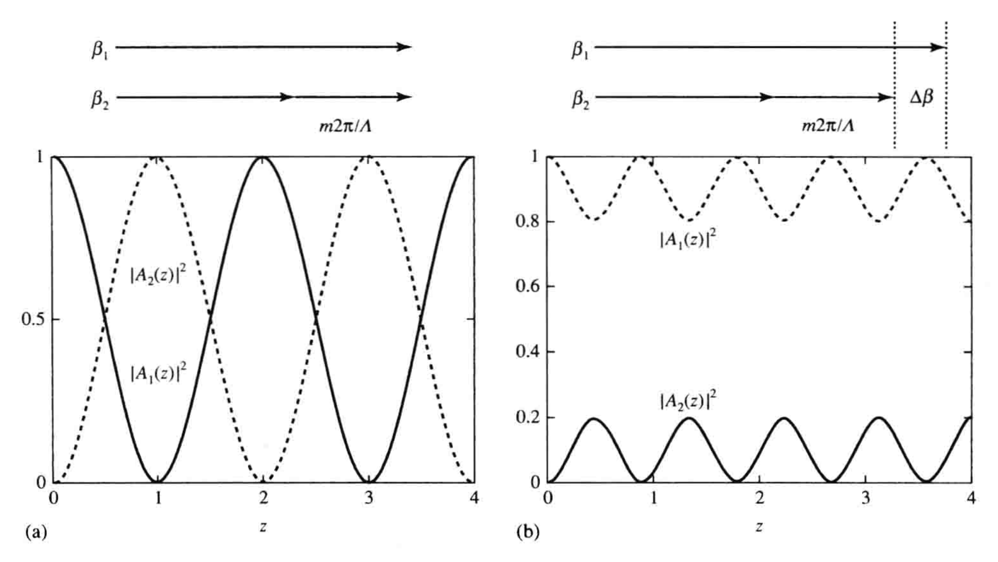


图 12.16　模功率$|A_1|^2$和$|A_2|^2$与 z 的关系，$\kappa=\pi/2$，无损耗，假设耦合常数 κ 为实数。图上方的矢量给出了同向耦合的动量图。(a) $\Delta\beta=0$，(b) $\Delta\beta=4\kappa$

$\Delta\beta\neq0$ 的情形

现在我们讨论相位不匹配的情形。为了求解耦合方程，在方程（12.4-28）的两边都乘以 $\exp(-i\Delta\beta z)$，得到

$$e^{-i\Delta\beta z}\frac{d}{dz}A_1=-i\kappa A_2(z) \tag{12.4-37}$$

在方程（12.4-37）两边分别对 z 求导数，且利用方程（12.4-38）消去 A_2，得到下面的微分方程

$$\frac{d^2}{dz^2}A_1-i\,\Delta\beta\frac{d}{dz}A_1+|\kappa|^2A_1=0 \tag{12.4-38}$$

式（12.4-38）是标准的二阶微分方程，很容易求出 A_1 的通解。一旦求出 A_1，利用方程（12.4-37）就可直接求 A_2 的通解。经过若干步的代数运算，通解可以写成

$$\begin{aligned}A_1(z)&=e^{i(\Delta\beta/2)z}\left[\left(\cos sz-i\frac{\Delta\beta}{2}\frac{\sin sz}{s}\right)A_1(0)-i\kappa\frac{\sin sz}{s}A_2(0)\right]\\A_2(z)&=e^{-i(\Delta\beta/2)z}\left[-i\kappa^*\frac{\sin sz}{s}A_1(0)+\left(\cos sz+i\frac{\Delta\beta}{2}\frac{\sin sz}{s}\right)A_2(0)\right]\end{aligned} \tag{12.4-39}$$

其中

$$s^2=\kappa^*\kappa+\left(\frac{\Delta\beta}{2}\right)^2 \tag{12.4-40}$$

$A_1(0)$和 $A_2(0)$是在 $z=0$ 处的模振幅。

对于在 $z=0$ 处入射的单光束（如 $A_2(0)=0$）的特殊情况，该解变为

$$A_1(z) = e^{i(\Delta\beta/2)z}\left(\cos sz - i\frac{\Delta\beta}{2}\frac{\sin sz}{s}\right)A_1(0)$$
$$A_2(z) = e^{-i(\Delta\beta/2)z}\left(-i\kappa^*\frac{\sin sz}{s}\right)A_1(0) \tag{12.4-41}$$

由于

$$|A_1(z)|^2 + |A_2(z)|^2 = |A_1(0)|^2 \tag{12.4-42}$$

式（12.4-42）说明沿着 z 方向的总功率通量是守恒的。耦合效率（或者衍射效率）定义为

$$\eta = \left|\frac{A_2(L)}{A_1(0)}\right|^2 \tag{12.4-43}$$

其中 L 是相互作用长度。利用方程式（12.4-41）和式（12.4-40），得到

$$\eta = \frac{|\kappa|^2}{|\kappa|^2 + (\Delta\beta/2)^2}\sin^2|\kappa|L\sqrt{1+\left(\frac{\Delta\beta}{2|\kappa|}\right)^2} \tag{12.4-44}$$

方程式（12.4-44）或者式（12.4-41）说明：功率转移或者耦合效率永远不可能是完全的，除非满足相位匹配条件——$\Delta\beta=0$。图 12.16（b）给出了模功率$|A_1|^2$和$|A_2|^2$与相互作用距离 z 的函数关系。模式之间功率转移的不完全是由于相位不匹配引起的。根据方程（12.4-44），最大的耦合效率可以写成

$$\eta_{\max} = \frac{|\kappa|^2}{|\kappa|^2 + (\Delta\beta/2)^2} \tag{12.4-45}$$

当 $\Delta\beta = 2|\kappa|$ 时，最大耦合效率降低至 1/2。当$|\kappa|L = \pi/2$ 时，耦合效率与相位不匹配 $\Delta\beta L$ 的函数关系如图 12.17 所示。可以看到，当$\Delta\beta=0$ 时，耦合效率达到 100%，随着相位不匹配$\Delta\beta$的增加，耦合效率下降。

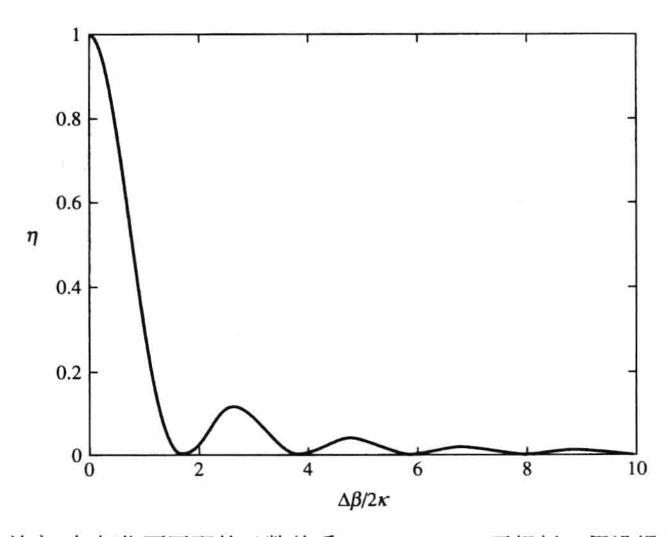


图 12.17　耦合效率η与相位不匹配的函数关系，$\kappa L = \pi/2$，无损耗，假设耦合常数 κ 为实数

相向耦合（$\beta_1\beta_2<0$）

当两个耦合模沿着相对方向传播时，也就是说，$\beta_1>0$ 且 $\beta_2<0$，因子 $\beta_1/|\beta_1|$ 和 $\beta_2/|\beta_2|$ 分别等于 1 和−1。此时耦合方程（12.4-24）变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A_1=-i\kappa A_2(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\beta z}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A_2=i\kappa^*A_1(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta\beta z} \tag{12.4-46}$$

其中耦合常数 κ 由方程（12.4-29）定义。此时+z 方向上新的功率通量为 $|A_1|^2-|A_2|^2$。耦合方程同样和能量守恒（见习题 12.11）是一致的，要求

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(|A_1|^2-|A_2|^2)=0 \tag{12.4-47}$$

现在开始解方程（12.4-46）求模振幅。

$\Delta\beta$=0 的情形

对于完美的相位匹配情形，耦合方程（12.4-46）变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A_1=-i\kappa A_2$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A_2=i\kappa^*A_1 \tag{12.4-48}$$

通过对式（12.4-48）消去 A_2，可以方便地求积分。在 $A_2(L)=0$ 的边界条件下，其解为

$$A_1(z)=\frac{\cosh|\kappa|(L-z)}{\cosh|\kappa|L}A_1(0)$$
$$A_2(z)=-i\frac{\kappa^*}{|\kappa|}\frac{\sinh|\kappa|(L-z)}{\cosh|\kappa|L}A_1(0) \tag{12.4-49}$$

由于

$$|A_1(z)|^2-|A_2(z)|^2=|A_1(0)|^2-|A_2(0)|^2=|A_1(L)|^2=\frac{|A_2(0)|^2}{\cosh^2|\kappa|L} \tag{12.4-50}$$

式（12.4-50）说明：沿着 z 轴的净功率通量是守恒的。图 12.18 给出了模功率 $|A_1|^2$ 和 $|A_2|^2$ 与 z 的函数关系。可以看出：当模式 1 穿过周期性媒质时，其功率是相互作用距离 z 的递减函数；而模式 1 损耗的功率转移至模式 2 中，模式 2 的功率随着其沿−z 方向的传播而增加。

耦合效率定义为

$$\eta=\frac{|A_2(0)|^2}{|A_1(0)|^2} \tag{12.4-51}$$

根据方程（12.4-49），得

$$\eta=\tanh^2|\kappa|L \tag{12.4-52}$$

可以看到，耦合效率是 $|\kappa|L$ 的递增函数，且当 $|\kappa|L$ 趋于无穷时，耦合效率趋向于 1。

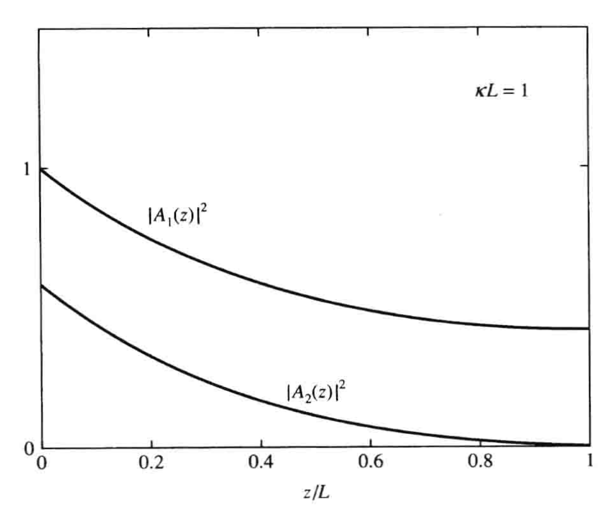


图 12.18　在相向相互作用和相位匹配布拉格散射条件下，模功率 $|A_1|^2$ 和 $|A_2|^2$ 与 z 的关系。入射波的模功率按指数衰减，其衰减的功率转移至散射模式中，故散射模式的功率沿着 $-z$ 方向按指数增长

$\Delta\beta \neq 0$ 的情形

现在我们讨论相位不匹配的情形。在 $A_2(L)=0$ 的边界条件下，耦合方程（12.4-46）的解可以写成

$$A_1(z) = e^{i(\Delta\beta/2)z} \frac{s \cosh s(L-z) + i(\Delta\beta/2) \sinh s(L-z)}{s \cosh sL + i(\Delta\beta/2) \sinh sL} A_1(0)$$

$$A_2(z) = e^{-i(\Delta\beta/2)z} \frac{-i\kappa^* \sinh s(L-z)}{s \cosh sL + i(\Delta\beta/2) \sinh sL} A_1(0) \qquad (12.4\text{-}53)$$

其中

$$s^2 = \kappa^* \kappa - \left(\frac{\Delta\beta}{2}\right)^2 \qquad (12.4\text{-}54)$$

从上面给出的解 $A_2(z)$ 可以看出：在 $z=0$ 至 $z=L$ 区间内，两个模式之间的功率转移为

$$\eta = \frac{|A_2(0)|^2}{|A_1(0)|^2} = \frac{|\kappa|^2 \sinh^2 sL}{s^2 \cosh^2 sL + (\Delta\beta/2)^2 \sinh^2 sL} \qquad (12.4\text{-}55)$$

再次发现：耦合效率随着 $\Delta\beta$ 的增加而减少。相向耦合时，仅当满足相位匹配（$\Delta\beta=0$）条件且相互作用距离 L 无穷大时，功率才会完全转移。该情况与同向耦合时的情况稍有不同，对于同向耦合，功率在两个耦合模之间来回转移，倘若 $\Delta\beta=0$ 时在空间会周期性发生完全功率转移。耦合效率与相位不匹配 $\Delta\beta$ 的函数关系如图 12.19 所示。除去 $\Delta\beta=0$ 处的主峰以外，耦合光谱还包含主峰两侧的一系列旁瓣。光谱范围内的主峰宽度为

$$-2|\kappa| < \Delta\beta < 2|\kappa| \qquad (12.4\text{-}56)$$

这也是光子带隙的宽度。旁瓣的峰值所处的位置大约在 $sL=i(p+1/2)\pi$，$p=1,2,3,\cdots$，与 $\Delta\beta = \pm 2\sqrt{\kappa^*\kappa + (p+1/2)^2(\pi/L)^2}$ 相对应。根据方程（12.4-55），这些旁瓣的峰值为

$$\eta = \frac{|\kappa L|^2}{\pi^2(p+1/2)^2 + |\kappa L|^2} \qquad (12.4\text{-}57)$$

当$|\kappa L| > \pi/2$时，这些旁瓣变得可估计。事实上，当$|\kappa L| = \pi/2$时，第一个旁瓣的峰值耦合效率达 10%，而主峰的耦合效率为 84%。零耦合效率发生于 $sL=iq\pi$（p=1,2,3,⋯），与$\Delta\beta = \pm 2\sqrt{\kappa^*\kappa + (q\pi/L)^2}$相对应。

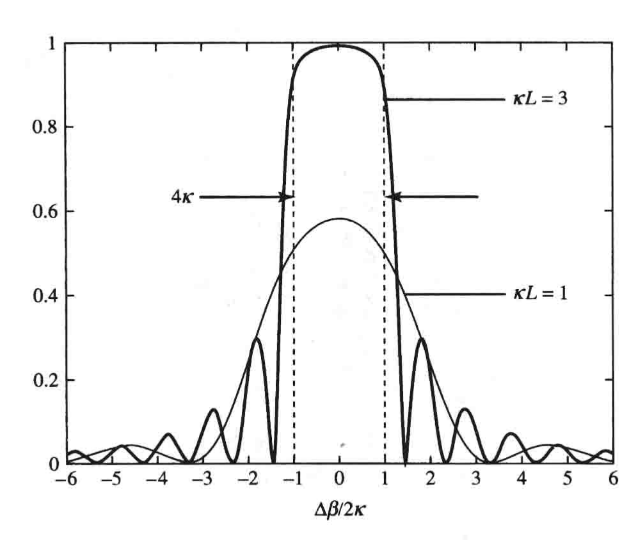


图 12.19　相向相互作用时，耦合效率是相位不匹配的函数

更一般的情形：初始时，两个模式同时存在（例如：$A_1(0) \neq 0$且$A_2(L) \neq 0$），解可以写成

$$A_1(z) = e^{i(\Delta\beta/2)z}\left(\frac{s\cosh s(L-z) + i(\Delta\beta/2)\sinh s(L-z)}{s\cosh sL + i(\Delta\beta/2)\sinh sL}A_1(0) + \frac{-i\kappa e^{i(\Delta\beta/2)L}\sinh sz}{s\cosh sL + i(\Delta\beta/2)\sinh sL}A_2(L)\right)$$

$$A_2(z) = e^{-i(\Delta\beta/2)z}\left(\frac{-i\kappa^*\sinh s(L-z)}{s\cosh sL + i(\Delta\beta/2)\sinh sL}A_1(0) + e^{i(\Delta\beta/2)L}\frac{s\cosh sz + i(\Delta\beta/2)\sinh sz}{s\cosh sL + i(\Delta\beta/2)\sinh sL}A_2(L)\right) \qquad (12.4\text{-}58)$$

这些方程对于研究光纤布拉格光栅的色散特性非常有用，尤其是对若干串联的分段光栅。

在光子带隙$-2|\kappa| < \Delta\beta < 2|\kappa|$内，$s$ 是一实数。波动方程的解是 z 的指数函数，即所谓的瞬逝波。倘若周期性媒质是半无限的，此时入射光束将被完全反射。在光谱区域$2|\kappa| < |\Delta\beta|$内，$s$ 是一纯虚数。波动方程的解是 z 的正弦函数。波在周期性媒质中传播。

例：体积折射率光栅的反向耦合。

如图 12.20 所示，我们讨论一体光栅的例子，其折射率为

$$n(z) = n_0 + n_1\cos(Kz) \qquad (12.4\text{-}59)$$

其中 n_0，n_1和 K 是常数。n_0是媒质的平均折射率，n_1可以看做正弦折射率调制的深度，K 与

折射率光栅的周期Λ有关

$$K=\frac{2\pi}{\Lambda} \tag{12.4-60}$$

这种体积折射率光栅的介电微扰为

$$\Delta\varepsilon(z)=\varepsilon_0\,\Delta n^2(z)=2\varepsilon_0 n_0 n_1\cos(Kz) \tag{12.4-61}$$

因为介电微扰和无微扰介电常数都是标量，TE 波（s 波）和 TM 波（p 波）之间的模式耦合不存在。因此，仅仅具有相同偏振态的波之间才存在耦合，而且这仅在相向耦合时有可能，因为同向耦合时无法满足相位匹配条件。

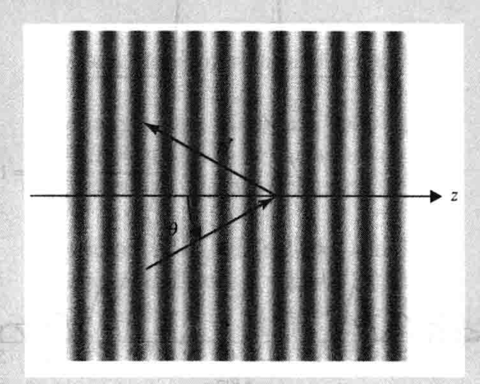


图 12.20　类似于布拉格反射器的体积指数光栅，其中有一离轴入射光束

TE 波间的模式耦合与 TM 波间的模式耦合是类似的。唯一的不同就是耦合常数式（12.4-27）。令θ为入射光束的波矢 $\boldsymbol{k}$ 与 z 轴的夹角，$\boldsymbol{k}'$是反射光束的波矢，如图 12.20 所示。根据方程式（12.4-27），耦合常数可以写成

$$\kappa=C^{(1)}=\frac{\omega^2\mu}{2\beta}\boldsymbol{p}'\cdot\varepsilon_1\boldsymbol{p}=\frac{\omega^2\mu\varepsilon_0 n_0}{2\beta}n_1\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{p}=\begin{cases}\dfrac{\omega^2\mu\varepsilon_0 n_0}{2\beta}n_1, & \text{TE}\\[2ex] \dfrac{\omega^2\mu\varepsilon_0 n_0}{2\beta}n_1\cos 2\theta, & \text{TM}\end{cases} \tag{12.4-62}$$

其中 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{p}'$ 是光束的偏振态，$\varepsilon_1=\varepsilon_0 n_0 n_1$ 是第一阶傅里叶展开系数，$\beta=k\cos\theta$ 是波矢 $\boldsymbol{k}$ 的 z 分量。注意：两个耦合常数之间的差别仅仅在于方向因子 $\cos2\theta$，它是发生耦合的 TM 波的电场矢量间夹角的余弦。根据方程（12.4-62），对于 TM 波，耦合常量在θ=45° 时为零。这对应于 TM 波在布儒斯特角时的零反射（注意：$n_1\ll n_0$ 时，布儒斯特角为 45°）。正入射（θ=0）时，耦合常量变为

$$\kappa=\frac{\omega}{2c}n_1=\frac{\pi}{\lambda}n_1 \tag{12.4-63}$$

相位不匹配因子$\Delta\beta$可以写成

$$\Delta\beta=2k\cos\theta-\frac{2\pi}{\Lambda}=2n_0\frac{2\pi}{\lambda}\cos\theta-\frac{2\pi}{\Lambda} \tag{12.4-64}$$

其中 k 是光束的波数，Λ是折射率光栅的周期。相位匹配发生于周期等于半波长度时（如$\Lambda=\lambda/2n_0$）。

根据方程（12.4-55），反射光谱为

$$\eta = \frac{|A_2(0)|^2}{|A_1(0)|^2} = \frac{|\kappa|^2 \sinh^2 sL}{s^2 \cosh^2 sL + (\Delta\beta/2)^2 \sinh^2 sL} \tag{12.4-65}$$

反射光谱与$\Delta\beta$的函数关系如图 12.19 所示。令ω_0为频率，处于该频率时，满足相位匹配条件（布拉格条件）。此时$\Delta\beta$可以写成

$$\Delta\beta = \frac{2n_0}{c}(\omega - \omega_0)\cos\theta \tag{12.4-66}$$

反射光谱由一个锐截止的主峰和一系列旁瓣构成。

主峰的带宽可近似表示为

$$\Delta\beta = 4|\kappa| \tag{12.4-67}$$

因为$\Delta\beta = \pm 2|\kappa|$时，参数 s 变为零，且波函数由指数变化转成按正弦变化。因此光谱范围$\Delta\beta = 4|\kappa|$常称为“禁带”或者光子带隙。光子带隙的尺寸用频率可表示为

$$\frac{\Delta\omega_{gap}}{\omega_0} = \frac{\Delta\lambda_{gap}}{\lambda_0} = \frac{\Delta\nu_{gap}}{\nu_0} = 2\left|\frac{n_1}{n_0}\right| \tag{12.4-68}$$

其中λ_0是主峰的中心波长，ν_0是其相应的频率，单位为 Hz。

为了说明类于布拉格反射器的体积折射率光栅的用途，我们考虑具有如下参数的体积折射率光栅：n_0=1.5，n_1=0.001，λ_0=1500nm。为了确保峰值反射发生在λ_0=1500nm 处，折射率光栅的周期必须满足$\Lambda = \lambda_0/2n_0 = 517$nm。

如果要求λ_0=1500nm 处的反射率达到 99%，那么根据方程（12.4-52），相互作用长度必须满足$\kappa L = 3.0$。因此相互作用长度为

$$L = \frac{3.0}{\kappa} = 3.0\frac{\lambda_0}{\pi n_1} = 1.5\text{nm}$$

根据式（12.4-68），反射峰的带宽为

$$\Delta\lambda_{gap} = 2\lambda_0\left|\frac{n_1}{n_2}\right| = 2.07\text{，或者等价地，}\Delta\nu_0 = 258\text{GHz}$$

12.5　周期性波导

根据图 12.21（a），我们讨论周期性介电波导，其周期性介电微扰是由于介电平面波导的波导层中折射率发生小的正弦变化引起的。通过将金属离子扩散至波导层（如 Ti 扩散至 LiNbO3）可以获得折射率变化。单模硅光纤纤芯中的折射率变化与之类似，可以通过 UV 曝光获得。周期性介电微扰也可以由波导层上的表面波纹产生，而表面波纹（或者表面浮雕）可通过光刻技术获得。这些周期性波导可用于光谱滤光片[1]，模变换器和分布反馈激光器[2~4]中。这些应用将会在下文中做进一步的介绍。

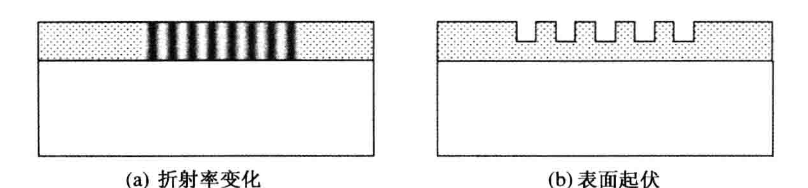


图 12.21　周期性介电波导的示意图。周期性介电微扰可以通过（a）改变波导层（或者包层）的折射率获得，或者（b）在波导层（或者包层）的表面蚀刻获得

利用微扰近似法，图 12.21 所示的周期性波导结构的介电常量可以写成

$$\varepsilon(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_a(\boldsymbol{r}) + \Delta\varepsilon(\boldsymbol{r}) \tag{12.5-1}$$

对于无微扰的波导结构，其介电常数$\varepsilon_a(\boldsymbol{r})$为

$$\varepsilon_a(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \varepsilon_0 n_1^2, & 0 < x \\ \varepsilon_0 n_2^2, & -t < x < 0 \\ \varepsilon_0 n_3^2, & x < -t \end{cases} \tag{12.5-2}$$

其中 n_1，n_2，n_3 是介电平面波导层的折射率指数（如第 3 章所讨论），t 是波导层的厚度，$\Delta\varepsilon(\boldsymbol{r})$ 是周期性介电微扰。对于图 12.21（a）所示的结构，周期性介电微扰可以写成

$$\Delta\varepsilon(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 0, & 0 < x \\ \varepsilon_0\ \Delta n_{20}^2 \cos(Kz), & -t < x < 0 \\ 0, & x < -t \end{cases} \tag{12.5-3}$$

其中 Δn_{20}^2 是常数，K 是与周期Λ有关的常数，$K=2\pi/\Lambda$。对于图 12.21（b）所示的结构，周期性介电微扰是由于周期性的表面波纹引起的，可以写成

$$\Delta\varepsilon(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 0, & 0 < x \\ \varepsilon_0(n_1^2 - n_2^2)S(z), & -a < x < 0 \\ 0, & x < -a \end{cases} \tag{12.5-4}$$

其中 a 是表面波纹的深度（见图 12.22），$S(z)$是方波周期函数，定义如下

$$S(z) = \begin{cases} 1, & 0 < z < \Lambda/2 \\ 0, & \Lambda/2 < z < \Lambda \end{cases}, \qquad S(z+\Lambda) = S(z) \tag{12.5-5}$$

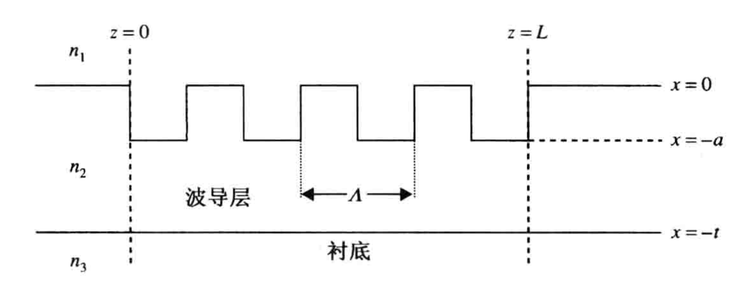


图 12.22　波纹周期性波导

对于图 12.21 所示的结构，$\Delta n^2(\boldsymbol{r})$是一标量，由方程（12.4-18）可知，折射率变化或波纹只会使 T 模 E 与 TE 模耦合、TM 模和 TM 模耦合，而不会使 TE 模与 TM 模耦合。对于多

模波导，TE 模的基模和高阶模之间会发生耦合。同样的，TM 模的基模和高阶模之间也会发生耦合。利用方程（12.4-18）可计算耦合常数，下面具体说明如何计算 TE 波的耦合常数。对于如图 12.21（a）所示的折射率光栅，介电微扰方程式（12.5-3）可以写成

$$\Delta\varepsilon(\boldsymbol{r})=\begin{cases}0, & 0<x\\ \varepsilon_0\ \Delta n_{20}^2\ \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Kz}+\mathrm{e}^{+\mathrm{i}Kz}), & -t<x<0\\ 0, & x<-t\end{cases} \tag{12.5-6}$$

可见：由正弦折射率光栅引起的周期性介电微扰，其中的傅里叶展开仅仅由基阶（$-K$ 和$+K$）构成，所有的高阶傅里叶成分（$m\neq1$）都等于 0。因此耦合常量为

$$C_{kn}^{(1)}=\frac{\omega}{4}\langle k|\varepsilon_1(x,y)|n\rangle=\frac{\omega}{4}\int \boldsymbol{E}_k^*\cdot\varepsilon_1(x,y)\boldsymbol{E}_n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\omega}{8}\varepsilon_0\ \Delta n_{20}^2\int_{-t}^{0}E_{ky}^*(x)E_{ny}(x)\,\mathrm{d}x \tag{12.5-7}$$

其中 $E_{ky}^*(x)$和 $E_{ny}(x)$分别是第 k 个和第 n 个 TE 模的波函数。耦合常量与折射率的调制深度成比例。

对于由表面波纹引起的周期性介电微扰，可将方波函数（12.5-4）展开成傅里叶级数，于是介电微扰可以写成

$$\Delta\varepsilon(\boldsymbol{r})=\begin{cases}0, & 0<x\\ \varepsilon_0(n_1^2-n_2^2)\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty}b_m\mathrm{e}^{-im(2\pi/\Lambda)z}, & -a<x<0\\ 0, & x<-a\end{cases} \tag{12.5-8}$$

其中 b_m 是傅里叶展开系数。对于方波表面波纹的情形，周期函数 $S(z)$的傅里叶展开可以写为

$$S(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}b_m\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m(2\pi/\Lambda)z}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\pi/2}\frac{\sin(m\pi/2)}{m\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m(2\pi/\Lambda)z} \tag{12.5-9}$$

因此

$$b_m=\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\pi/2}\frac{\sin(m\pi/2)}{m\pi} \tag{12.5-10}$$

或者等价地

$$b_m=\begin{cases}\frac{1}{2}, & m=0\\ 0, & m=\mathrm{even}\\ \dfrac{i}{m\pi}, & m=\mathrm{odd}\end{cases} \tag{12.5-11}$$

由周期性介电微扰的第 m 个成分引起的耦合常数可以写为

$$\kappa=C_{kn}^{(m)}=\frac{\omega}{4}\int \boldsymbol{E}_k^*(x)\cdot\varepsilon_m(x)\boldsymbol{E}_n(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\omega}{4}\varepsilon_0 b_m(n_1^2-n_2^2)\int_{-a}^{0}E_{ky}^*(x)\cdot E_{ny}(x)\,\mathrm{d}x \tag{12.5-12}$$

可见：耦合常数的大小是波纹深度 a（$a\ll t$）的递增函数。

图 12.23 给出了若干周期性介电波导的示意图，它们可以应用于布拉格反射器、滤波器和耦合器中。下面将讨论几个这类器件的应用。

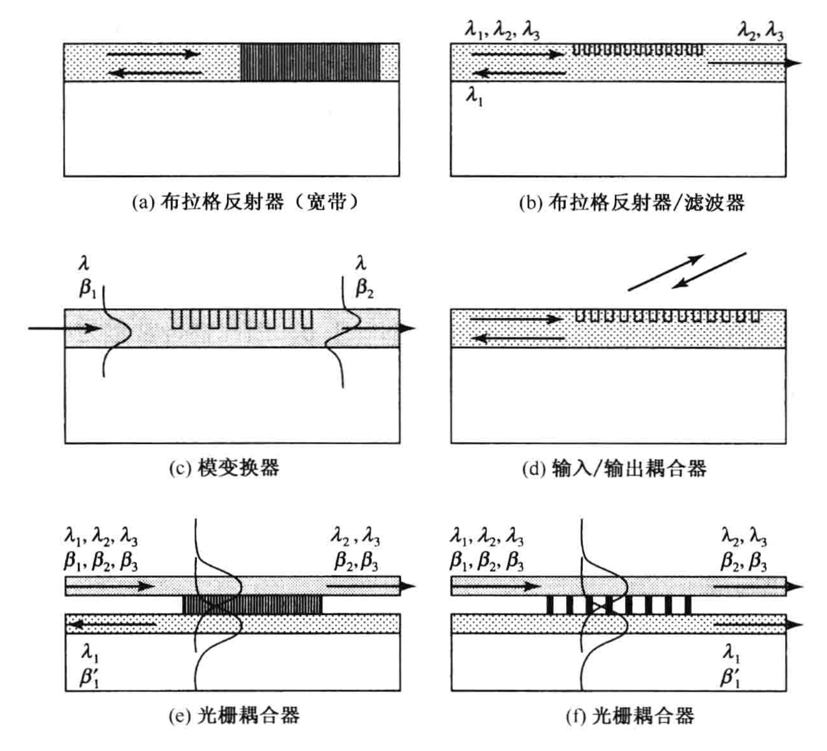


图 12.23　若干基于周期性介电微扰的光子器件示意图

布拉格反射器（宽带）

在宽带布拉格反射器的应用中，我们需要一个强的介电微扰，相向耦合它能提供大的耦合常数。介电微扰使得入射模式和反方向传播的相同模式之间发生耦合。在多模波导中，强的介电微扰会引起具有不同的空间波函数的模式之间发生耦合。换言之，它能引起模式 $E_k(x)\exp[i(\omega t-\beta_k z)]$ 和反向传播模式 $E_n(x)\exp[i(\omega t+\beta_n z)]$ 之间的耦合。在单模波导中上述情形变得相对简单。

我们首先讨论简单的情况——TE 模式在单模平板波导结构中传播。接着，讨论在光谱区域的何处，前向传播的 TE 模 $AE_0(x)\exp[i(\omega t-\beta z)]$ 仅仅和后向传播的模式 $BE_0(x)\exp[i(\omega t+\beta z)]$ 发生耦合，其中 A 和 B 是常数，$\boldsymbol{E}_0(x)$是 TE 模式的波函数。基于 12.4 节的讨论，高效的相向耦合仅发生在 $\beta-(-\beta)=2\beta=m2\pi/\Lambda$（对于某些整数 m）处。根据方程（12.4-46），由周期性介电微扰的第 m 阶傅里叶成分所引起的后向传播的模 $BE_0(x)\exp[i(\omega t+\beta z)]$ 和前向传播的模 $AE_0(x)\exp[i(\omega t-\beta z)]$ 之间的耦合可以写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A=-i\kappa B(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\beta z}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}B=i\kappa^{*}A(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta\beta z} \qquad (12.5\text{-}13)$$

对于周期性表面波纹的情形，根据方程式（12.5-12），式（12.5-13）中的耦合常数 $\boldsymbol{\kappa}$ 可以写成

$$\kappa = C_{00}^{(m)} = \frac{\omega}{4}\int \boldsymbol{E}_0^*(x)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_m(x)\boldsymbol{E}_0(x)\,\mathrm{d}x\ \frac{\omega}{4}\varepsilon_0 b_m\int_{-a}^{0}(n_1^2-n_2^2)|E_{0y}(x)|^2\mathrm{d}x \tag{12.5-14}$$

其中 $E_{0y}(x)$是 TE 波基模的波函数。耦合常数的大小是波纹深度的递增函数。

动量不匹配可以写成

$$\Delta\beta = \beta-(-\beta)-m\frac{2\pi}{\Lambda} = 2\beta - m\frac{2\pi}{\Lambda} \equiv 2(\beta-\beta_0) \tag{12.5-15}$$

其中$\beta_0=m\pi/\Lambda$。对于单模波导中 TE 波基模的情形，定义 n_{eff} 为模式的有效折射率

$$\beta = n_{\text{eff}}\frac{\omega}{c} = n_{\text{eff}}\frac{2\pi}{\lambda} \tag{12.5-16}$$

在相向耦合中的动量不匹配可以写成

$$\Delta\beta = 2\beta - m\frac{2\pi}{\Lambda} \equiv \frac{2n_{\text{eff}}}{c}(\omega-\omega_0) \tag{12.5-17}$$

其中ω_0是中心频率，处于该频率时满足布拉格条件。

按照 12.4 节所介绍的数学步骤，可以求出耦合方程的解析解。通解可以写成

$$\begin{aligned} A(z) &= C_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Delta\beta/2)z-sz} + C_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Delta\beta/2)z+sz} \\ B(z) &= \frac{i}{\kappa}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A(z) \end{aligned} \tag{12.5-18}$$

其中 C_1 和 C_2 是常数，参数 s 由式（12.5-19）给出

$$s = \sqrt{|\kappa|^2-\left(\frac{\Delta\beta}{2}\right)^2} = \sqrt{|\kappa|^2-[\beta(\omega)-\beta_0]^2} \tag{12.5-19}$$

根据方程（12.4-53），服从边界条件 $B(L)=0$ 的解可以写成

$$\begin{aligned} A(z) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Delta\beta/2)z}\,\frac{s\cosh s(L-z)+i(\Delta\beta/2)\sinh s(L-z)}{s\cosh sL + i(\Delta\beta/2)\sinh sL}A(0) \\ B(z) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Delta\beta/2)z}\,\frac{-i\kappa^*\sinh s(L-z)}{s\cosh sL + i(\Delta\beta/2)\sinh sL}A(0) \end{aligned} \tag{12.5-20}$$

反射率（或者衍射效率）为

$$R = \left|\frac{B(0)}{A(0)}\right|^2 = \frac{|\kappa|^2\sinh^2 sL}{s^2\cosh^2 sL + (\Delta\beta/2)^2\sinh^2 sL} \tag{12.5-21}$$

当$\Delta\beta=0$ 时，反射率最大，为

$$R_{\max} = \tanh^2|\kappa|L \tag{12.5-22}$$

由式（12.5-22）可知：反射率是$|\kappa|L$ 的递增函数。主峰的宽度可作如下估计。明显的相向耦合发生于$-2|\kappa|<\Delta\beta<2|\kappa|$ 这一光谱区域，该区域内参数 s 是实数，且通解式（12.5-18）为指数形式，预示了前向传播的模和后向传播的模之间强的能量变化。根据方程式（12.5-16）和式（12.5-17），该光谱区域等价于频率范围

$$-\frac{|\kappa|c}{n_{\text{eff}}} < \omega - m\frac{\pi c}{n_{\text{eff}}\Lambda} < \frac{|\kappa|c}{n_{\text{eff}}}\quad (m=1,2,3,\cdots) \tag{12.5-23}$$

峰值反射发生处的光子带隙宽度为

$$\Delta\omega_{\text{gap}} = 2\frac{|\kappa|c}{n_{\text{eff}}} \tag{12.5-24}$$

n_{eff}为模式的有效折射率。耦合常数依赖于傅里叶展开阶数 m。有效的宽带反射器必须具有高反射率。因为峰值反射由 $\tanh^2\kappa L$ 定义，根据方程（12.4-52），有效的宽带反射器必须满足 $\kappa L\gg 1$。进一步，反射器的有效带宽受到光子带隙 $\Delta\omega_{\text{gap}}$ 的限制。因此宽带反射器要求大的耦合常数 κ。

现在讨论通解与布洛赫波的类同之处。根据方程（12.5-18），相向耦合的通解可以写成

$$E(z) = [C_1 e^{i(\Delta\beta/2)z - sz} + C_2 e^{i(\Delta\beta/2)z + sz}]e^{-i\beta z} + [C_3 e^{-i(\Delta\beta/2)z - sz} + C_4 e^{-i(\Delta\beta/2)z + sz}]e^{+i\beta z} \tag{12.5-25}$$

式中 C_1，C_2，C_3，C_4 为常数，仅仅 C_1 和 C_2 是独立的。式（12.5-25）解可以写成

$$E(z) = B_1 e^{-i\beta' z} + B_2 e^{+i\beta' z} \tag{12.5-26}$$

式中 B_1，B_2 是常数，且

$$\beta' = \beta - \frac{\Delta\beta}{2} \pm is = m\frac{\pi}{\Lambda} \pm i\sqrt{|\kappa|^2 - \left(\frac{\Delta\beta}{2}\right)^2} = m\frac{\pi}{\Lambda} \pm i\sqrt{|\kappa|^2 - [\beta(\omega) - \beta_0]^2} \tag{12.5-27}$$

其中用到了$\Delta\beta\equiv 2(\beta-\beta_0)$，其中$\beta_0\equiv m\pi/\Lambda$。

对于某一频率范围，例如$|\Delta\beta(\omega)| < 2|\kappa|, \beta'$有一虚部。这就是所谓的光子带隙（或者“禁带”区域），这个区域内将出现图 12.18 所示的迅速衰减的特性。光子带隙类似于半导体中的能带，半导体中周期性晶体电势使电子传播常数变为复数。对每一个 m 的值，m=1,2,3,⋯，都相应地存在着一带隙，其中心频率ω_{0m}满足$\beta(\omega_{0m})=m\pi/\Lambda$，除非对于该 m 值来说 $\kappa=0$。在布拉格值（$m\pi/\Lambda$）附近，取 $\beta(\omega)$ 的近似表达式为 $\beta(\omega)\sim(\omega/c)n_{\text{eff}}$（$n_{\text{eff}}$为有效折射率）。根据方程（12.5-17），于是有

$$\beta' \cong m\frac{\pi}{\Lambda} \pm i\left[|\kappa|^2 - \left(\frac{n_{\text{eff}}}{c}\right)^2(\omega-\omega_0)^2\right]^{1/2} \tag{12.5-28}$$

其中ω_0 是中心频率，处于该频率时满足布拉格条件。换言之，ω_0 是 ω 的值，未受到微扰的 $\beta=\beta_0\equiv m\pi/\Lambda$。

根据方程式（12.5-28）画出的 $\text{Re}\,\beta'$ 和 $\text{Im}\,\beta'$（当 $m=1$ 时）与 ω 的关系曲线如图 12.24 所示。我们可以看到“禁区频率”的高度是

$$(\Delta\omega)_{\text{gap}} = \frac{2|\kappa|c}{n_{\text{eff}}} \tag{12.5-29}$$

式中 κ 是整数 m 的函数，如式（12.5-17）所示。由式（12.5-28）可知

$$(\text{Im}\beta')_{\max} = |\kappa| \tag{12.5-30}$$

这里利用耦合波分析，得到了复波数 β'，它确实是布洛赫波数。

众所周知，在固体物理中，我们用电子波函数来描述电子的行为，其形式为

$$\Psi_i = u_i(\boldsymbol{r})\exp\left(-i\frac{E_i t}{\hbar} + i\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}\right) \tag{12.5-31}$$

由式（12.5-28）类推可知，存在一些区域，这些区域的传播常数 $\boldsymbol{k}_i$ 为复数，且电子能量 E_i 独立于 $\boldsymbol{k}_i$ 的方向，即所谓的晶体的禁带能隙。最近的建议和实验表明[1,5]，有可能制成具

有二维或者三维周期结构的“光子晶体”，它具有光无法在其中传播的禁带（例如，若具有复传播常数，则产生式（12.5-28）的二维或三维的一般形式）。二维光子晶体将在 12.8 节讨论。

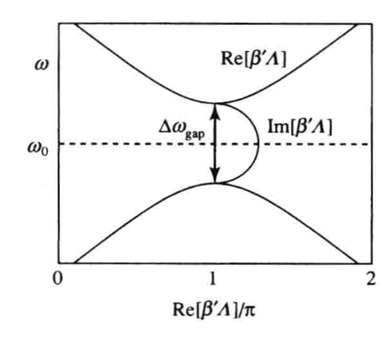


图 12.24　在周期性波导中，模式传播常数 β' 的实部和虚部的依赖关系。在频率 $|\omega-\omega_0|<\Delta\omega_{\text{gap}}/2$ 处，$\text{Im}(\beta')\neq 0$ 而且模式会消失，在这些频率时 $\text{Re}(\beta')=m\pi/\Lambda$（在图中 $m=1$）

布拉格反射器/滤波器

在光滤波器的应用中，常遇到要求光滤波器能提供窄的带宽的情况。在光通信领域，常常需要带宽仅若干吉赫兹窄的光滤波器。这些滤波器可用于阻挡不需要的辐射，仅让所需光谱区域内的辐射通过。要获得此类滤波器，就需要弱的周期性介电微扰和小的耦合常数。基于 12.4 节所讨论的体积折射率光栅的结果，高反射率的带宽为

$$\frac{\Delta\omega_{\text{gap}}}{\omega_0}=\frac{\Delta\lambda_{\text{gap}}}{\lambda_0}=\frac{\Delta\nu_{\text{gap}}}{\nu_0}=2\left|\frac{n_1}{n_0}\right| \tag{12.5-32}$$

例如：在λ=1550nm 处要获得 25GHz 的带宽就要求折射率调制为 $n_1/n_0\approx 6\times10^{-5}$。正如前文所述，窄带滤波器要求小的耦合常数 κ。对于高频滤波器，常常需要很长的相互作用距离才能满足 $\kappa L\gg 1$。根据方程（12.4-55），布拉格反射器的反射光谱为

$$R=\frac{|\kappa|^2\ \sinh^2 sL}{s^2\cosh^2 sL+(\Delta\beta/2)^2\ \sinh^2 sL} \tag{12.5-33}$$

如图 12.19 所示的反射光谱，在光子带隙的两侧均存在若干旁瓣。这些旁瓣是由于周期性结构边缘处阻抗失配引起的。光滤波器的应用中，这些旁瓣是不需要的。空间切趾法将消除从均匀区域到周期性区域的变化，可用于消除旁瓣。后面将会讨论该主题。

模转换器

为了说明如图 12.23（c）所示的模转换器的运行原理，我们考虑双模波导的情形。这种波导能支持两个约束模的传播。引入周期性的介电微扰后，能使这两个模式之间发生耦合。对同向和反向耦合的情形都可行，它们依赖于周期性介电微扰的周期。令这两个模式的传播常数分别为β_1和β_2。耦合的布拉格条件为

$$\Delta\beta=\begin{cases}\beta_1-\beta_2-m(2\pi/\Lambda)=0\ , & \text{同向耦合}\\ \beta_1+\beta_2-m(2\pi/\Lambda)=0\ , & \text{反向耦合}\end{cases} \tag{12.5-34}$$

其中 m 是整数。注意：相向耦合需要高频光栅（短周期光栅），同向耦合需要长周期光栅。

对于介电微扰为周期性表面波纹的情况，根据方程（12.5-12），TE 模的耦合常数为

$$\kappa = C_{12}^{(m)} = \frac{\omega}{4}\int \boldsymbol{E}_1^*(x)\cdot\varepsilon_m(x)\boldsymbol{E}_2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\omega}{4}\varepsilon_0 b_m(n_1^2-n_2^2)\int_{-a}^{0} E_{1y}^*(x)\cdot E_{2y}(x)\,\mathrm{d}x \quad (12.5\text{-}35)$$

式中 b_m 是表面波纹的傅里叶展开系数，a 是波纹深度。同向和相向耦合的耦合常数是相同的。

输入/输出耦合器

倘若满足布拉格条件，导模和辐射模之间的耦合是可能的。依赖于光栅的周期，存在若干可能性。为了说明这些，我们假设：单模介电平面波导的衬底折射率为 n_3，导波层的折射率是 n_2。令β_0 为导模的传播常数，而β为散射波（辐射波）的传播常数。有效的布拉格散射要求

$$\beta_0 - \beta - m(2\pi/\Lambda) = 0 \quad (12.5\text{-}36)$$

或者等价地

$$\beta = \beta_0 - m(2\pi/\Lambda) \quad (12.5\text{-}37)$$

对于某些整数 m。依赖于光栅周期Λ，散射波的传播常数在很大的范围内变化。传播常数β的大小取决于：散射波是将朝着空气（折射率为 n_1）还是朝着衬底（折射率为 n_3）发生辐射。表 12.1 列出了若干可能性，其中 n_{eff} 是导模的有效折射率。图 12.25 给出了两种前向输出耦合的动量图。根据方程（12.5-37），通常导模可以和很多辐射模发生耦合。令这些波的电场为

$$E(x,z,t) = \left\{A_0(z)E_0(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_0 z} + \sum_{\rho=1,2}\int[a_{\rho\beta}(z)E_{\rho\beta}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta z}]\mathrm{d}\beta\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \quad (12.5\text{-}38)$$

表 12.1　β与光栅周期的关系

	β	辐　射　模	光谱区域/光栅
I	$n_1k<\beta<n_3k$	前向衬底模	$(n_{\mathrm{eff}}-n_3)\omega<cK<(n_{\mathrm{eff}}-n_1)\omega$
II	$0<\beta<n_1k$	前向空气模（和衬底模）	$(n_{\mathrm{eff}}-n_1)\omega<cK<n_{\mathrm{eff}}\omega$
III	$\beta=0$	垂直空气模（和衬底模）	$n_{\mathrm{eff}}\omega=cK$
IV	$-n_1K<\beta<0$	后向空气模（和衬底模）	$n_{\mathrm{eff}}\omega<cK<(n_{\mathrm{eff}}+n_1)\omega$
V	$-n_3K<\beta<-n_1K$	后向衬底模	$(n_{\mathrm{eff}}+n_1)\omega<cK<(n_{\mathrm{eff}}+n_3)\omega$

式中 A_0 和 $a_{\rho\beta}$是常数，$\rho=1$ 代表空气辐射模，$\rho=2$ 代表衬底辐射模，$E_0(x)$是导模的波函数，$E_{\rho\beta}(x)$代表辐射模的波函数。令$\beta_0>0$；根据方程（12.4-17），此时耦合方程可以写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A_0 = -i\sum_{\rho=1,2}\int C_{0\rho\beta}^{(m)}a_{\rho\beta}(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta_0-\beta-m2\pi/\Lambda)z}\mathrm{d}\beta \quad (12.5\text{-}39)$$

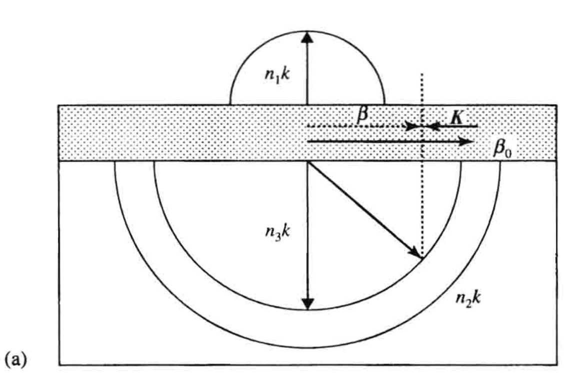
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}a_{\rho\beta} = -i\frac{\beta}{|\beta|}C_{0\rho\beta}^{(m)*}A_0(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\beta_0-\beta-m2\pi/\Lambda)z} \quad (12.5\text{-}40)$$

耦合系数 $C_{0\rho\beta}^{(m)}$ 可以写成

$$C_{0\rho\beta}^{(m)} = \frac{\omega}{4}\langle 0|\varepsilon_m(x, y)|\rho\beta\rangle = \frac{\omega}{4}\int \boldsymbol{E}_0^* \cdot \varepsilon_m(x, y)\boldsymbol{E}_{\rho\beta}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \tag{12.5-41}$$

耦合方程可以求解如下。对于弱的介电微扰，在对方程（12.5-40）积分时，我们假设导模的振幅 $A_0(z)$ 是常数。推出

$$a_{\rho\beta}(z) = \begin{cases} -iA_0(z)C_{0\rho\beta}^{(m)*}\dfrac{\sin(\Delta\beta/2)z}{\Delta\beta/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Delta\beta/2)z}, & 0<\beta \\ +iA_0(z)C_{0\rho\beta}^{(m)*}\dfrac{\sin(\Delta\beta/2)(z-L)}{\Delta\beta/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Delta\beta/2)(z+L)}, & \beta<0 \end{cases} \tag{12.5-42}$$



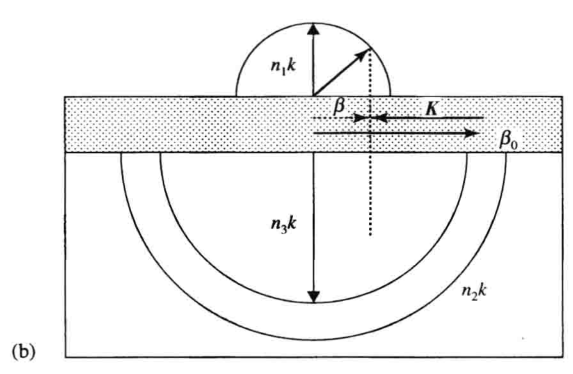


图 12.25　两种前向输出耦合模的动量图。(a) 前向辐射进入衬底模 (b) 前向辐射进入空气模

式中 L 是相互作用长度，$\Delta\beta=\beta_0-\beta-2m\pi/\Lambda$。将方程（12.5-42）代入方程（12.5-39）中，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A_0 = -A_0(z)\left|C_{0\rho\beta}^{(m)}\right|^2\int_{\beta>0}\frac{\sin(\Delta\beta/2)z}{\Delta\beta/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Delta\beta/2)z}\mathrm{d}\beta + A_0(z)\left|C_{0\rho\beta}^{(m)}\right|^2\int_{\beta<0}\frac{\sin(\Delta\beta/2)(z-L)}{\Delta\beta/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Delta\beta/2)(z-L)}\mathrm{d}\beta$$

为了获得上式方程，我们假设耦合常数是 β 的缓变函数，而耦合主要发生在满足布拉格条件（$\Delta\beta=0$）的模之间。对前向辐射模 $\beta>0$ 的情形，第一个积分等于 π，第二个积分等于零（见习题 12.13）。对后向辐射模 $\beta<0$ 的情形，第一个积分等于零，第二个积分等于 $-\pi$。因此得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A_0 = -A_0(z)\pi|C_{0\rho\beta}^{(m)}|^2, \qquad \beta=\beta_0-m(2\pi/\Lambda) \tag{12.5-43}$$

对于一给定的整数 m，式（12.5-43）对前向和后向辐射模的情形都是正确的。如果考虑介电微扰的所有阶傅里叶成分的贡献，$A_0(z)$ 方程可以写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A_0=-A_0(z)\sum_{\rho=1,2}\sum_m \pi|C_{0\rho\beta}^{(m)}|^2=-\alpha A_0(z),\qquad \beta=\beta_0-m(2\pi/\Lambda) \tag{12.5-44}$$

其中

$$\alpha=\sum_{\rho=1,2}\sum_m \pi|C_{0\rho\beta}^{(m)}|^2=\pi\sum_{\rho=1,2}\sum_m\left|\frac{\omega}{4}\int \boldsymbol{E}_0^*\cdot\varepsilon_m(x,y)\boldsymbol{E}_{\rho\beta}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|^2 \tag{12.5-45}$$

是导模的辐射衰减常数，$\beta=\beta_0-m(2\pi/\Lambda)$。式（12.5-45）可以用于计算辐射衰减常数。对于图 12.22 所示的方波表面波纹的情形，TE 波基模的辐射常数可以写成

$$\alpha=\sum_{\rho=1,2}\sum_m\left|\frac{\omega}{4}\varepsilon_0 b_m(n_1^2-n_2^2)\int_{-a}^{0}E_{0y}^*(x)\cdot E_{\rho\beta y}(x)\,\mathrm{d}x\right|^2 \tag{12.5-46}$$

代入模式的波函数，辐射衰减常数可进一步计算。

12.6　滤波器和光纤布拉格光栅

空间周期性光波导最有趣、最重要的应用之一是用做光反射器[1]，滤波器和色散补偿器。这些应用对制造高效折射率光栅起到推导作用，高效折射率光栅是在空间掺杂（和处理）的石英光纤中利用紫外线对驻波图进行曝光而获得的[2~4,6,7]。图 12.26 给出了光纤中折射率光栅的写入过程的示意图。

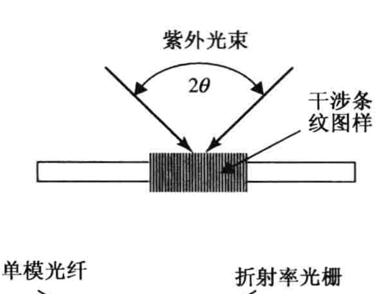


图 12.26　利用 UV 束的干涉驻波图照射石英光纤，用化学方法在光纤中引入“永久的”周期性折射率微扰。周期为 $\Lambda=\lambda/(2\sin\theta)$，$\theta$ 是干涉光束间的半角，λ 是光束的波长。掺杂三氯化磷和分子载氢的光纤增加了光纤对紫外辐射的灵敏度

经过 UV 曝光后，石英光纤中的折射率微扰可以写成

$$\Delta n(x,y,z)=\Delta n_0\sin\frac{2\pi}{\Lambda}z \tag{12.6-1}$$

$$\Lambda=\frac{\lambda}{2\sin\theta} \tag{12.6-2}$$

式中Δn_0是常数，θ是两束入射光束的入射角，λ是光束的波长。实际系统中采用受激准分子激光器（$\lambda=0.248\mu m$）或者双氩激光器（$\lambda=0.244\mu m$）作为辐射源。周期性波导最基本的特性是：在布拉格频率ω_0附近的频率处，入射模被强烈反射，如图 12.19 反射光谱所示。当频率位于$\omega_0=0$ 处的光子带隙以外时，光束以最小的损耗透射，而这些损耗是由于旁瓣反射和

辐射模的耦合引起的。根据方程（12.5-20），长度为 L 的周期性波导的反射系数振幅为

$$r(\omega)=\frac{B(0)}{A(0)}=\frac{-i\kappa^*\sinh sL}{s\cosh sL+i(\Delta\beta/2)\sinh sL}\tag{12.6-3}$$

式中

$$\Delta\beta=\beta-(-\beta)-m\frac{2\pi}{\Lambda}=2\beta-m\frac{2\pi}{\Lambda}\equiv\frac{2n_{\text{eff}}}{c}(\omega-\omega_0)\tag{12.6-4}$$

$$s=\sqrt{|\kappa|^2-\left(\frac{\Delta\beta}{2}\right)^2}=\sqrt{|\kappa|^2-\left[\frac{n_{\text{eff}}}{c}(\omega-\omega_0)\right]^2}\tag{12.6-5}$$

式中 n_{eff} 是在光纤中传播的导模的有效折射率。

现在讨论光纤布拉格光栅（FBG）的光学特性。无损耗时，假设耦合常数 κ 是实数且为正。倘若选择恰当的始点 $z=0$，这种假设是合理的。反射系数 r 的振幅通常为一复数。定义反射的相移 ϕ 为

$$r=|r|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}=\sqrt{R}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\tag{12.6-6}$$

式中 R 是反射强度。利用方程式（12.6-3）和式（12.6-6），得到

$$R(\omega)=\left|\frac{B(0)}{A(0)}\right|^2=\frac{\kappa^2\sinh^2 sL}{s^2\cosh^2 sL+(\Delta\beta/2)^2\sinh^2 sL}\tag{12.6-7}$$

和

$$\phi=\frac{\pi}{2}+\arctan\left(\frac{\Delta\beta}{2s}\tanh sL\right)\tag{12.6-8}$$

相移的解析表达式（12.6-8）所产生的结果在 0 到 π 范围内，这是反正切函数的主值。通常，复反射系数的相移可以为 0 到 2π 范围内的任一值。三角函数的多值特性并不会产生问题，因为大多数物理可测参数都依赖于相移的导数（例如：群时延等于相移的频率导数）。

注意到：光子带隙的中心 $\Delta\beta=0$ 处反射率最大。假设 κ 是实数，那么 $\Delta\beta=0$ 时的相移为 $\pi/2$。耦合常数通常是复数，它依赖于始点的选择。反射率 $|r(\omega)|^2$ 与 $\Delta\beta$（它与频率离差 $(\omega-\omega_0/2\pi)$ 成比例）之间的关系如图 12.27 所示，我们可以看到，确实能获得非常高的反射率，其中竖线代表了光子带隙的边缘。图中也给出了布拉格反射的相移。实际应用中，相互作用长度在 1mm 左右时，光子带隙内的反射率在 1 附近。然而相移强烈地依赖于频率离差。注意到：在光子带隙附近，两个最小反射率（零）之间的相移在 $-\pi=0/2$ 到 $3\pi/2$ 之间变化。在光子带隙外，任意相邻的一对最小反射率之间的相移变化大概在 π 范围。同时，在某些频率处（这些频率处反射率为零），相移也是不连续的。π 的不连续事实上并不是问题，因为零场振幅的相移在这些频率处没有定义。布拉格反射器的相位信息在某些应用——比如垂直腔激光器，这将在第 16 章中讨论，以及计算入射光脉冲的滤波效应时都很重要。

根据方程（12.6-8），求相移对角频率的微分，我们得到有效的群时延

$$\tau=\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\omega}=\frac{\kappa^2\dfrac{\sinh sL}{sL}\cosh sL-\left(\dfrac{\Delta\beta}{2}\right)^2}{\kappa^2\cosh^2 sL-\left(\dfrac{\Delta\beta}{2}\right)^2}\tau_0\tag{12.6-9}$$

式中 $\tau_0=\mathrm{d}(\beta L)/\mathrm{d}\omega$ 是光束穿过无周期性折射率变化媒质（长为 L）时的群时延。τ 是光束传

播的时延，是由光束穿过周期性媒质和在相同的媒质中发生反射所引起的。在光子带隙的中心（$\Delta\beta$=0），群时延最小

$$\tau_{\min} = \frac{\tanh \kappa L}{\kappa L}\tau_0 \tag{12.6-10}$$

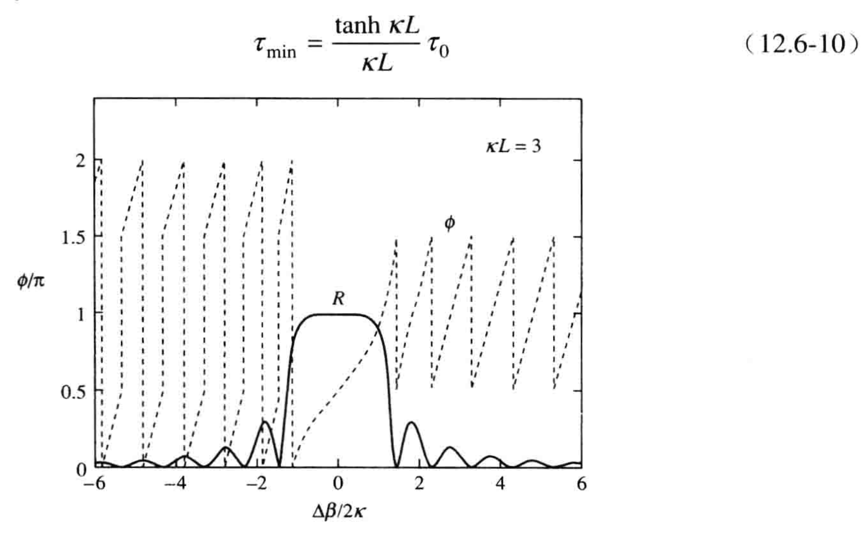


图 12.27　周期性波导（$\kappa L = 3$）的反射光谱和相移。实线代表反射率 R 和$\Delta\beta$的函数关系，虚线代表相移ϕ。位于 $\Delta\beta = \pm 2\kappa$ 的垂直线之间的区域为光子带隙

光子带隙中心处的最小群时延由光束的最小穿透构成的，在周期性媒质中它是按照指数衰减的。随着光频率从光子带隙的中心失调，指数衰减常数减小，光束进一步穿透进周期性媒质。这就构成了群时延的增加。根据方程（12.6-10），在光子带隙中心处的群时延是 κL 的递减函数。当 κL 增加时，穿透深度减小。这个有效的群时延在带隙边缘处达到τ_0，此时 s=0。

图 12.28 给出了归一化的有效群时延和强度反射比与归一化频率 $\Delta\beta/(2\kappa)$ 的函数关系。由图 12.28 可知，在禁带（$-2\kappa < \Delta\beta < 2\kappa$）内，反射强度很高，反映了光子带隙（也可称为禁带）的特性。光子带隙内的有效群时延比τ_0小。在光子带隙外，归一化的有效群时延在 1 周围摆动。在直接相邻的光子带隙边缘，$sL = i\pi$，反射强度为零，有效群时延为

$$\tau = \frac{\kappa^2 L^2 + \pi^2}{\pi^2}\tau_0 = \left(1 + \frac{\kappa^2 L^2}{\pi^2}\right)\tau_0 \tag{12.6-11}$$

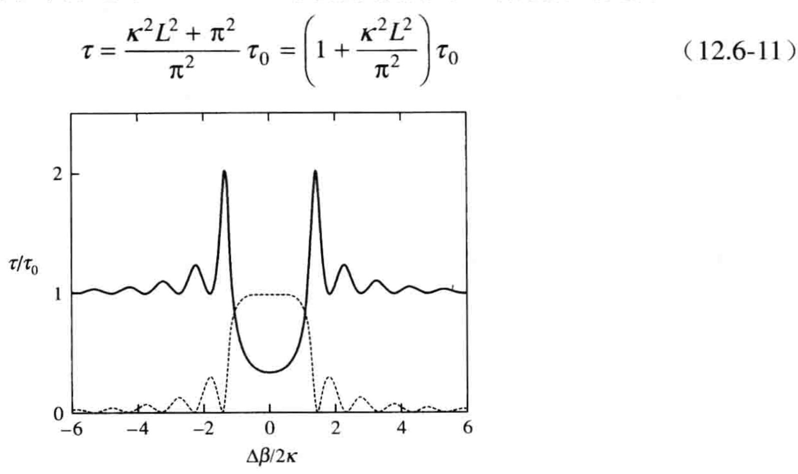


图 12.28　归一化的有效群时延τ/τ_0以及有限段周期性媒质的反射率 R 与$\Delta\beta/2\kappa$ 的函数关系。在本图中假设 $\kappa L = 3$。光子带隙处在$-2\kappa < \Delta\beta < 2\kappa$之间。虚线代表反射强度

当 κL 很大时，式（12.6-11）的值也很大。有效群时延的振荡特性是干涉的结果，而干涉是由周期性媒质两个边缘处的反射波引起的。有效群时延具有强的色散。换言之，在光子带隙外，有效群时延是频率离差的快变函数，尤其是对于具有大 κL 的周期性媒质。群时延中强的振荡是由于在周期性媒质边缘处阻抗不匹配引起的，它引起了反射。

例：耦合系数。

为说明 $\Delta n \leqslant 10^{-3}$（周期性折射率光纤可以实现 $\Delta n \leqslant 10^{-3}$，对该光纤进行紫外线曝光能得到折射率微扰）的重要性，我们将计算由折射率微扰引起的耦合系数 κ

$$n(x,y,z) = n_0 + n_1 \sin\frac{2\pi}{\Lambda}z$$

式中 n_0 是光纤的平均折射率，n_1 是折射率调制的深度。根据方程（12.4-63），耦合常数为

$$\kappa = \frac{\omega}{2c}n_1 = \frac{\pi}{\lambda}n_1$$

如果在光纤中（其 $n_1 = 10^{-3}$）滤波器工作于光通信波长 λ=1.55μm，那么 $\kappa = (10^{-3})/(1.55\times10^{-4}) = 6.5\text{cm}^{-1}$。周期性折射率光纤的长度为 6mm，因此引起的反射为

$$|r(\omega)|^2 = |\tanh(\kappa L)|^2 = 0.998$$

根据方程（12.4-68），光子带隙的带宽为

$$\Delta\lambda_{\text{gap}} = 2\left|\frac{n_1}{n_0}\right|\lambda_0 = 2.07\text{nm}$$

分布反馈激光器

如果周期性媒质中位于布拉格频率 ω_0（该频率处：$m\pi/\Lambda \approx \beta$）附近的频率能够获得充足的增益，那么无需端面反射镜也能产生振荡。利用周期性介电微扰的连续相干背散射，可获得传统的法布里－珀罗型激光器的镜面反馈。下面的讨论中，我们将考虑两种普通的情形：（1）增益媒质的整体特性是周期性扰动（如折射率变化）[2]和（2）波导激光器的边界是周期性扰动（如表面波纹）[3]。从这两个例子将会推出相同的耦合方程组。令 g 是媒质中光波的光强增益，耦合模可以分别写成：$A(z)\exp(-i\beta z + gz/2)$ 和 $B(z)\exp(+i\beta z - gz/2)$。如果我们定义复传播常数为

$$\beta' = \beta - ig/2 \tag{12.6-12}$$

有效的布拉格不匹配

$$\Delta\beta' = 2\beta - m\frac{2\pi}{\Lambda} = \Delta\beta + ig \tag{12.6-13}$$

耦合方程恒等于我们在前面无源情况时所推导的。因此前面得到的反射系数仍然是正确的。换言之，可将反射系数写成

$$r(\omega) = \frac{B(0)}{A(0)} = \frac{-i\kappa^* \sinh s'L}{s'\cosh s'L + i(\Delta\beta'/2)\sinh s'L} \tag{12.6-14}$$

式中

$$s' = \sqrt{|\kappa|^2 - \left(\frac{\Delta\beta + ig}{2}\right)^2} \tag{12.6-15}$$

由方程（12.6-14）可知，反射率可以远大于 1。而且当分母为零时，反射率达到无穷。这是没有任何输入（零输入）、有限输出时振荡的情况。图 12.29 给出了布拉格反射器的反射谱与增益的关系曲线。对于图中的例子，增益系数 gL=1.25，耦合常数 $\kappa L = 3$，可以推出光子带隙外的振荡（光子带隙边缘附近）。

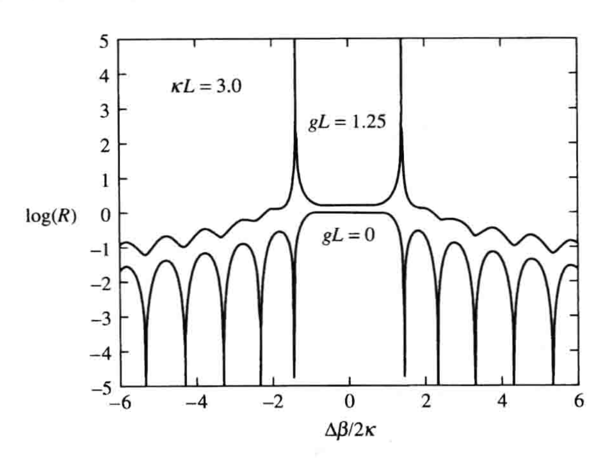


图 12.29　gL＝0 和 gL＝1.25 的布拉格反射器的反射光谱。垂直线代表光子带隙边缘的位置

在光子带隙的中心处，反射系数可写成

$$r(\omega) = \frac{B(0)}{A(0)} = \frac{-i\kappa^* \sinh s_0 L}{s_0 \cosh s_0 L - (g/2) \sinh s_0 L} \tag{12.6-16}$$

式中

$$s_0 = \sqrt{|\kappa|^2 + (g/2)^2} \tag{12.6-17}$$

注意到方程（12.6-16）的分母总为正，因此，不考虑增益，光子带隙的中心处永远不会发生振荡。内建单片光栅的半导体激光器，即分布反馈激光器（DFB 激光器），将在 16 章讨论。

12.7　啁啾折射率光栅和锥形折射率光栅

在 12.6 节，我们讨论了介电常数是位置的周期函数的折射率光栅的光学特性。本节中我们将讨论一个更加一般的折射率光栅的例子，该光栅的折射率调制振幅和周期均随位置发生变化。例如，考虑折射率光栅为

$$n(z) = n_0 + n_1(z) \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda(z)} z\right) \tag{12.7-1}$$

其中折射率调制振幅 $n_1(z)$是位置 z 的函数，周期$\Lambda(z)$也是位置 z 的函数。在啁啾折射率光栅的情况下，光栅周期$\Lambda(z)$是位置的增（或者减）函数。在锥形折射率光栅的情况下，折射率调制振幅 $n_1(z)$是位置的光滑函数。图 12.30 给出了这些折射率光栅的若干例子的示意图。

本章前面推出的耦合方程可用于求反射系数。将耦合方程重新写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A = -i\kappa(z)B\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\beta z}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}B = i\kappa^*(z)A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta\beta z} \tag{12.7-2}$$

耦合常数 $\kappa(z)$ 与 n_1 有关，是 z 的函数；波数不匹配（或者动量不匹配）$\Delta\beta$ 也是 z 的函数，定义为

$$\Delta\beta = 2\beta - \frac{2\pi}{\Lambda(z)} \tag{12.7-3}$$

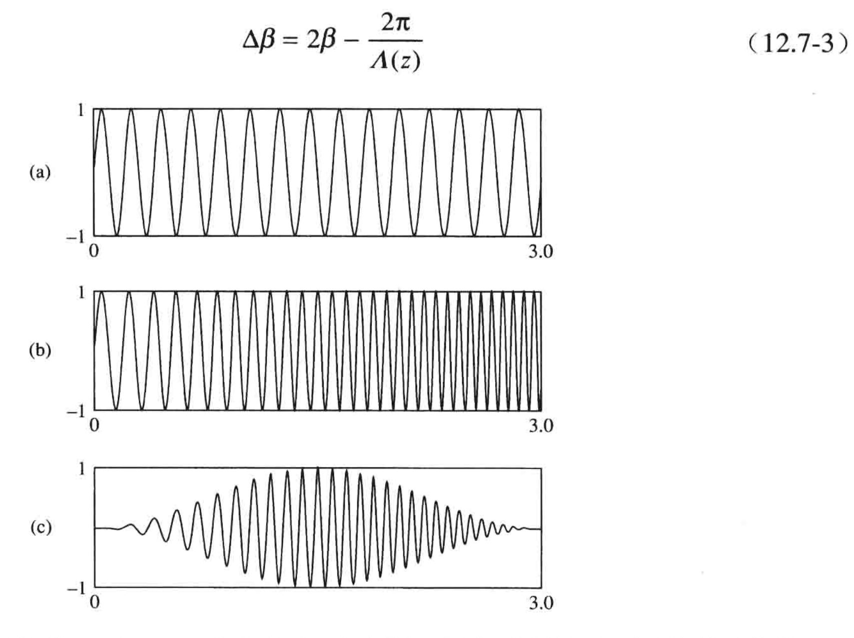


图 12.30 若干折射率光栅的示意图：（a）简单的折射率光栅，其周期和折射率调制振幅均为常数；（b）啁啾折射率光栅，其折射率调制振幅为常数；（c）啁啾折射率光栅，其折射率调制振幅是锥形的

我们仅仅考虑基本傅里叶成分（m=1），且周期 Λ 是 z 的函数。满足边界条件 $B(L)$=0，对耦合方程从 z=L 到 z=0 进行积分，可以从数学上求出场振幅 A 和 B。场振幅求出后，可以利用 r=$B(0)/A(0)$ 求出反射系数。

除去对耦合微分方程进行数学积分外，反射系数 r 也可以通过矩阵方法求得。在啁啾或者锥形光栅中，耦合常数 κ 和光栅周期 Λ 均为 z 的函数。如果我们将啁啾或者锥形光栅细分成很多段，那么就能将每一段视为一简单折射率光栅。在此情形下，前面几节求得的结果都能用于每一小段。

对于简单折射率光栅（n_1 和 Λ 都是常数），其耦合方程的通解为

$$A(z) = \left[\left(\cosh sz - i\frac{\Delta\beta}{2s}\sinh sz\right)A(0) - i\frac{\kappa}{s}\sinh szB(0)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Delta\beta/2)z}$$
$$B(z) = \left[i\frac{\kappa^*}{s}\sinh szA(0) + \left(\cosh sz + i\frac{\Delta\beta}{2s}\sinh sz\right)B(0)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Delta\beta/2)z} \tag{12.7-4}$$

其中 $A(0)$ 和 $B(0)$ 是在 z=0 处的任意场振幅。定义光波的实电场为

$$a(z) = A(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta z}$$
$$b(z) = B(z)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\beta z} \tag{12.7-5}$$

通解可以写成

$$a(z)=\left[\left(\cosh sz-i\frac{\Delta\beta}{2s}\sinh sz\right)a(0)-\left(i\frac{\kappa}{s}\sinh sz\right)b(0)\right]e^{-iKz/2}$$
$$b(z)=\left[\left(i\frac{\kappa^*}{s}\sinh sz\right)a(0)+\left(\cosh sz+i\frac{\Delta\beta}{2s}\sinh sz\right)b(0)\right]e^{+iKz/2} \tag{12.7-6}$$

或者，等价地写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}a(z)\exp(+iKz/2)\\ b(z)\exp(-iKz/2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cosh sz-i\dfrac{\Delta\beta}{2s}\sinh sz & -i\dfrac{\kappa}{s}\sinh sz\\ i\dfrac{\kappa^*}{s}\sinh sz & \cosh sz+i\dfrac{\Delta\beta}{2s}\sinh sz\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a(0)\\ b(0)\end{bmatrix} \tag{12.7-7}$$

其中 $K=2\pi/\Lambda$，$a(0)$和 $b(0)$是 $z=0$ 处的场振幅。可以看出该矩阵不是单模矩阵。对上述矩阵进行转换，得

$$\begin{bmatrix}a_0\\ b_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cosh sz+i\dfrac{\Delta\beta}{2s}\sinh sz & i\dfrac{\kappa}{s}\sinh sz\\ -i\dfrac{\kappa^*}{s}\sinh sz & \cosh sz-i\dfrac{\Delta\beta}{2s}\sinh sz\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a(z)\exp(+iKz/2)\\ b(z)\exp(-iKz/2)\end{bmatrix} \tag{12.7-8}$$

处理一般的啁啾或者锥形折射率光栅，可以把光栅分割成很多段。如图 12.31 所示，将啁啾光栅分割成 N 段光栅。N 足够大时，可以把每一段都作为一个简单的均匀折射率光栅来处理。将第 m 段的场振幅用列矢量表示

$$\begin{bmatrix}a_m\\ b_m\end{bmatrix} \tag{12.7-9}$$

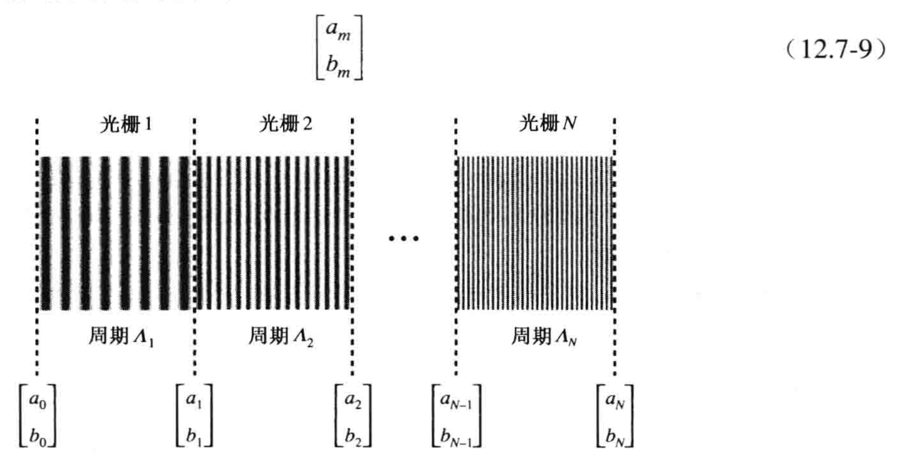


图 12.31　将一般的啁啾和锥形折射率光栅分割成 N 段的示意图。其中每段都可视为一简单折射率光栅

对于无损耗情形，我们可以选择合适的段，使得每段内都包含整数个光栅周期。在本例中（$z=M\Lambda$，M=整数），忽略指数因子 exp（iKz）和 exp（$-iKz$）。第一段的矩阵关系可以写为

$$\begin{bmatrix}a_0\\ b_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cosh s_1\ell_1+i\dfrac{\Delta\beta_1}{2s_1}\sinh s_1\ell_1 & i\dfrac{\kappa_1}{s_1}\sinh s_1\ell_1\\ -i\dfrac{\kappa_1^*}{s_1}\sinh s_1\ell_1 & \cosh s_1\ell_1-i\dfrac{\Delta\beta_1}{2s_1}\sinh s_1\ell_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ b_1\end{bmatrix} \tag{12.7-10}$$

l_1 是第一段的长度，且

$$s_1 = \sqrt{|\kappa_1|^2 - (\Delta\beta_1/2)^2} \tag{12.7-11}$$

$$\Delta\beta_1 = 2\beta - \frac{2\pi}{\Lambda_1} \tag{12.7-12}$$

对于第一段，我们定义一矩阵

$$M_1 = M(s_1, \Delta\beta_1, \ell_1) = \begin{bmatrix} \cosh s_1\ell_1 + i\dfrac{\Delta\beta_1}{2s_1}\sinh s_1\ell_1 & i\dfrac{\kappa_1}{s_1}\sinh s_1\ell_1 \\ -i\dfrac{\kappa_1^*}{s_1}\sinh s_1\ell_1 & \cosh s_1\ell_1 - i\dfrac{\Delta\beta_1}{2s_1}\sinh s_1\ell_1 \end{bmatrix} \tag{12.7-13}$$

于是矩阵关系可以写成

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = M_1 \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \tag{12.7-14}$$

矩阵 M_1 不是单模矩阵，如果两段具有相同的周期Λ和耦合常数 κ，可以证明

$$M(s, \Delta\beta, \ell_1 + \ell_2) = M(s, \Delta\beta, \ell_1)M(s, \Delta\beta, \ell_2) \tag{12.7-15}$$

现在将每段的矩阵关系结合起来，得

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = M_1M_2M_3\cdots M_N\begin{bmatrix} a_N \\ b_N \end{bmatrix} = M\begin{bmatrix} a_N \\ b_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_N \\ b_N \end{bmatrix} \tag{12.7-16}$$

M_m 代表第 m 段的矩阵

$$M_m = M(s_m, \Delta\beta_m, \ell_m) = \begin{bmatrix} \cosh s_m\ell_m + i\dfrac{\Delta\beta_m}{2s_m}\sinh s_m\ell_m & i\dfrac{\kappa_m}{s_m}\sinh s_m\ell_m \\ -i\dfrac{\kappa_m^*}{s_m}\sinh s_m\ell_m & \cosh s_m\ell_m - i\dfrac{\Delta\beta_m}{2s_m}\sinh s_m\ell_m \end{bmatrix} \tag{12.7-17}$$

式中 ℓ_m 是第 m 段的长度，$\Delta\beta_m = 2\beta - 2\pi/\Lambda_m, \kappa_m$ 是第 m 段的耦合常数，$s_m = \sqrt{|\kappa_m|^2 - (\Delta\beta_m/2)^2}$，$M_{11}$，$M_{12}$，$M_{21}$ 和 M_{22} 是矩阵 M 的矩阵元。

用矩阵元表示，布拉格反射系数可以写成

$$r = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)_{b_N=0} = \frac{M_{21}}{M_{11}} \tag{12.7-18}$$

现在我们开始研究锥形和啁啾折射率光栅的光学特性。尤其，将讨论抑制简单的布拉格反射滤波器的反射光谱中旁瓣的可能性，以及在群时延谱中抑制尖峰和波纹。

平顶滤波器

正如本章所讨论的，折射率光栅的色散关系表明存在光子带隙，其中传播波数为复数。光子带隙具有独特的性能，可用做激光腔内高反射的反射镜。尽管单一周期媒质，比如简单折射率光栅或者四分之一波片堆均可用做窄带滤波器，但由于存在太多的旁瓣，使得这些滤波器对大多数应用——包括密集波分复用（DWDM）光网络，毫无价值。众所周知，用半波层隔开的多个四分之一波片堆可用做窄带滤波器，它存在平顶通带。然而，这些滤波器中存在强的波纹。

众所周知，啁啾和拉锥均可以消除布拉格反射器的旁瓣。下面，我们介绍一个拉锥的例子，它可用于消除旁瓣，从而获得很多应用，包括 DWDM 光网络，都需要的平顶通带。从制作的观点出发，经由全息干涉可相对比较方便地获得平顶折射率光栅。我们讨论具有如下形式的平顶折射率光栅

$$n(x) = n_0 + n_1 \sin^2 \frac{\pi x}{L} \cos(Kx) \tag{12.7-19}$$

其中 n_0 是背景材料的折射率，n_1 是折射率调制振幅，K 是光栅波数，L 是折射率光栅的相互作用长度。图 12.32 和图 12.33 分别给出了两个耦合长度不同的平顶折射率光栅的示意图。从图上可知，旁瓣可以降至低于 50dB，或者 75dB。

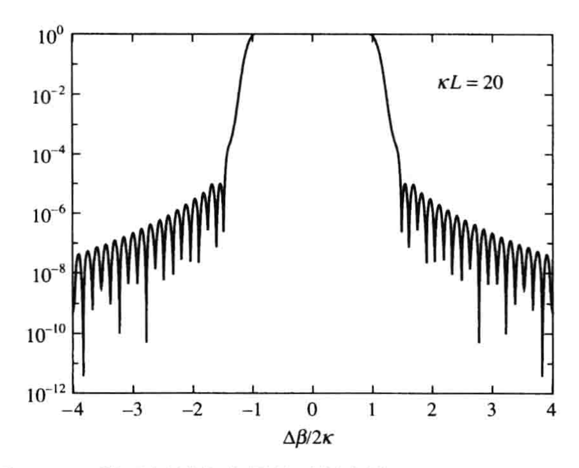


图 12.32　锥形折射率光栅的反射光谱，$\kappa L = \pi n_1 L/\lambda = 20$

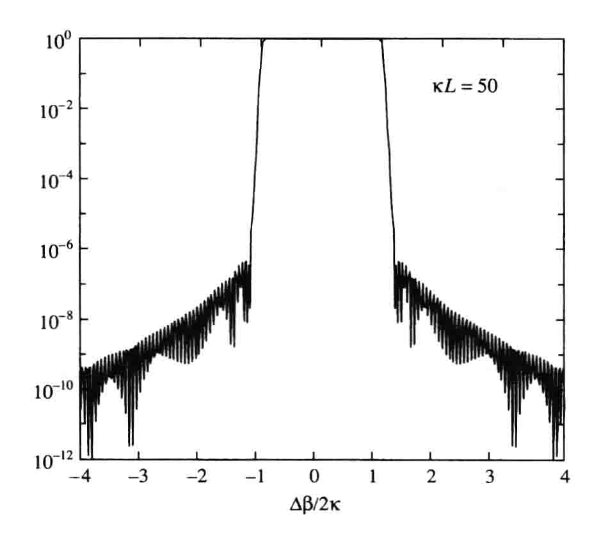


图 12.33　锥形折射率光栅的反射光谱，$\kappa L = \pi n_1 L/\lambda = 50$

用于色散补偿的啁啾光纤布拉格光栅

正如本章前面所讨论的，简单折射率光栅是色散光学元件。将输入光束的频率落在光子带隙的中心时，从简单折射率光栅反射光的群时延最小。这与折射率光栅内光能量的最小扰

动是一致的。在实际应用中，尤其是信号在光纤中长距离传输时，色散补偿模块必然存在群时延——在人们感兴趣的光谱区域内，它是频率的线性函数。采用啁啾折射率光栅就可以实现，有关它的基本概念表述如下。如图 12.34 所示，啁啾折射率光栅可视为由很多简单折射率光栅顺次排列而成，光栅周期是位置的递减函数。布拉格匹配条件使得

$$\Lambda_m = \frac{\lambda_m}{2n} \tag{12.7-20}$$

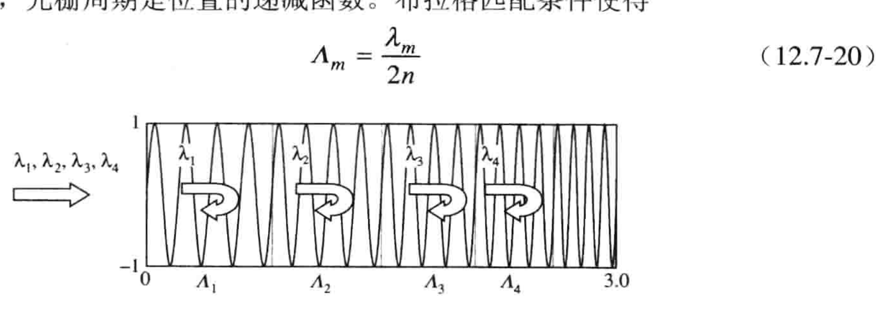


图 12.34　用于色散补偿的啁啾折射率光栅的示意图。波长为 λ_m 的光波将在光栅周期 $\Lambda_m = \lambda_m / 2n$ 处被反射

其中 n 是媒质的折射率，波长为 λ_m 的光波在光栅周期 $\Lambda_m = \lambda_m / 2n$ 处被反射。由于折射率光栅的空间啁啾作用，产生了群时延色散。换言之，波长为 λ_4 的光波其群时延比波长为 λ_1 的光波大。理论上，线性啁啾会导致群时延，在有限光谱区域内，该群时延是波长（或者频率）的线性函数。

在每个频率处，满足边界条件 $B(L)=0$，从 $z=L$ 到 $z=0$ 对耦合方程（12.7-2）进行求解，可以得到啁啾折射率光栅的群时延。当求出场幅度 $B(0)$后，通过相移对角频率求导可以计算群时延。类似地，群时延也可以用本节前面所描述的矩阵方法计算。如图 12.35 所示，对于线性啁啾折射率光栅，群时延是频率的函数。从图 12.35 可见，在群时延中存在强的波纹（尖峰）。强的波纹是由于折射率光栅在 $z=0$ 和 $z=L$ 处急剧终止引起的。利用拉锥或者切趾，能够使得此波纹减少或者消失。高斯型拉锥如图 12.36 所示。拉锥使得折射率光栅在 $z=0$ 和 $z=L$ 处平滑终止。我们可以发现，啁啾折射率光栅经过拉锥后，其群时延尖峰消失。

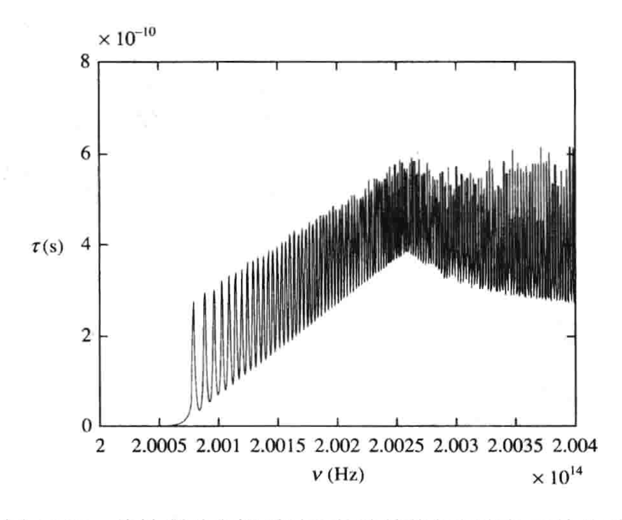


图 12.35　线性啁啾光栅群时延的计算值与频率的函数关系

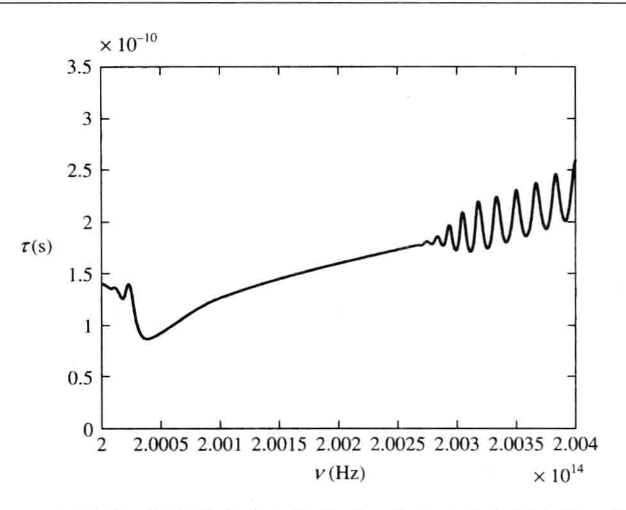


图 12.36　高斯型拉锥线性啁啾光栅群时延的计算值与频率的函数关系

12.8　二维和三维周期性媒质（光子晶体）

到目前为止，我们仅讨论了一维周期性媒质，其折射率沿着一个方向（z）发生周期性变化。对于单模光纤中的导波，用一维周期性媒质禁止其某些特殊频带的传播已经足够，该传播仅限制在一个方向（沿着光纤轴向）。在自由空间，光波可以在很多方向传播。尽管在一维周期性媒质中，光子带隙可以在任一给定的传播方向的任一频率处存在，但是能够完全禁光的频率区域是不存在的。对于周期性分层媒质（一维）中 TE 波的情况，如图 12.5 所示。为了在某一给定频率处，禁止所有方向上的传播，需要折射率在二维或者三维发生周期性变化。图 12.37 是若干二维光学媒质的示意图，包括在空气中的二维周期性圆柱阵列（或者气孔在基质材料中的情况）。

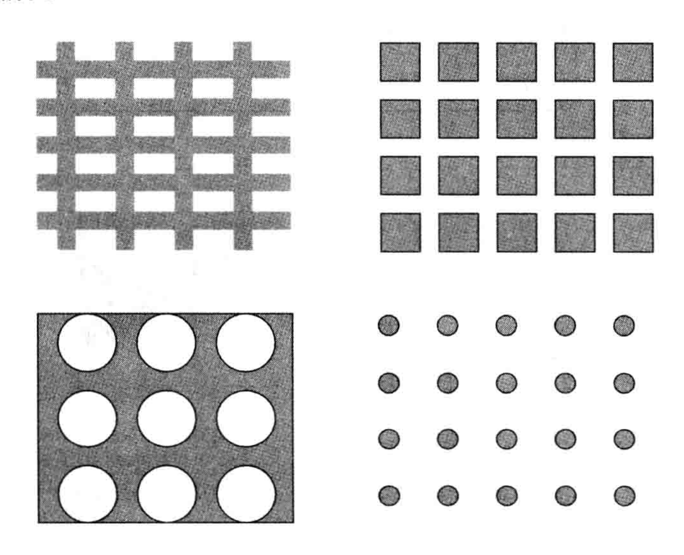


图 12.37　若干二维周期性结构的示意图。此外，长方形晶格，六方晶格的情况可依此类推

通常，求位于二维或者三维周期性媒质中布洛赫波的解，需要数值技术和计算机编程。为了阐明二维或者三维周期性媒质中光子带隙的概念，我们讨论一个简单的二维周期性媒质的例子，其中介电常数是可分离的。也就是说，二维周期性结构的介电常数可以写成

$$\varepsilon(x, y) = \varepsilon_H(x) + \varepsilon_V(y) = \varepsilon_0 n_H^2(x) + \varepsilon_0 n_V^2(y) \tag{12.8-1}$$

其中 $\varepsilon_H(x) = \varepsilon_0 n_H^2(x)$ 和 $\varepsilon_V(y) = \varepsilon_0 n_V^2(y)$ 是一维周期函数。满足可分离条件式（12.8-1）的二维周期性结构如图 12.38 所示。该结构可以分成两个周期性分层媒质，其折射率分布分别为

$$n_H^2(x) = \begin{cases} n_1^2, & 0 < x < a \\ n_2^2, & a < x < a + b \equiv \Lambda \end{cases}$$
$$n_V^2(y) = \begin{cases} n_1^2, & 0 < y < a \\ n_2^2, & a < y < a + b \equiv \Lambda \end{cases} \tag{12.8-2}$$

其中 a 和 b 是层的厚度，$\Lambda=a+b$ 是周期，n_1 和 n_2 分别是各层的折射率。

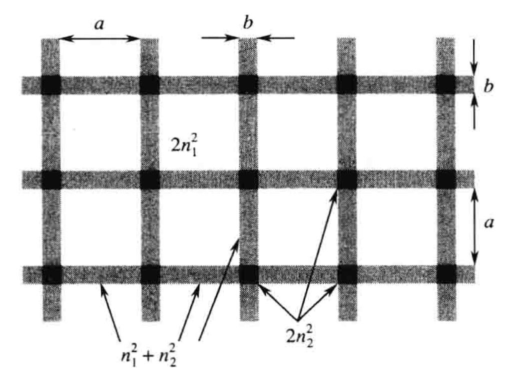


图 12.38　离散的二维周期性媒质的示意图。介电常数包括：$\varepsilon_0(2n_1^2)$，$\varepsilon_0(n_1^2+n_2^2)$ 和 $\varepsilon_0(2n_2^2)$。大的白色正方形区域（通常为空气）的介电常数为 $\varepsilon_0(2n_1^2)$；小的黑色正方形区域的介电常数为 $\varepsilon_0(2n_2^2)$；剩余结构的介电常数为 $\varepsilon_0(n_1^2+n_2^2)$

为了阐述概念的方便，考虑在 xy 平面内的传播。此时的波动方程可以写成

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \omega^2\mu\varepsilon_0 n_H^2(x) + \omega^2\mu\varepsilon_0 n_V^2(y)\right)\boldsymbol{E}(x, y) = 0 \tag{12.8-3}$$

进一步讨论 $\boldsymbol{E}$ 矢量垂直于 xy 平面的电磁波的传播情况，假设此时的解为

$$\boldsymbol{E}(x, y) = \hat{z}F(x)G(y) \tag{12.8-4}$$

波动方程（12.8-3）变成

$$\left(\frac{1}{F}\frac{\partial^2}{\partial x^2}F + \omega^2\mu\varepsilon_0 n_H^2(x)\right) + \left(\frac{1}{G}\frac{\partial^2}{\partial y^2}G + \omega^2\mu\varepsilon_0 n_V^2(y)\right) = 0 \tag{12.8-5}$$

因为式（12.8-5）是与 x 有关的部分和与 y 有关的部分之和，由此得出

$$\left(\frac{1}{F}\frac{\partial^2}{\partial x^2}F+\omega^2\mu\varepsilon_0 n_H^2(x)\right)=\beta^2$$
$$\left(\frac{1}{G}\frac{\partial^2}{\partial y^2}G+\omega^2\mu\varepsilon_0 n_V^2(y)\right)=-\beta^2 \quad (12.8\text{-}6)$$

其中 β^2 是一任意常数。因此二维问题简化成了两个一维问题。12.2 节所得的结论可以用于求出布洛赫波和色散关系。用布洛赫形式表示的解可以写成

$$F(x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}K_x x}f_{K_x}(x)$$
$$G(x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}K_y y}g_{K_y}(y) \quad (12.8\text{-}7)$$

其中 K_x 和 K_y 是布洛赫波矢分量，$f_{Kx}(x)$和 $g_{Kx}(y)$都是周期函数。根据方程（12.2-27），二维周期性媒质的色散关系可以写成

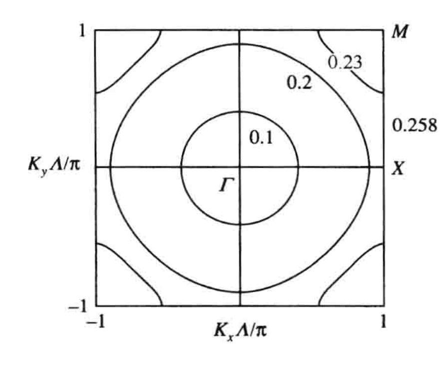
$$\cos K_x\Lambda=\cos k_{1x}a\cos k_{2x}b-\frac{1}{2}\left(\frac{k_{2x}}{k_{1x}}+\frac{k_{1x}}{k_{2x}}\right)\sin k_{1x}a\sin k_{2x}b, \quad (12.8\text{-}8)$$

$$\cos K_y\Lambda=\cos k_{1y}a\cos k_{2y}b-\frac{1}{2}\left(\frac{k_{2y}}{k_{1y}}+\frac{k_{1y}}{k_{2y}}\right)\sin k_{1y}a\sin k_{2y}b \quad (12.8\text{-}9)$$

根据方程式（12.8-2）和式（12.8-6），k_{1x}，k_{1y}，k_{2x}和 k_{2y} 分别为

$$k_{1x}=\sqrt{(n_1\omega/c)^2-\beta^2}$$
$$k_{2x}=\sqrt{(n_2\omega/c)^2-\beta^2}$$
$$k_{1y}=\sqrt{(n_1\omega/c)^2+\beta^2}$$
$$k_{2y}=\sqrt{(n_2\omega/c)^2+\beta^2} \quad (12.8\text{-}10)$$

式（12.8-10）可用于求ω和（K_x，K_y）间的关系及光子带隙结构。为了求出色散关系$\omega=\omega$（K_x，K_y），我们必须消去方程式（12.8-8）和式（12.8-9）中的 β^2 。具体求解如下：对每个给定的ω，从方程式（12.8-8）和式（12.8-9）中可求出对应于每个 β^2 值的布洛赫波矢（K_x，K_y）。通过连接 K_xK_y 平面内所有的点，可得到该平面内的给定频率处的正交面。在简约布里渊区（$-1<K_x\Lambda/\pi<1$，$-1<K_y\Lambda/\pi<1$）内不同的归一化频率$\omega\Lambda/(2\pi c)=\Lambda/\lambda$所对应的正交面如图 12.39 所示。在低的归一化频率（0.1）处，正交面几乎为圆形。处于该频率时，波长是周期的 10 倍，且周期性结构类于均匀媒质。在稍高的归一化频率（0.2）处，正交面不再为圆形，这反映了周期性结构对其的影响。在较高的归一化频率（0.23）处，$K_x\Lambda=\pi$或者$K_y\Lambda=\pi$处存在部分光子带隙，且部分正交面和布里渊区边缘重合。在更高的归一化频率（0.258）处，正交面为正方形，与布里渊区的边缘完全重合。处于该频率时，布洛赫波在所有方向上都是瞬逝的，这样我们就得到了光子带隙。此光子带隙所占的归一化频率区域在（0.258，0.283）之间。在此光子带隙内的所有频率的正交面都是正方形。归一化频率比光子带隙的边缘（0.29,0.31,0.33）大时，部分正交面与布里渊区的边缘重合。为了方便，这些频率的正交面折回简约布里渊区。



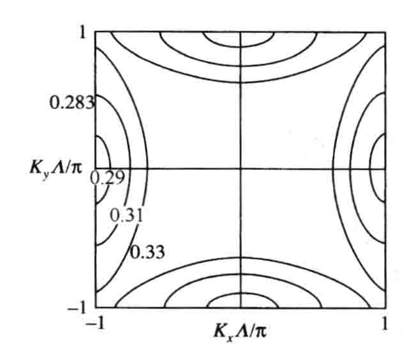


图 12.39　二维周期性媒质中，K_xK_y 平面内不同的归一化频率处：$\omega\Lambda/(2\pi c)=\Lambda/\lambda=0.1$, 0.2, 0.23, 0.258, 0.283, 0.29, 0.31, 0.33 的正交面。位于简约布里渊区内的正交面具有四重对称。参数为 $n_1^2=0.5, n_2^2=8.2, a=0.8\Lambda, b=0.2\Lambda$。相应的结构的介电常数的值为 1.0,8.7 和 16.4

方程式（12.8-8）和式（12.8-9）也可用于画出能带结构（ω与 K）。对于正方形格子，常常在布里渊区的三个主要方向画出能带结构。为了方便，确定布里渊区的中心为 $\Gamma(K_x=0,K_y=0)$，点 X 位于（$K_x\Lambda=\pi$，$K_y=0$），点 M 位于（$K_x=0$，$K_y\Lambda=\pi$）（如图 12.39 所示）。为了沿着ΓX 方向画出能带结构，令方程（12.8-9）中的 $K_y=0$。对于给定的频率ω，令 $K_y=0$ 可以推出 β^2 的值。将此 β^2 的值代入方程（12.8-8），可求出 K_x。类似的，对于沿着 XM 方向的能带结构，可以令 $K_x\Lambda=\pi$。而通过令 $\beta^2=0$ 很容易求出沿着ΓM 的能带结构。这是由于对称性的原因。周期性媒质的能带结构如图 12.40 所示。对于本例，归一化频率 $\omega\Lambda/(2\pi c)=\Lambda/\lambda$在（0.258,0.283）之间存在光子带隙。另一光子带隙在归一化频率区域（0.430,0.476）之间。

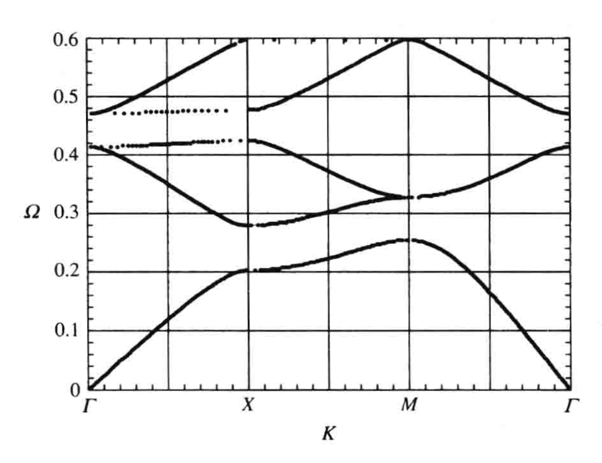


图 12.40　二维周期性媒质的能带结构。纵轴代表归一化频率$\Omega\equiv\omega\Lambda/(2\pi c)=\Lambda/\lambda$。参数为 $n_1^2=0.5, n_2^2=8.2, a=0.8\Lambda, b=0.2\Lambda$。相应的结构的介电常数的值为 1.0,8.7 和 16.4

上述讨论都是针对 $\boldsymbol{E}$ 矢量垂直于传播平面（xy 平面）的 TE 波。而 TM 波的能带结构与 TE 波大不相同。

所讨论的可分离情况包括具有三个不同区域（每个区域都有其折射率）的周期性介电结构，这种结构很难制造。实际上，二维和三维周期性结构可以通过在高折射率材料（如砷化镓，硅，锗）中引入周期性空气孔阵列构成。空气孔的折射率为 1。于是整个结构包含两种

不同的折射率。两种材料间大的折射率差对于形成光子带隙很重要。此外，选择合适的填充比对于光子带隙的形成也很重要。关于这方面的深层研究可以参考文献[8~10]。

布拉格反射波导

正如第 3 章讨论的，在介电媒质中全内反射可用于约束传播。芯包界面处的全内反射使得电磁波的辐射受到高折射率波导层（芯）的约束。利用芯包界面处的布拉格反射也能获得约束传播。利用布拉格反射就不再需要高的折射率，这就使得在低折射率媒质（包括空气和真空）中获得约束传播具有了可能性。这种类型的波导就是所熟知的布拉格反射波导（或者光子晶体波导）[11,12]。

为了阐明概念，考虑如图 12.41 所示的布拉格反射波导。低折射率平板处在两个布拉格反射器之间。布拉格反射器是用周期性分层媒质制造而成的。频率处于光子带隙内的电磁波将在周期性分层结构的边界处发生布拉格反射。若布拉格反射器具有足够多的周期，反射率可以达到 100%。因此能量被限制在两个布拉格反射器之间的区域内。

布拉格反射波导的模条件可以通过求解波动方程得到。对图 12.41 所示的简单例子，我们假设介电平板内的解是平面波，边界层媒质中的解是瞬逝布洛赫波。为了说明这个，假设布拉格反射波导的折射率分布为

$$n(x)=\begin{cases} n_1, & -b-d/2<x<-b-a-d/2 \\ n_2, & -d/2<x<-b-d/2 \\ n_c, & |x|<d/2 \\ n_2, & d/2<x<b+d/2 \\ n_1, & b+d/2<x<b+a+d/2 \end{cases} \tag{12.8-11}$$

其中 n_c 是芯的折射率，n_1 和 n_2 是布拉格反射器中层的折射率，d 是芯层厚度（波导层），a 和 b 是布拉格反射器中层的厚度。为了方便，假设布拉格反射器具有无限周期。对称波导模的电场可以写成 $E(x)\exp(-i\beta z)$，其中β是沿着 z 轴的传播常数，$E(x)$可以写成

$$E(x)=\begin{cases} E_K(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Kx}, & x<-d/2 \\ c_1\cos(k_c x), & |x|<d/2 \\ E_K(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Kx}, & x>d/2 \end{cases} \tag{12.8-12}$$

其中 $E_K(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Kx}$ 是布洛赫波函数，由方程（12.2-24）和方程（12.2-26）定义；c_1 是常数，k_c 是波导层中波矢量的 x 分量。

$$k_c=\sqrt{(\omega n_c/c)^2-\beta^2} \tag{12.8-13}$$

对于 TE 模，我们得到如下模条件，在匹配边界条件下（见习题 12.12）

$$k_c\tan\left(k_c\frac{d}{2}\right)=-ik_{1x}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}K\Lambda}-A-B}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}K\Lambda}-A+B}\quad（偶模） \tag{12.8-14}$$

其中 A 和 B 由方程（12.2-12）给出，Λ是布拉格反射器的周期，k_{1x} 为

$$k_{1x}=\sqrt{(\omega n_1/c)^2-\beta^2} \tag{12.8-15}$$

对于非对称模，可以进行类似推导，得到以下模条件

$$k_c\cot\left(k_c\frac{d}{2}\right)=ik_{1x}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}K\Lambda}-A-B}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}K\Lambda}-A+B}\quad（奇模） \tag{12.8-16}$$

在 K 为复数的光谱区域内，布拉格反射器中的导模存在振荡衰减（图 12.41）。有关细节，感兴趣的读者可以参考文献[11]。

布拉格反射波导中的波导传播也可以从“缺陷”观点理解。如图 12.41 所示的波导可以视为波导层中存在缺陷的周期性媒质。完美晶体中的电子波函数是布洛赫波，在晶体中其概率分布是均匀的。固体中的缺陷（或者无序）有捕获电子的趋势，倘若缺陷足够强，电子波函数将局限在缺陷附近。这是由 P.W.安德森在 1958 年首先提出的，即众所周知的安德森定域[13]。类似的，光子周期性媒质中的缺陷也具有捕获电磁波的趋势。如果是沿着传播方向（如沿着 z 轴）的线缺陷就构成波导。可以认为周期性分层媒质的表面是缺陷的特例。因此有理由相信：布拉格反射器的表面也能支持表面波[14]。

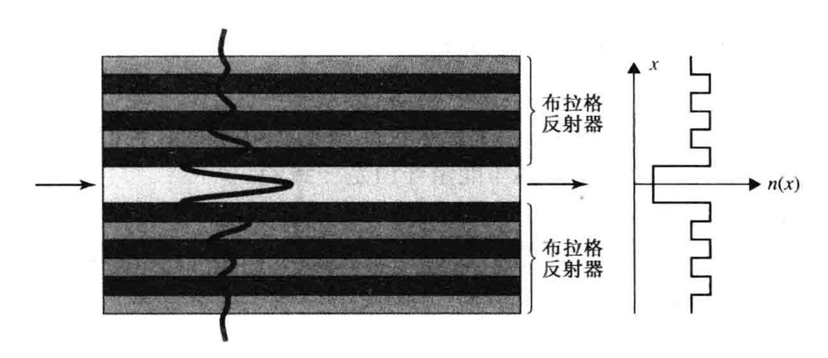


图 12.41　布拉格反射波导的示意图，它的结构是：一介电平板层处于两个周期性分层结构中

通过在周期性结构中引入缺陷，二维和三维周期性媒质也可用做布拉格反射波导。图 12.42 给出了若干例子。在这些例子中，频率位于光子带隙内时，在 xy 平面的传播由瞬逝布洛赫波构成。该结构在 z 轴方向是均匀的。在合理的条件下，这类结构可以支持沿着 z 轴的约束传播。

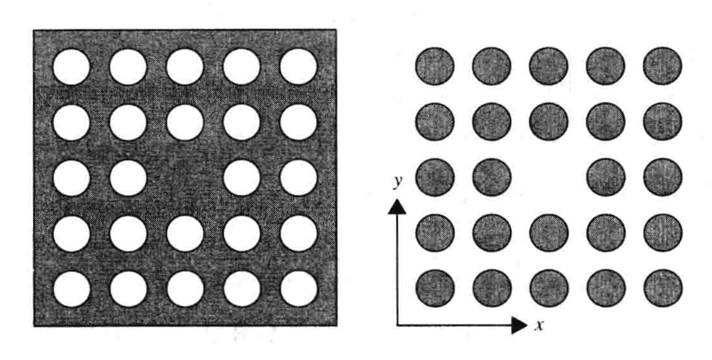


图 12.42　布拉格反射波导的示意图，它利用二维周期性结构中的缺陷约束沿着 z 轴方向的电磁波传播

习题

12.1　证明布拉格衍射定律可以写为

$$\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k}'=m\boldsymbol{K}, m=1,2,3,\cdots$$

其中 $\boldsymbol{k}$ 是入射波的波矢，$\boldsymbol{k}'$ 是散射波的波矢，$\boldsymbol{K}$ 是倒格矢。

12.2　（a）考虑一周期性的狭缝阵列，其中Λ是周期。令θ为入射角。证明：当角度满足下式

$$\Lambda\sin\theta+\Lambda\sin\theta'=m(\lambda/n), m=1,2,3,\cdots$$

时，发生衍射。

（b）令 z 为周期方向。光栅方程可以写成

$$k_z'-k_z=m(2\pi/\Lambda), m=1,2,3,\ldots$$

12.3　通过推导方程式（12.2-12），求出单位晶胞平移矩阵的矩阵元。

12.4　证明：平移矩阵的幺模特性与能量守恒是一致的。

12.5　通过推导方程式（12.2-14），求出 TM 波的单位晶胞平移矩阵的矩阵元。

12.6　求解方程式（12.2-21）的本征值问题，且求出本征值和本征矢量。推导方程式（12.2-26）的布洛赫波。

12.7　（a）推导下列方程

$$\cos K\Lambda=\cos k_1 a\cos k_2 b-\frac{1}{2}\left(\frac{n_2}{n_1}+\frac{n_1}{n_2}\right)\sin k_1 a\sin k_2 b$$

且画出四分之一波片堆中 $K\Lambda$与频率ω之间的关系曲线。

（b）证明：基带为 $\Delta\omega_{\text{gap}}=\omega_0\dfrac{4}{\pi}\arcsin\left|\dfrac{n_2-n_1}{n_2+n_1}\right|$。

（c）证明：在四分之一波片堆中不存在偶数能带（见图 12.7）。

（d）当频率位于基能带中心处时，画出场图样。

12.8　在带隙内，沿着周期方向的坡印廷矢量的分量为 0。推导方程（12.2-46）。[提示：$A+A^*=2\cos K\Lambda=(-1)^m(\mathrm{e}^{-K_i\Lambda}+\mathrm{e}^{K_i\Lambda}), \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}K\Lambda}-A\right|^2=\mathrm{e}^{-2K_i\Lambda}+AA^*-(A+A^*)(-1)^m\mathrm{e}^{-K_i\Lambda}$。]

12.9　推导下列布拉格反射器的反射率表达式

$$|r_N|^2=\frac{|C|^2}{|C|^2+(\sin K\Lambda/\sin NK\Lambda)^2}$$

12.10　（a）证明：$\mathrm{d}(|A_1|^2+|A_2|^2)/\mathrm{d}z=0$，其中 A_1 和 A_2 满足下列耦合方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A_1=-i\kappa A_2(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\beta z}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A_2=-i\kappa^* A_1(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta\beta z}$$

（b）通过推导方程（12.4-39）求出通解。

12.11　（a）相向耦合时，$+z$ 方向的净功率通量为$|A_1|^2-|A_2|^2$。证明：$\mathrm{d}(|A_1|^2+|A_2|^2)/\mathrm{d}z=0$，其中 A_1 和 A_2 满足下列耦合方程

$$\frac{d}{dz}A_1 = -i\kappa A_2(z)e^{i\Delta\beta z}$$

$$\frac{d}{dz}A_2 = i\kappa^* A_1(z)e^{-i\Delta\beta z}$$

（b）通过推导方程式（12.4-58）求出通解。

12.12　讨论如图 12.8 所示的对称布拉格反射波导。

（a）证明：在边界 $x=d/2$ 处的布洛赫波可以写成

$$E(x) = a_0 e^{-ik_{1x}(x-d/2)} + b_0 e^{+ik_{1x}(x-d/2)}$$

其中 a_0 和 b_0 由方程式（12.2-24）定义。

（b）推导模条件式（12.8-14）和式（12.8-16）。

12.13　令 $u=\Delta\beta/2$，其中 $\Delta\beta = \beta_0 - \beta - m2\pi/\Lambda$。证明：下列积分

$$I = \int_{\beta>0} \frac{\sin(\Delta\beta/2)z}{\Delta\beta/2} e^{i(\Delta\beta/2)z} d\beta$$

可以写成

$$I = 2\int_{u_1}^{u_0} \frac{\sin uz}{u} e^{iuz} du, \quad u_0 = (\beta_0 - m2\pi/\Lambda)/2, u_1 = (\beta_0 - \beta_{max} - m2\pi/\Lambda)/2$$

其中 β_{max} 是辐射模的最大的传播常数。倘若 z 是正的，积分可近似为

$$I \approx 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin uz}{u} e^{iuz} du = 2\int_0^{+\infty} \frac{\sin uz}{u} du = \pi$$

参考文献

1. Yablonovitch, E. Inhibited spontaneous emission in solid state physics and electronics. *Phys. Rev. Lett.* **58**:2059 (1987).
2. Hill, K. O., Y. Fujii, D. C. Johnson, and B. Kawasaki, Photosensitivity in optical fiber waveguides: application to reflection filter fabrications. *Appl. Phys. Lett.* **32**:646 (1978).
3. Meltz, G., W. W. Morey, and W. H. Glenn, Formation of Bragg gratings in optical fibers by a transverse holographic method. *Opt. Lett.* **14**:823 (1989).
4. Hill, K. O., B. Malo, F. Bilodeau, and D. C. Johnson, Photosensitivity in optical fibers. *Ann. Rev. Mater. Sci.* **23**:125 (1993).
5. Joanopoulos, J. D., R. D. Meade, and J. N. Winn, *Photonic Crystals: Molding in the Flow of Light*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.
6. Archambault, J.-L., L. Reekie, and P. St. J. Russell, 100% reflectivity Bragg reflectors produced in optical fibres by single excimer laser pulses. *Electron Lett.* **29**:453 (1993).
7. Morey, W. W., G. A. Ball, and G. Meltz, Photoinduced Bragg gratings in optical fibers. *Optics Photonics News*, **Feb.**:8 (1994).
8. Yablonovitch, E., and T. J. Gmitter, Photonic band structures: the face-center cubic case. *Phys. Rev. Lett.* **63**:1950 (1989).
9. Yablonovitch, E., T. J. Gmitter, and K. M. Leung, Photonic band structures: the face-center cubic case employing non-spherical atoms. *Phys. Rev. Lett.* **67**:2295 (1991).
10. Joannopoulos, J. D., R. D. Meade, and J. N. Winn, *Photonic Crystals*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.
11. Yeh, P., and A. Yariv, Bragg reflection waveguides. *Opt. Commun.* **19**:427 (1976).
12. Yeh, P., A. Cho, and A. Yariv, Observation of confined propagation in Bragg waveguides. *Appl. Phys. Lett.* **30**:471 (1977).

13. Anderson, P. W., *Phys. Rev.* **109**:1492 (1958).
14. Yeh, P., A. Cho, and A. Yariv, Optical surface waves in periodic layered media. *Appl. Phys. Lett.* **32**:104 (1978).

第 13 章　波导耦合

13.0　导言

本章将讨论两个或多个介质波导间的耦合。首先介绍在普通介质波导中传导模的基本性质，包括模式间的正交性和功率流。接下来介绍用介质微扰理论描述两个以及 N 个相同的平行波导之间的耦合现象。这种形式被用于分析一系列重要的应用，包括电光耦合和定向耦合器。

13.1　模式的一般特性

波导电磁辐射的基本要求是能量流的方向仅平行于传导结构而不是垂直于它。这就意味着，传导模的电磁场仅分布在紧邻传导结构的地方。取圆柱形介质的任意横切面，如图 13.1，可认为波导的介电常数足够大。对于光波来说，波导中心的折射率要比周围的大。通常情况下，一束光在横向非均匀介质中传播时，根据光线方程，传播方向趋向于折射率大的区域。因此，传导结构中心折射率大的部分的作用就类似于具有会聚作用的透镜。但是在一定的条件下，高折射率中心的这种会聚作用可能会与由衍射引起的发散相互抵偿。当这种情况发生的时候，介质结构就产生了一个传导模式。

取图 13.1 所示的波导的任意横截面。以 z 轴为光的传播方向，设模式随时间变化的形式为 $\exp(i\omega t)$。其麦克斯韦方程为

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = i\omega\varepsilon_0 n^2 \boldsymbol{E} \tag{13.1-1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -i\omega\mu_0 \boldsymbol{H} \tag{13.1-2}$$

式中 n 是介质结构折射率的分布函数，它仅与 x、y 有关。因为沿 z 轴的介质波导是均匀的，所以式（13.1-1）和式（13.1-2）的解如下

$$\boldsymbol{E} = \mathscr{E}(x, y)\exp[(i\omega t - \beta z)] \tag{13.1-3}$$

$$\boldsymbol{H} = \mathscr{H}(x, y)\exp[(i\omega t - \beta z)] \tag{13.1-4}$$

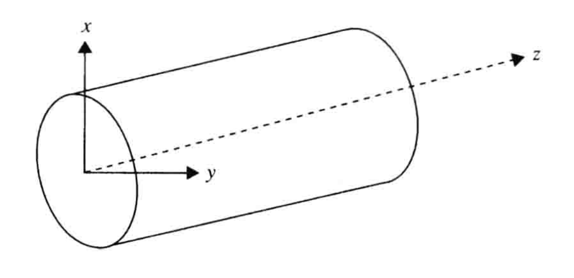


图 13.1　普通圆柱介质波导的示意图

式中β是由麦克斯韦方程所确定的传播常量。假设该结构由分段的均匀的介质或者是折射率呈很小的梯度分布的材料组成，这样方程式（13.1-1）和式（13.1-2）就被简化为

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n^2(x, y)\boldsymbol{E} = 0 \tag{13.1-5}$$

将式（13.1-3）代入方程中（13.1-5）的$\boldsymbol{E}$

$$\nabla_t^2 \mathscr{E} + \left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n^2(x, y) - \beta^2\right]\mathscr{E} = 0 \tag{13.1-6}$$

式中$\nabla_t^2 = \nabla^2 - \partial^2/\partial z^2$是横向的拉普拉斯算符。方程式（13.1-6）确定了该电磁场的横向变化。在分段均匀的介质结构中（单模光纤），方程式（13.1-6）在每段相同的介质中是成立的。所以该电磁场要在每段当中进行分析，切线方向的电磁场在界面处都是连续的。另外一个重要的边界条件是在无限远处电磁场的振幅为零。为了满足各向同性介质中界面各点的边界条件，轴向的传播常数β在整个结构中都是相等的。

方程式（13.1-6）的求解可被认为是求特征值的问题，其中$\mathscr{E}$是特征函数，β^2是特征值。特征函数必须满足界面的连续性条件以及无限远处的边界条件。给出折射率的函数$n^2(x,y)$，无限个特征值对应无限多个模式。然而通常情况下，只有有限数量的模式是被限制在介质结构中心附近并沿着传播方向自由传播。对于传导模式的一个必要的条件是波导中心外层的结构中电磁场是呈指数式衰减的。因此，$(\omega/c)^2 n^2(x,y) - \beta^2$在远离传导区域（芯层）和无限远处必须是负数。换句话说，受限模式中传播常数β必须满足下列条件

$$\frac{\omega^2}{c^2} n^2(\infty) < \beta^2 \tag{13.1-7}$$

式中n^2（∞）是波导在无限远处的折射率（$\sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$）。

另一方面，若在无限远处的电磁场为零($|E(\infty)|^2 = 0$)，电磁场的连续性就要求电场在 xy 平面内的某点处有一个最大值。一般情况，E（x，y）是连续光滑函数，最大值的存在要求拉普拉斯算符是负的。换言之，在xy平面内（通常是在波导结构的芯区）受限模式的传播常数β满足

$$\beta^2 < \frac{\omega^2}{c^2} n^2(x, y) \tag{13.1-8}$$

在特殊情况中，如果n_c是折射率n^2（x，y）的最大值，则受限模式的传播常数满足以下条件

$$\beta^2 < \frac{\omega^2}{c^2} n_c^2 \tag{13.1-9}$$

在满足式（13.1-8）的区域，波动方程的解是振荡的。这个振荡解必须在介质界面处满足指数式衰减。因此不是所有满足式（13.1-7）和式（13.1-9）的β都是合适的受限模的本征解。通常，合适的本征解是一系列的离散值。这与在第 3 章中得到的结论是一致的。

在介质结构中同样存在满足波动方程解的发散模式，相应的传播常数β在这些发散模式中不满足以上条件式。这些模式通常被作为辐射模。

模式的正交

在任意的介质结构中，波导模式有非常重要和有用的正交性质。令（$\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{H}_1$）和（$\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{H}_2$）为满足麦克斯韦方程的两个独立的线性解，因此在无源介质波导中（没有电荷密度和电流），满足

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{H}_1) = 0 \tag{13.1-10}$$

这个方程被称为洛仑兹互易性定理，相应地ε和μ是对称张量。如果用算符$\nabla_t + \boldsymbol{a}_z \partial/\partial z$代替$\nabla$，并假设场（$\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{H}_1$）和（$\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{H}_2$）取式（13.1-3）和式（13.1-4）的形式，传播常数分别为β_1，β_2，那么互易关系可化简为

$$\nabla_t \cdot (\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{H}_1) - i(\beta_1 + \beta_2)\boldsymbol{a}_z \cdot (\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{H}_1) = 0 \tag{13.1-11}$$

这里称∇_t为横向梯度算符，$\boldsymbol{a}_z$是沿 z 轴的单位矢量。使用散度定理的二维形式，可获得

$$\begin{aligned}\iint_S \nabla_t \cdot (\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{H}_1)\mathrm{d}a &= \oint_C (\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{H}_1) \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}l \\ &= i(\beta_1 + \beta_2) \iint_S (\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{H}_1) \cdot \boldsymbol{a}_z\, \mathrm{d}a\end{aligned} \tag{13.1-12}$$

式中 S 表示在 xy 平面中任意表面，C 表示表面的边界，n 是垂直于曲面 C 和 $\boldsymbol{a}_z$ 的单位矢量，如果取 S 为整个 xy 平面，在上面的方程中闭合积分趋于零，因为场在无限远处消失。所以可以得到

$$(\beta_1 + \beta_2) \iint (\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{H}_1) \cdot \boldsymbol{a}_z\, \mathrm{d}a = 0 \tag{13.1-13}$$

式中积分是在整个 xy 平面。

把式（13.1-3）和式（13.1-4）的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 代入方程式（13.1-13），得到

$$(\beta_1 + \beta_2) \iint (\mathscr{E}_1 \times \mathscr{H}_2 - \mathscr{E}_2 \times \mathscr{H}_1) \cdot \boldsymbol{a}_z\, \mathrm{d}a = 0 \tag{13.1-14}$$

因为一般的指数项可被忽略。为了证明方程式（13.1-4）每一项分别为零，考虑两组解（$\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{H}_1$）和（$\boldsymbol{E}_2',\boldsymbol{H}_2'$），其中（$\boldsymbol{E}_2',\boldsymbol{H}_2'$）是在 z=0 平面处相对于模式（$\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{H}_1$）镜面转换模式。由于对称性介质结构，转换模式也是麦克斯韦方程式（13.1-1）和式（13.1-2）的解。这种镜面对称变换相对于传播方向相反，电场纵向分量的方向和磁场横向分量的方向也相反。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}'_{2t} &= \mathscr{E}_{2t}(x, y) \exp[(i\omega t + \beta_2 z)] \\ \boldsymbol{E}'_{2z} &= -\mathscr{E}_{2z}(x, y) \exp[(i\omega t + \beta_2 z)] \\ \boldsymbol{H}'_{2t} &= -\mathscr{H}_{2t}(x, y) \exp[(i\omega t + \beta_2 z)] \\ \boldsymbol{H}'_{2z} &= \mathscr{H}_{2z}(x, y) \exp[(i\omega t + \beta_2 z)]\end{aligned} \tag{13.1-15}$$

式中脚标 t 代表了横向分量。在积分式（13.1-13）和式（13.1-14）中仅有横向分量，所以在这种情形的（$\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{H}_1$）和（$\boldsymbol{E}_2',\boldsymbol{H}_2'$）下，相对方程式（13.1-14）得到的方程式是

$$(\beta_1-\beta_2)\iint(-\mathscr{E}_1\times\mathscr{H}_2-\mathscr{E}_2\times\mathscr{H}_1)\cdot\boldsymbol{a}_z\,\mathrm{d}a=0 \tag{13.1-16}$$

将式（13.1-14）和式（13.1-16）相加减，得到

$$\iint(\mathscr{E}_1\times\mathscr{H}_2)\cdot\boldsymbol{a}_z\,\mathrm{d}a=\iint(\mathscr{E}_2\times\mathscr{H}_1)\cdot\boldsymbol{a}_z\,\mathrm{d}a=0 \tag{13.1-17}$$

如果进一步假设介质结构是无损耗的（ε，μ是实张量），类似地推出

$$\iint(\mathscr{E}_1\times\mathscr{H}_2^*)\cdot\boldsymbol{a}_z\,\mathrm{d}a=\iint(\mathscr{E}_2^*\times\mathscr{H}_1)\cdot\boldsymbol{a}_z\,\mathrm{d}a=0 \tag{13.1-18}$$

如果考虑时间和 z 的影响，在无损介质波导中的正交关系可以被写为

$$\iint(\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{H}_2^*)\cdot\boldsymbol{a}_z\,\mathrm{d}a=0 \tag{13.1-19}$$

这里 $\boldsymbol{H}_2^*$是 $\boldsymbol{H}_2$ 的共轭复数。这个关系式表明，在无损介质波导中通过的功率流是每个独立模式的功率总和。将功率归一化后，得到正交模式间的关系式

$$\frac{1}{2}\iint(\boldsymbol{E}_m\times\boldsymbol{H}_n^*)\cdot\boldsymbol{a}_z\,\mathrm{d}a=\delta_{mn} \tag{13.1-20}$$

这里 m，n 是模式的脚标，δ_{mn} 是克罗内克符号。对于辐射模式，δ_{mn} 是δ函数。

对于横电场模（TE）和横磁场（TM）模，正交形式（13.1-20）可化简为（参见习题13.7）。

$$\frac{\beta_m}{2\omega\mu}\iint(\boldsymbol{E}_m\cdot\boldsymbol{E}_n^*)\,\mathrm{d}a=\delta_{mn}\qquad(\text{TE}) \tag{13.1-21}$$

$$\frac{\beta_m}{2\omega}\iint\left(\boldsymbol{H}_m\cdot\frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{H}_n^*\right)\mathrm{d}a=\delta_{mn}\qquad(\text{TM}) \tag{13.1-22}$$

能量传输

在一个无损介质波导中，每个模式携带功率按照各自的方向传输，不受其他模式存在的影响，这在等式（13.1-20）所表达的模式正交中是很明显可以看出来的。功率的传输在整个 xy 面中由玻印廷矢量的实部来表示。由于正交，可以一次只研究一个模式的能量传输。对于给定的传输模式，功率流的时间平均值为

$$P=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\iint(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)\cdot\boldsymbol{a}_z\,\mathrm{d}a \tag{13.1-23}$$

模式的单位长度的场能量为

$$U=\frac{1}{4}\mathrm{Re}\iint(\boldsymbol{E}\cdot\varepsilon\boldsymbol{E}^*+\boldsymbol{H}\cdot\mu\boldsymbol{H}^*)\,\mathrm{d}a \tag{13.1-24}$$

式中假设ε和μ都是实数，那么它们的积分也是实数。由于麦克斯韦方程组是线性的，功率流 P 和能量密度 U 成正比，其比例常数具有速度的量级，所以称为能量传输的速度

$$v_e=\frac{P}{U} \tag{13.1-25}$$

可证明：能量传输的速度等于群速度，群速度定义为

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \tag{13.1-26}$$

在介质波导中，每个模式的传输常数β都是ω的函数。当一束频率分布为有限值$\delta\omega$的光脉冲在波导中传播，光谱中的每个成分的能量都只被一种模式所携带。如果$\delta\beta$是模式传输常数中对应的展开范围，那么脉冲的速度由表达式（13.1-26）所给出。

为了证明能量传播速度v_e和群速度v_g是相等的，由麦克斯韦方程组出发，将等式（13.1-1）和式（13.1-2）中的$\boldsymbol{\nabla}$替换为$\boldsymbol{\nabla}_t + \boldsymbol{a}_z \partial/\partial z$，得出

$$\boldsymbol{\nabla}_t \times \boldsymbol{H} + \boldsymbol{a}_z \times \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{H} = i\omega\varepsilon \boldsymbol{E} \tag{13.1-27}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_t \times \boldsymbol{E} + \boldsymbol{a}_z \times \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{E} = -i\omega\mu \boldsymbol{H} \tag{13.1-28}$$

式中$\varepsilon=\varepsilon_0 n^2$，并假设更具普遍性的张量$\mu$。$\boldsymbol{a}_z$为沿着波导方向的单位矢量。因为场与$z$的函数关系可以用式（13.1-3）和式（13.1-4）中的形式表示，所以上面的等式可以写为

$$\boldsymbol{\nabla}_t \times \boldsymbol{H} - i\beta \boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{H} = i\omega\varepsilon \boldsymbol{E} \tag{13.1-29}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_t \times \boldsymbol{E} - i\beta \boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{E} = -i\omega\mu \boldsymbol{H} \tag{13.1-30}$$

现在假设β产生一个微小的变量$\delta\beta$。假如$\delta\omega$，$\delta\boldsymbol{E}$，和$\delta\mathbf{H}$是ω，$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{H}$各自对应的变化量，可以根据第 1 章中的结论得到下列等式

$$\boldsymbol{\nabla}_t \cdot \boldsymbol{F} - i4\delta\beta \,\mathrm{Re}[(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)\cdot \boldsymbol{a}_z] = -i2\delta\omega[\boldsymbol{E}\cdot\varepsilon\boldsymbol{E}^* + \boldsymbol{H}\cdot\mu\boldsymbol{H}^*] \tag{13.1-31}$$

式中$\boldsymbol{F}$由下式给出

$$\boldsymbol{F} = \delta\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^* + \delta\boldsymbol{H}^*\times\boldsymbol{E} + \boldsymbol{H}\times\delta\boldsymbol{E}^* + \boldsymbol{E}^*\times\delta\boldsymbol{H} \tag{13.1-32}$$

假如将等式（13.1-31）扩展到整个xy平面并积分，使用二维散度定理

$$\iint_S \boldsymbol{\nabla}_t \cdot \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}a = \oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}l \tag{13.1-33}$$

可以得到

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}l - i8\delta\beta P = -i8\delta\omega U \tag{13.1-34}$$

式中C是无限远处的圆周长，P和U分别由等式（13.1-23）和式（13.1-24）给出。因为受限模式的场振幅在无限远处为零，所以闭合积分就为零。可以推导出

$$\delta\beta\, P = \delta\omega\, U \tag{13.1-35a}$$

利用群速度和能量传输速度的定义，等式（13.1-35a）可以表示为

$$v_e\,\delta\beta = \delta\omega = \frac{\partial\omega}{\partial\beta}\delta\beta = v_g\,\delta\beta \tag{13.1-35b}$$

由于$\delta\beta$是任一极微小的数，可以推出受限模式在介质波导中有

$$v_e = v_g \tag{13.1-36}$$

在上述推导过程中，假设ε和μ都与频率ω无关。所以，严格地说，只有在材料的色散可以被忽略的光谱范围中，能量传输速度与群速度相等才有效。

13.2　介质微扰理论和模式耦合

在前一节已经推导出介质波导模式的一些特性，包括它的正交特性和能量传输特性。受限模式实际上可以被分别独立激发并且沿波导结构的轴向传播，只要介电常数 $\varepsilon(x, y)=\varepsilon_0 n^2(x, y)$ 与 z 无关。当存在由于波导不完整性、弯曲、表面不平整性或类似的原因导致波导介质微扰 $\Delta\varepsilon(x, y, z)$ 的情况下，传输模式间发生互相耦合。换言之，某个单一的模式在波导开始处被激发了，它的一些能量可传输到其他模式中。由介质微扰而引起的模式耦合和能量交换的详细内容在 12.4 节中描述了。

这里假设一种特殊的情况，在这种情况下介质微扰与 z 无关。也就是说，介质微扰 $\Delta\varepsilon(x, y, z)=\Delta\varepsilon(x, y)$ 只与 x，y 有关的函数，与 z 无关（$\partial\Delta\varepsilon/\partial z=0$）。有很多实际的情况下都必须获得含介质微扰 $\Delta\varepsilon(x, y)$ 的整个波导结构的传输常数和模式波函数。如果波方程很难求解（或不能直接解出来），微扰理论提供一种解决这种问题的方法。经常选择的微扰 $\Delta\varepsilon(x, y)$，相对应的非微扰时的波导结构可以很容易被求解或者有已知的解决方法。令介电常数可写为

$$\varepsilon(x, y)=\varepsilon_a(x, y)+\Delta\varepsilon(x, y) \tag{13.2-1}$$

式中 $\varepsilon_a(x, y)$ 是非微扰波导的介电常数。令非微扰传输模式为

$$\boldsymbol{E}_m=\mathscr{E}_m(x, y)\exp[i(\omega t-\beta_m z)] \tag{13.2-2}$$

式中横向传输函数 $\mathscr{E}_m$ 满足非微扰波方程

$$[\nabla_t^2+\omega^2\mu\varepsilon_a(x, y)][\mathscr{E}_m(x, y)=\beta_m^2\mathscr{E}_m(x, y) \tag{13.2-3}$$

这些模式形成了一个完全的正交集，如前面讨论的，而且符合正交关系

$$\frac{\beta_m}{2\omega\mu}\iint \mathscr{E}_m\cdot\mathscr{E}_n^*\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\delta_{mn} \tag{13.2-4}$$

现在考虑介质微扰 $\Delta\varepsilon(x, y)$ 的作用，$\Delta\varepsilon(x, y)$ 与 $\varepsilon_a(x, y)$ 相比是很小的。假定这样一个小的微扰的作用将仅导致模式函数和传输常数的微小变化。令 $\delta\mathscr{E}_m$ 和 $\delta\beta_m^2$ 分别代表模式函数和传输常数的变量。这样实际的波方程是

$$[\nabla_t^2+\omega^2\mu\varepsilon_a(x, y)+\omega^2\mu\,\Delta\varepsilon(x, y)](\mathscr{E}_m+\delta\mathscr{E}_m)=(\beta_m^2+\delta\beta_m^2)(\mathscr{E}_m+\delta\mathscr{E}_m) \tag{13.2-5}$$

如果忽略二阶项 $\Delta\varepsilon\delta\mathscr{E}_m$ 和 $\delta\beta_m^2\delta\mathscr{E}_m$，利用方程（13.2-3），这样方程（13.2-5）简化成

$$[\nabla_t^2+\omega^2\mu\varepsilon_a(x, y)]\delta\mathscr{E}_m+\omega^2\mu\,\Delta\varepsilon\,\mathscr{E}_m=\beta_m^2\,\delta\mathscr{E}_m+\delta\beta_m^2\,\mathscr{E}_m \tag{13.2-6}$$

为了解这个方程，根据非微扰波函数模式把 $\delta\mathscr{E}_m$ 展开：

$$\delta\mathscr{E}_m(x, y)=\sum_n a_{mn}\,\mathscr{E}_n(x, y) \tag{13.2-7}$$

式中 a_{mn} 是常量。把式（13.2-7）代入式（13.2-6）$\delta\mathscr{E}_\mathrm{m}$，利用式（13.2-3），得到

$$\sum_n a_{mn}(\beta_n^2-\beta_m^2)\mathscr{E}_n(x, y)=(\delta\beta_m^2-\omega^2\mu\,\Delta\varepsilon)\mathscr{E}_m(x, y) \tag{13.2-8}$$

如果用 $\mathscr{E}_m^*$ 相乘上式并且在整个 xy 平面内积分，发现等式左边由于正交性（如式（13.2-4））趋于零。由此可得

$$\iint \mathscr{E}_m^* \cdot (\delta\beta_m^2 - \omega^2\mu\,\Delta\varepsilon)\mathscr{E}_m \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0 \tag{13.2-9}$$

既然$\delta\beta_m^2$是常量，可以写成

$$\delta\beta_m^2 = \frac{\iint \mathscr{E}_m^* \cdot \omega^2\mu\,\Delta\varepsilon\,\mathscr{E}_m \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint \mathscr{E}_m^* \cdot \mathscr{E}_m \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} \tag{13.2-10}$$

这个方程给出传输常数β_m^2一阶修正。用方程式（13.2-4）和$\delta\beta_m^2 = 2\beta_m\delta\beta_m$，方程式（13.2-10）也可以写成

$$\delta\beta_m = \frac{\omega}{4}\iint \mathscr{E}_m^* \cdot \Delta\varepsilon\,\mathscr{E}_m \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{13.2-11}$$

为了得到模式函数的修正$\delta\mathscr{E}_m$。用$\mathscr{E}_m^*$（$n \neq m$）相乘等式（13.2-8）两端并在整个 xy 平面积分得到

$$a_{mn} = \frac{\omega\beta_n}{2(\beta_m^2 - \beta_n^2)}\iint \mathscr{E}_n^* \cdot \Delta\varepsilon(x, y)\,\mathscr{E}_m \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\quad n \neq m \tag{13.2-12}$$

这个过程没有给定a_{mn}的值，根据式（13.2-4）使模式波函数归一化并给定

$$a_{mm} = -\frac{1}{4}\frac{\delta\beta_m^2}{\beta_m^2} = -\frac{1}{2}\frac{\delta\beta_m}{\beta_m} \tag{13.2-13}$$

利用$\delta\beta_m$的表达式，系数a_{mn}可以写成

$$a_{mm} = -\frac{\omega}{8\beta_m}\iint \mathscr{E}_m^* \cdot \Delta\varepsilon\,\mathscr{E}_m \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{13.2-14}$$

很容易定义耦合系数为

$$\kappa_{nm} = \frac{\omega}{4}\iint \mathscr{E}_n^* \cdot \Delta\varepsilon\,\mathscr{E}_m \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{13.2-15}$$

根据方程式（13.2-12）和式（13.2-7），模式波函数的一阶修正可以表示为

$$\delta\mathscr{E}_m(x, y) = \sum_{n\neq m}\frac{2\beta_n}{\beta_m^2 - \beta_n^2}\kappa_{nm}\,\mathscr{E}_n(x, y) - \frac{\kappa_{mm}}{2\beta_m}\mathscr{E}_m(x, y) \tag{13.2-16}$$

传输常数$\delta\beta_m$的修正可以写成

$$\delta\beta_m = \kappa_{mm} \tag{13.2-17}$$

这里得出的结果可以用来估算在波导结构中出现线性吸收时模式的衰减系数。关键结果式（13.2-10）经常写成

$$\delta\beta_m^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\iint \mathscr{E}_m^* \cdot \Delta n^2(x, y)\,\mathscr{E}_m \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint \mathscr{E}_m^* \cdot \mathscr{E}_m \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} = \frac{\omega^2}{c^2}\langle\Delta n^2(x, y)\rangle \tag{13.2-18}$$

式中$\Delta n^2(x, y) = \Delta\varepsilon(x, y)/\varepsilon_0$，而〈$\Delta n^2(x, y)$〉代表了折射率微扰的统计平均值。式（13.2-18）在量子力学中被称为赫尔曼–费恩曼理论。

值得注意的是式（13.2-18）仅是一阶近似式，这一点是非常重要的。在很多情况下，介

质的扰动异常强烈，或者非对角线元素如 $2\beta_n k_{nm}$ 不再比 $\left|\beta_m^2-\beta_n^2\right|$ 小。根据式（13.2-16），这些情况都将对波动函数有很重要的修正。在这种情况下，需要将非扰动波动函数线性叠加来表示波动函数

$$\psi(x,y)=\sum_m c_m\mathscr{E}_m(x,y) \tag{13.2-19}$$

这里 c_m 是待定常量使 $\psi(x,y)$ 满足下面的波动方程

$$[\nabla_t^2+\omega^2\mu\varepsilon_a(x,y)+\omega^2\mu\,\Delta\varepsilon(x,y)]\psi=\beta^2\psi \tag{13.2-20}$$

这里的 $\Delta\varepsilon(x,y)$ 表示介电常数的扰动。这种方法非常适用于模式总数小的情况（例 2,3 或 4）。将式（13.2-19）代入式（13.2-20），得到

$$[\nabla_t^2+\omega^2\mu\varepsilon_a(x,y)+\omega^2\mu\,\Delta\varepsilon(x,y)]\sum_m c_m\mathscr{E}_m(x,y)=\beta^2\sum_m c_m\mathscr{E}_m(x,y) \tag{13.2-21}$$

利用式（13.2-3），上式变为

$$\sum_m(\beta_m^2+\omega^2\mu\,\Delta\varepsilon(x,y))c_m\mathscr{E}_m(x,y)=\beta^2\sum_m c_m\mathscr{E}_m(x,y) \tag{13.2-22}$$

用 $\mathscr{E}_n^*$（n=1，2，3，4，…）对上述式子进行标量乘法运算并在整个 xy 平面内进行积分。通过正交关系式（13.2-4），可以得到

$$\begin{aligned}
(\beta_1^2+2\beta_1\kappa_{11})c_1+2\beta_1\kappa_{12}c_2+2\beta_1\kappa_{13}c_3+2\beta_1\kappa_{14}c_4+\cdots&=\beta^2c_1\\
2\beta_2\kappa_{21}c_1+(\beta_2^2+2\beta_2\kappa_{22})c_2+2\beta_2\kappa_{23}c_3+2\beta_2\kappa_{24}c_4+\cdots&=\beta^2c_2\\
2\beta_3\kappa_{31}c_1+2\beta_3\kappa_{32}c_2+(\beta_3^2+2\beta_3\kappa_{33})c_3+2\beta_3\kappa_{34}c_4+\cdots&=\beta^2c_3\\
2\beta_4\kappa_{41}c_1+2\beta_4\kappa_{42}c_2+2\beta_4\kappa_{43}c_3+(\beta_4^2+2\beta_4\kappa_{44})c_4+\cdots&=\beta^2c_4\\
&\vdots
\end{aligned} \tag{13.2-23}$$

或者等效地，用矩阵表达形式表示为

$$\begin{bmatrix}
\beta_1^2+2\beta_1\kappa_{11} & 2\beta_1\kappa_{12} & 2\beta_1\kappa_{13} & 2\beta_1\kappa_{14} & \cdots\\
2\beta_2\kappa_{21} & \beta_2^2+2\beta_2\kappa_{22} & 2\beta_2\kappa_{23} & 2\beta_2\kappa_{24} & \cdots\\
2\beta_3\kappa_{31} & 2\beta_3\kappa_{32} & \beta_3^2+2\beta_3\kappa_{33} & 2\beta_3\kappa_{34} & \cdots\\
2\beta_4\kappa_{41} & 2\beta_4\kappa_{42} & 2\beta_4\kappa_{43} & \beta_4^2+2\beta_4\kappa_{44} & \cdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\\\vdots\end{bmatrix}=\beta^2\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\\\vdots\end{bmatrix} \tag{13.2-24}$$

这里的 κ_{nm} 由式（13.2-15）求得。波函数和对应的本征值 β^2 都可以通过解式（13.2-23）的本征值获得。为了阐述上面的方法，考虑下面的例子。

例：单模光纤中的应力双折射。

在切应力 S_6 的影响下，LP_{01x} 和 LP_{01y} 两种模式相互耦合。根据公式（9.6-17）和式（9.6-34）可以求得切应力的介电常数的扰动为

$$\Delta\varepsilon=\varepsilon_0 n^4\begin{bmatrix}0 & p_{44}S_6\\ p_{44}S_6 & 0\end{bmatrix} \tag{13.2-25}$$

这里的 p_{44} 是材料（硅）的光弹性系数。在这种情况下，赫尔曼–费恩曼理论使得 LP_{01} 模式的传播常量为零修正。

传播常量可以由解式（13.2-24）的本征问题来解决

$$\begin{bmatrix} \beta_0^2 + 2\beta_0\kappa_{11} & 2\beta_0\kappa_{12} \\ 2\beta_0\kappa_{21} & \beta_0^2 + 2\beta_0\kappa_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \beta^2 \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \tag{13.2-26}$$

这里的 β_0 是扰动前的模式传播，而 κ_{11}，κ_{22}，κ_{21} 和 κ_{12} 由下面的公式求得

$$\begin{aligned} \kappa_{11} &= \frac{\omega}{4}\iint \xi_0^* \cdot \varepsilon_{11}\xi_0 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \\ \kappa_{22} &= \frac{\omega}{4}\iint \xi_0^* \cdot \varepsilon_{22}\xi_0 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \\ \kappa_{12} &= \frac{\omega}{4}\iint \xi_0^* \cdot \varepsilon_{12}\xi_0 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{2\omega\mu}{\beta_0}\frac{\omega}{4}\varepsilon_0 n^4 p_{44} S_6 \\ \kappa_{21} &= \frac{\omega}{4}\iint \xi_0^* \cdot \varepsilon_{21}\xi_0 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{2\omega\mu}{\beta_0}\frac{\omega}{4}\varepsilon_0 n^4 p_{44} S_6 \end{aligned} \tag{13.2-27}$$

根据式（13.2-26），式（13.2-26）可以变为

$$\begin{bmatrix} \beta_0^2 - \beta^2 & 2\beta_0\kappa_{12} \\ 2\beta_0\kappa_{21} & \beta_0^2 - \beta^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{13.2-28}$$

求得本征值

$$\beta^2 = \beta_0^2 \pm 2\beta_0\kappa_{12} = \beta_0^2 \pm \omega^2\mu\varepsilon_0 n^4 p_{44} S_6 \tag{13.2-29}$$

应力双折射可以表示为

$$\Delta n = \frac{1}{2} n^3 p_{44} S_6 \tag{13.2-30}$$

对于 $p_{44} = -0.07$ 的 Si，n=1.45，切应力 $S_6 = 10^{-7}$，得到应力双折射 $\Delta n = 2\times10^{-8}$。

13.3　两个平行波导的耦合－定向耦合器

现在，考虑分开有限距离的平行波导的耦合情况。若模式波函数之间有交叠，则模式间就产生耦合。相邻波导的导波模式间能量的交换被称为直接耦合。这种现象类似于在两个原子所构成的分子中的电子运动。在光通信中，波导定向耦合器有很多有用的用途，例如功率分配，功率耦合和交换。

在这一部分，利用耦合模理论来处理两个平行波导模式的耦合。由图 13.2，考虑分开有限距离的两个圆柱形平行介质波导的情形。当它们间相互远离时，可用 $\mathscr{E}_a(x,y)\exp[i(wt-\beta_a z)]$ 和 $\mathscr{E}_b(x,y)\exp[i(wt-\beta_b z)]$ 来表示各个波导的传播模式。当两个波导间的距离为有限值时，耦合波导结构中的波的传播电场可以表示为

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,t) = A(z)\mathscr{E}_a(x,y)\exp[i(\omega t-\beta_a z)] + B(z)\mathscr{E}_b(x,y)\exp[i(\omega t-\beta_b z)] \tag{13.3-1}$$

假设两个波导间的距离不是靠得很近且 $\mathscr{E}_a(x,y)\exp[i(wt-\beta_a z)]$ 和 $\mathscr{E}_b(x,y)\exp[i(wt-\beta_b z)]$ 是波导的唯一受限模式。耦合不存在时，即波导 a 和 b 之间的距离为无穷大时，$A(z)$和 $B(z)$与 z 无关，并且二者之间互相独立，因为式（13.3-1）右边两项中的每一项分别满足波动方程式（13.3-1）。

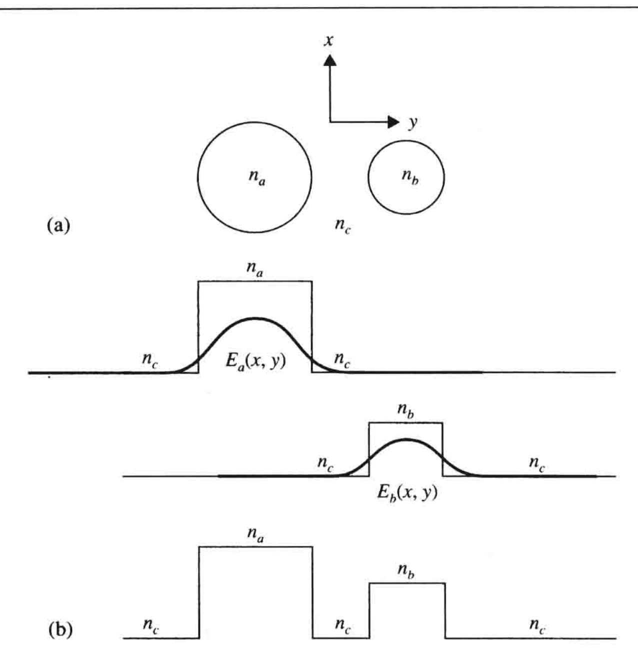


图 13.2　两个平行介质波导结构举例：(a)分开有限距离的两个圆柱形平行介质波导；(b)分开有限距离的两个平行板介质波导。n_a 和 n_b 是芯层介质的折射率，n_c 包层介质的折射率

令 $n^2(x,y)$ 是如图 13.2 所示的复合波导结构中的折射率分布。它可以写为

$$n^2(x,y)=\begin{cases}n_a^2,\text{芯区}a\\ n_b^2,\text{芯区}b\\ n_c^2,\text{其他}\end{cases}\tag{13.3-2}$$

为了在模式耦合中计算方便，定义

$$\Delta n_a^2(x,y)=\begin{cases}n_a^2-n_c^2,\text{芯区}a\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

$$\Delta n_b^2(x,y)=\begin{cases}n_b^2-n_c^2,\text{芯区}a\\ 0,\text{其他}\end{cases}\tag{13.3-3}$$

$$n_s^2(x,y)=n_c^2$$

复合波导结构中的折射率可以写成

$$n^2(x,y)=n_s^2(x,y)+\Delta n_a^2(x,y)+\Delta n_b^2(x,y)\tag{13.3-4}$$

这里 $n_s^2(x,y)$ 代表了两个波导芯外区域的折射率分布，$\Delta n_a^2(x,y)$ 代表了波导 a，而 $\Delta n_b^2(x,y)$ 代表了波导 b。根据这个定义，波导 a 的折射率为 $n_a^2(x,y)=n_s^2(x,y)+\Delta n_a^2(x,y)$，波导 b 的折射率为 $n_b^2(x,y)=n_s^2(x,y)+\Delta n_b^2(x,y)$。因此各个波导模式 $\mathscr{E}_\alpha(x,y)$ （$\alpha=a,b$）满足方程：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\omega^2}{c^2}[n_s^2(x,y)+\Delta n_\alpha^2(x,y)]\right)\mathscr{E}_\alpha(x,y)=\beta_\alpha^2\mathscr{E}_\alpha(x,y)\tag{13.3-5}$$

由于波导 b 的存在，模式 $\mathscr{E}_a(x,y)\exp[i(wt-\beta_a z)]$ 的传播中会有 $\Delta n_b^2(x,y)$ 的干扰项，对波导 a 也有同样的情况。式（13.3-1）表示的实际的波传播电场要遵守波动方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\left[n_s^{\ 2}(x,y)+\Delta n_a^{\ 2}(x,y)+\Delta n_b^{\ 2}(x,y)\right]\right)\boldsymbol{E}=0 \quad (13.3\text{-}6)$$

现在的问题转化为解决振幅分别为 $A(z)$和 $B(z)$的模式情况。将式（13.3-1）中的 $\boldsymbol{E}$ 代入式（13.3-6）中并假定在 z 方向的振幅变化是微小的。利用式（13.3-5），得到

$$\begin{aligned}&-2i\beta_a\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}z}\mathscr{E}_a\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\beta_a z)}-2i\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}z}\mathscr{E}_b\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\beta_b z)}\\&=-\frac{\omega^2}{c^2}\Delta n_b^2(x,\ y)A\mathscr{E}_a\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\beta_a z)}-\frac{\omega^2}{c^2}\Delta n_a^2(x,\ y)B\mathscr{E}_b\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\beta_b z)}\end{aligned} \quad (13.3\text{-}7)$$

分别用$\mathscr{E}_a^*(x,y)$ 和$\mathscr{E}_b^*(x,y)$ 对式（13.3-7）进行标量相乘并对整个 xy 域积分。用式（13.2-4）归一化，得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}z}&=-i\kappa_{ab}B\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta_a-\beta_b)}-i\kappa_{aa}A\\\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}z}&=-i\kappa_{ba}A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\beta_a-\beta_b)}-i\kappa_{bb}B\end{aligned} \quad (13.3\text{-}8)$$

式中

$$\begin{aligned}\kappa_{ab}&=\frac{\omega}{4}\varepsilon_0\iint\mathscr{E}_a^*\cdot\Delta n_a^2(x,\ y)\,\mathscr{E}_b\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\\kappa_{ba}&=\frac{\omega}{4}\varepsilon_0\iint\mathscr{E}_b^*\cdot\Delta n_b^2(x,\ y)\,\mathscr{E}_a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned} \quad (13.3\text{-}9)$$

$$\begin{aligned}\kappa_{aa}&=\frac{\omega}{4}\varepsilon_0\iint\mathscr{E}_a^*\cdot\Delta n_b^2(x,\ y)\mathscr{E}_a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\\kappa_{bb}&=\frac{\omega}{4}\varepsilon_0\iint\mathscr{E}_b^*\cdot\Delta n_a^2(x,\ y)\mathscr{E}_b\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned} \quad (13.3\text{-}10)$$

在式（13.3-8）中，假设波导不是靠得很近，那么模式函数的积分重叠就很小，为

$$\iint\mathscr{E}_a^*\cdot\mathscr{E}_b\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\ll\iint\mathscr{E}_a^*\cdot\mathscr{E}_a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad (13.3\text{-}11)$$

由于另一个光波导的存在，对于一个光波导来说会有一个介质微扰，用 κ_{aa}、κ_{bb} 的形式来表示，而 β_a 和 β_b 分别代表了各自传输常量微小的修正（见式（13.2-11）和式（13.2-17））。κ_{ab} 和 κ_{ba} 表示两个波导间的交叉耦合。尽管在式（13.3-9）中它们存在不同，但是这两个耦合常量（κ_{ab} 和 κ_{ba}）实际上是共扼对，即 $\kappa_{ba}=\kappa^*_{ab}$。这一关系对于保证能量的守恒是尤为重要的（见习题 13.3）。因此，如果将总电场写成

$$\boldsymbol{E}(x,\ y,\ z,\ t)=A(z)\mathscr{E}_a\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\omega t-(\beta_a+\kappa_{aa})z]}+B(z)\mathscr{E}_b\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\omega t-(\beta_b+\kappa_{bb})z]} \quad (13.3\text{-}12)$$

以取代式（13.3-1），则耦合方程式（13.3-8）变成

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}z}&=-i\kappa_{ab}B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\delta z}\\\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}z}&=-i\kappa_{ba}A\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\delta z}\end{aligned} \quad (13.3\text{-}13)$$

式中 2δ 是相位失配，可表示为

$$2\delta=(\beta_a+\kappa_{aa})-(\beta_b+\kappa_{bb}) \quad (13.3\text{-}14)$$

式（13.3-13）的解对应了波导 a（如：$A(0)=A_0$, $B(0)=0$）的单一的输入，可写为

$$A(z)=A_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta z}(\cos sz-i\frac{\delta}{s}\sin sz)$$
$$B(z)=-iA_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta z}\frac{\kappa}{s}\sin sz \tag{13.3-15}$$

这里假设 $\kappa_{ab}=\kappa_{ba}=\kappa$ 且

$$s=\sqrt{\kappa^2+\delta^2} \tag{13.3-16}$$

这两个波导中的能量表达式为 $P_a(z)=|A(z)|^2$ 和 $P_b(z)=|B(z)|^2$，方程的解变为

$$P_a(z)=P_0-P_b(z)$$
$$P_b(z)=P_0\frac{\kappa^2}{\kappa^2+\delta^2}\sin^2[(\kappa^2+\delta^2)^{1/2}z] \tag{13.3-17}$$

式中 $P_0=\left|A(0)\right|^2=A_0^2$ 是波导 a 在 z=0 处的输入功率。如果 $\delta=0$（即两个模的相速度相等），在距离 $L=\pi/2\kappa$ 处就会发生功率的完全转换。当 $\delta\neq 0$ 时，由式（13.3-17）得最大功率转换比为

$$\frac{\kappa^2}{\kappa^2+\delta^2} \tag{13.3-18}$$

式中耦合常数 $\kappa=\kappa_{ab}=\kappa_{ba}$ 由式（13.3-9）给出，由于是两个平行波导，耦合常量可以用第 3 章的显式表达式来表示。在这种两个完全对称的平板波导的特殊情况下，其相同 TE 模式的传播耦合常量为

$$\kappa=\frac{2h^2q\mathrm{e}^{-ps}}{\beta(t+2/q)(h^2+q^2)}(\frac{2\pi}{\lambda})^2(n_2^2-n_1^2) \tag{13.3-19}$$

式中 t 是波导宽度，s 是间隔，q 和 h 由第 3 章中的式（3.1-9）给定。

容易把结果推广到垂直和水平方向皆受到限制的两个平行的波导情形。在模受到限制的情形下 $t\gg 2/q$，式（13.3-19）可以简化为

$$\kappa=\frac{2h^2q\mathrm{e}^{-ps}}{\beta t(h^2+q^2)}(\frac{2\pi}{\lambda})^2(n_2^2-n_1^2) \tag{13.3-20}$$

当 $\lambda\approx 1\mu\mathrm{m}$，$t$，$s\approx$ 3μm 以及 Δn～5×10^{-3} 时，典型的 κ 值为 $\kappa\approx 5\mathrm{cm}^{-1}$，所以耦合距离约为 $\kappa^{-1}\approx 2\mathrm{mm}$ 的量级。

基于定向耦合[1]原理的电光开关的形式如下：耦合器的长度 L 的选择使得 $\delta=0$(同步情形)，$\kappa L=\pi/2$。由式（13.3-17）可知，所有输入波导 b 的功率将在 $z=L$ 处完全转换到波导 a 中。为了达到开关作用，在波导 a（或 b）上加一个电场来改变其传播常数，直到

$$\delta L=\frac{1}{2}(\beta_a-\beta_b)L=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi \tag{13.3-21}$$

即 $\delta=\sqrt{3}\kappa$。由式（13.3-17）可知，当 δ 为上述值时

$$P_a=P_0\text{ 和 }\quad P_b=0 \tag{13.3-22}$$

即功率重新在波导 a 的输出端出现。所以，对 δ 的控制可以用来完成功率在波导 a 和 b 的输出之间任意的分配。

实际上，一种控制 δ 的简便的方法是，在电光晶体（如铌酸锂 $LiNbO_3$）中制作定向耦合器。在这种情况下，根据式（9.1-17），两波导间的电场 E 将引起折射率变化

$$\Delta n \propto n^3 rE \tag{13.3-23}$$

式中 r 是电光张量元。Δn 将引起传播常数的变化

$$\delta \approx \frac{\omega}{c}\Delta n \approx \frac{\omega}{c} n^3 rE \tag{13.3-24}$$

由图 13.3 所示，通用电压作用，可以控制定向耦合器使能量从每一条臂上输出。图 13.4 为波导提供电场作用的电极几何图。

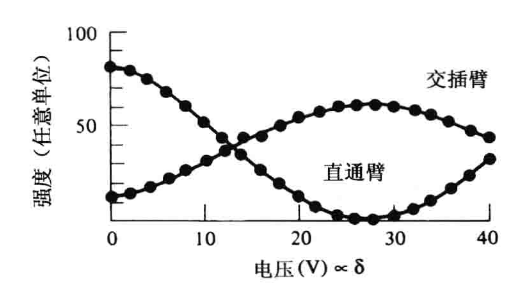


图 13.3　从定向耦合器（电压控制）的每一条臂输出的功率随相位失配常数 δ 变化的曲线（引自参考文献[2]）

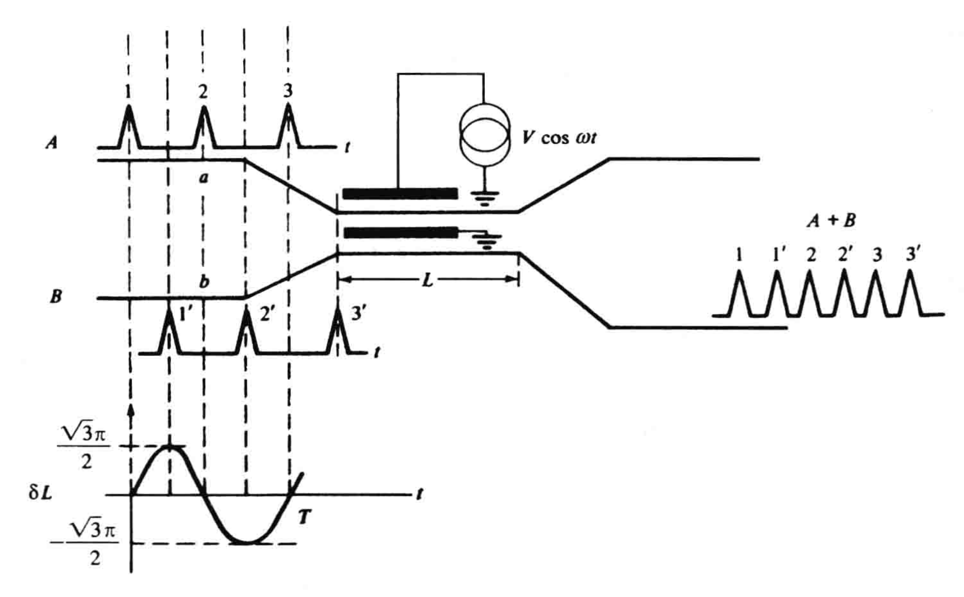


图 13.4　定向耦合器的复用与解复用结构。两波导用实线 a，b 表示，被靠近在 z=0 和 z=L 区内。波导 a 上有一对电极,可通过施加电场产生相位失调

电光调制的定向耦合器的有趣的应用是在超高频（大于 5×10^9 Hz）抽样以及二进制光脉冲序列的复用和解复用。图 13.4 给出了一个有关后者的例子。两个独立、同步的数据脉冲序列 A 和 B 分别输入定向耦合器的两臂 a 和 b。耦合部分的长度满足功率转换条件 $\kappa L = \pi/2$。如上面所述，在一个波导上加上电场，两波导间的相位失配 δ 得到了控制，此电场源于频率为 ω_m 的微波信号。结果在最大或最小电压时，达到相位失配的极值，满足条件式（13.3-21）

$$\left|\delta_{\text{最大}}\right| = \frac{\sqrt{3}\pi}{2L} \tag{13.3-25}$$

从而，当微波信号达到极值时，B 脉冲序列同步到达 b 臂并出射。相反，A 脉冲序列是在加上外加电场，δ 为 0 时（$\kappa L=\pi/2$），穿越并从 b 臂出射。结果是，脉冲序列 A、B 交叠在一起或在电场的作用下在波导 b 的输出交叉复用。从 b 臂出射的组合输出被反馈进入第二个定向耦合器（被一频率为 $2\omega_m$ 信号馈电）的输入端，并与第二组数据序列复用，如此等等。

此装置当然也可以作为一个解复用器反过来工作，如图从右到左，把密集比特序列 $A+B$ 输入 b，然后分成 A、B 两序列。

近似波函数和传播常量

除了耦合模分析，微扰理论也能用于求波方程的近似解，而波方程是决定复合结构中电磁辐射的传播的。换言之，实际传播模式能通过微扰分析来建立。当波函数以及独立波导的本征值（传播常数）已知，而波函数闭式解和复合波导结构特征值不能得出时，这种方法尤其有效。

同样，让 $\mathscr{E}_a(x,y)\exp[i(\omega t-\beta_a z)]$ 和 $\mathscr{E}_b(x,y)\exp[i(\omega t-\beta_b z)]$ 作为独立波导的传播基模，复合结构的波导模可用下式近似

$$\boldsymbol{E}(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta z}=[C_a\mathscr{E}_a(x,y)+C_b\mathscr{E}_b(x,y)]\exp[-i\beta z)] \tag{13.3-26}$$

式中 C_a 和 C_b 是常量。只要波导之间不是太靠近这种近似就是合适的。为了计算传播常量 β 及估算 C_a 和 C_b，根据方程式（13.3-4）将折射率分解为三部分。将方程式（13.3-26）代入方程式（13.3-6）并利用方程式（13.3-5），得到

$$C_a\left(\beta_a^2+\frac{\omega^2}{c^2}\Delta n_b^2(x,y)-\beta^2\right)\mathscr{E}_a+C_b\left(\beta_b^2+\frac{\omega^2}{c^2}\Delta n_a^2(x,y)-\beta^2\right)\mathscr{E}_b=0 \tag{13.3-27}$$

取方程式（13.3-27）的标量解分别为 $\mathscr{E}_a^*(x,y)$ 和 $\mathscr{E}_b^*(x,y)$，并在整个 xy 平面内积分。于是导出下列关于 C_a 和 C_b 的线性方程

$$\begin{bmatrix}\beta_a^2-\beta^2+K_a & J_a+I^*(\beta_b^2-\beta^2)\\ J_b+I(\beta_a^2-\beta^2) & \beta_b^2-\beta^2+K_b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_a\\ C_b\end{bmatrix}=0 \tag{13.3-28}$$

式中 I，J_a，J_b，K_a，K_b 是由下式给出的

$$\begin{aligned}
I&=\iint \mathscr{E}_b^*\cdot\mathscr{E}_a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
J_a&=\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\iint \mathscr{E}_a^*\cdot\Delta n_a^2(x,y)\,\mathscr{E}_b\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
J_b&=\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\iint \mathscr{E}_b^*\cdot\Delta n_b^2(x,y)\,\mathscr{E}_a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
K_a&=\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\iint \mathscr{E}_a^*\cdot\Delta n_b^2(x,y)\,\mathscr{E}_a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
K_b&=\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\iint \mathscr{E}_b^*\cdot\Delta n_a^2(x,y)\,\mathscr{E}_b\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
\end{aligned} \tag{13.3-29}$$

且有下列归一化条件

$$\iint \mathscr{E}_a^* \cdot \mathscr{E}_a \, dx \, dy = \iint \mathscr{E}_b^* \cdot \mathscr{E}_b \, dx \, dy = 1 \tag{13.3-30}$$

这些积分在整个 xy 平面得出。这里 $\Delta n_a^2(x, y)$ 和 $\Delta n_b^2(x, y)$ 只有在 a 和 b 中心存在。照理说，I 是两个不正交的独立波函数的重叠积分，K_a 和 K_b 分别是一个波导对另一个波导的介质微扰，而 J_a 和 J_b 表示两波导间的交叉耦合。

本征值 β_1 和 β_2 是特征方程的解

$$\begin{vmatrix} \beta_a^2 - \beta^2 + K_a & J_a + I^*(\beta_b^2 - \beta^2) \\ J_b + I(\beta_a^2 - \beta^2) & \beta_b^2 - \beta^2 + K_b \end{vmatrix} = 0 \tag{13.3-31}$$

这是含 β^2 的二次方程，且一般会得出两个传播常量 β_1 和 β_2。相应的波函数能通过解两个常量 C_a和C_b 得出。

特殊情况下，当两个波导是相同的（也就是说 $\beta_a^2 = \beta_b^2 = \beta_0^2$，$K_a = K_b = K$，且 $J_a = J_b = J$），传播常量和相关波函数由下式可表示为

$$\begin{aligned} \beta_1^2 &= \beta_0^2 + \frac{K + J}{1 + I} \\ \beta_2^2 &= \beta_0^2 + \frac{K - J}{1 - I} \end{aligned} \tag{13.3-32}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2(1 + I)}} (\mathscr{E}_a + \mathscr{E}_b) \\ \boldsymbol{E}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2(1 - I)}} (\mathscr{E}_a - \mathscr{E}_b) \end{aligned} \tag{13.3-33}$$

波函数 $\boldsymbol{E}_1$ 和传播常量 β_1 所表示的模式是含有对称波函数的基模。波函数 $\boldsymbol{E}_2$ 和传播常量 β_2 所表示的模式是含反对称波函数的高阶模。注意这些波函数是彼此正交的。

13.4　*N* 个平行相同波导间的耦合——超模

周期阵列排列的波导的传播模式，包含 N 个相同波导，在激光二极管阵列中通常称为超模。激光二极管阵列的示意图如图 13.5 所示。此阵列包含三个在普通衬底上的平行波导，虽然 N 个相同平板介质波导的闭合解可以得出，通常更需要用数值分析来解波导阵列的传播模式。

在前面的章节中，用微扰法得出两个平行波导的波函数和传播常量的近似解，现在将这种方法应用于 N 个相同波导。图 13.6 显示了 N 个平行相同平板波导的例子。

为了方便阐述概念，假设每个独立波导只支持一个受限模式。这样，超模波函数可写成独立波导非微扰波函数的线性组合

$$\boldsymbol{E}(x, y)e^{-i\beta z} = \left(\sum_{n=1}^{N} C_n \mathscr{E}_n(x, y) \right) e^{-i\beta z} \tag{13.4-1}$$

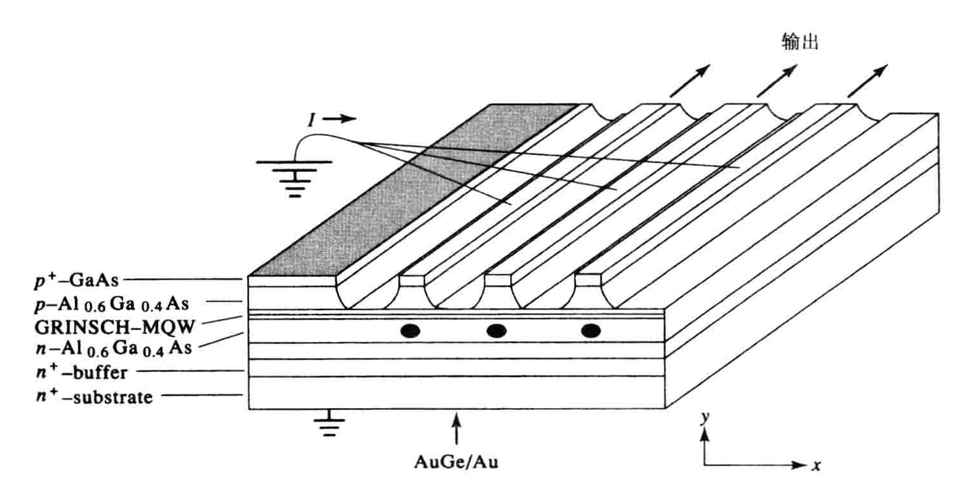


图 13.5　三个沟道的半导体激光阵列，椭圆点表示受限传播模式的独立波函数的强度分布（参照文献[3]）

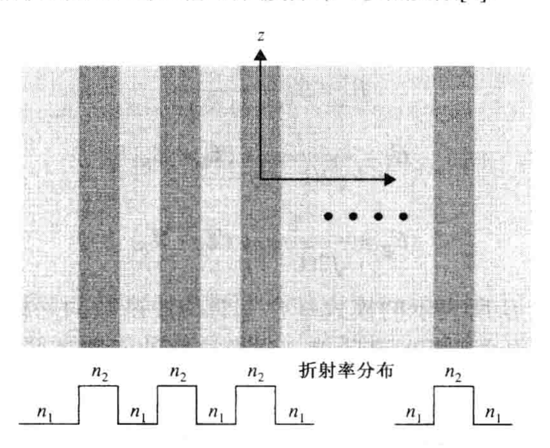


图 13.6　N 个平行相同平板波导的简单例子，结构中包含等间隔的 N 平行介质平板，下方的图表示折射率分布（$n_1 < n_2$）

式中 C_n 是常量，β 是待定的传播常量，$\mathscr{E}_n$（x，y）是当波导间隔是无穷时第 n 个波导支持的模式的非微扰波函数。这种扩展下，忽略与不同传播常量的模式的耦合（例如：辐射模式）。按照推导方程式（13.3-28）的方法并假设只存在最邻接耦合，于是得出

$$\begin{bmatrix} K-\Delta & J-I\Delta & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ J-I\Delta & K-\Delta & J-I\Delta & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J-I\Delta & K-\Delta & J-I\Delta & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J-I\Delta & K-\Delta & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & K-\Delta & J-I\Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & J-I\Delta & K-\Delta & J-I\Delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & J-I\Delta & K-\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ \vdots \\ C_{N-2} \\ C_{N-1} \\ C_N \end{bmatrix} = 0 \qquad (13.4\text{-}2)$$

式中 I，J，K 是方程式（13.3-29）中为相邻波导定义的整数，Δ 由下式给出

$$\Delta=\beta^2-\beta_0^2 \tag{13.4-3}$$

式中 β_0 是一个独立非微扰波导模式的传播常量。在推导式（13.4-2）中，用了结论 $I^*=I$，$J_a=J_b=J$，$K_a=K_b=K$。

注意到方程式（13.4-2）的矩阵中除了对角线及临近对角线元素外都是零。这是最近邻耦合的结果。另外，所有对角线元素等于（$K-\Delta$），并且所有非对角线非零元素等于（$J-I\Delta$）。这是因为所有独立波导都等同且空间均匀分布。这种简单且对称矩阵方程可以用闭合式解。

矩阵方程式（13.4-2）可以写成递推形式

$$(J-I\Delta)C_n+(K-\Delta)C_{n+1}+(J-I\Delta)C_{n+2}=0 \tag{13.4-4}$$

边界条件

$$C_{N+1}=C_0=0 \tag{13.4-5}$$

方程式（13.4-4）的解在满足上述边界条件下可以写成

$$C_n=\sin\frac{ns\pi}{N+1},\quad n=1,2,3,\cdots,N \tag{13.4-6}$$

式中 s 是由下式给出的任意整数

$$s=1,2,3,\cdots,N \tag{13.4-7}$$

注意到有 N 个独立解法，每个都对应于一个整数 s，在方程式（13.4-4）中用方程式（13.4-6）替代 C_n，得到第 s 个超模的传播常量的闭合式解

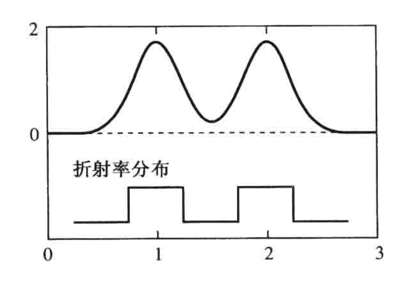
$$\beta_s^2-\beta_0^2=\Delta=\frac{K+2J\cos[s\pi/(N+1)]}{1+2I\cos[s\pi/(N+1)]},\quad s=1,2,3,\cdots,N \tag{13.4-8}$$

其中 β_0 是单个波导当波导间隔为无穷时的受限模的传播常量，并且此时 I，J，K 是方程式（13.3-29）中为相邻波导定义的整数。如果重叠整数 I 远小于 1（$I\ll 1$），方程式（13.4-8）可近似写成

$$\beta_s^2-\beta_0^2=\Delta=K+2J\cos\frac{s\pi}{N+1},\quad s=1,2,3,\cdots,N \tag{13.4-9}$$

注意到有 N 个独立超模，传播常量跨度为 $K\pm2J$ 的区域。考虑到 N 接近无穷的情况，这种情况下，传播常量跨越宽度为 $4J$ 的连续带。

为了与前面的两个耦合波导的结论相比较，令方程式（13.4-8）中的 N=2。根据方程式（13.4-8）的传播常量和方程式（13.4-1）和式（13.4-6）的波函数，与前面所得的结论是相等的。图 13.7 显示了当 N=2 时的波函数。



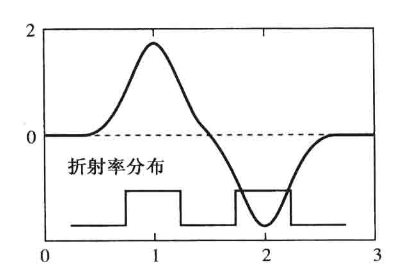


图 13.7　两个平行等同波导的超模的波函数

为了进一步应用微扰法，看下面的例子。

例：一个五通道波导。

考虑五个同样的空间均匀分布的平行波导，假设独立波导支持仅一种传播限制模式。求超模的传播常量和波函数。在方程式（13.4-9）中取 N=5，s=1，2，3，4，5，得到下列传播常量：

$$\beta_1^2 = \beta_0^2 + K + \sqrt{3}J$$
$$\beta_2^2 = \beta_0^2 + K + J$$
$$\beta_3^2 = \beta_0^2 + K$$
$$\beta_4^2 = \beta_0^2 + K - J$$
$$\beta_5^2 = \beta_0^2 + K - \sqrt{3}J$$

波函数可以在方程式（13.4-1）和式（13.4-6）中取 N=5，s=1，2，3，4，5，结果为

$$\boldsymbol{E}_1(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_1 z} = \left(\frac{1}{2}\mathscr{E}_1(x,y) + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathscr{E}_2(x,y) + \mathscr{E}_3(x,y) + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathscr{E}_4(x,y) + \frac{1}{2}\mathscr{E}_5(x,y)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_1 z}$$

$$\boldsymbol{E}_2(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_2 z} = (\mathscr{E}_1(x,y) + \mathscr{E}_2(x,y) - \mathscr{E}_4(x,y) - \mathscr{E}_5(x,y))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_2 z}$$

$$\boldsymbol{E}_3(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_3 z} = (\mathscr{E}_1(x,y) - \mathscr{E}_3(x,y) + \mathscr{E}_5(x,y))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_3 z}$$

$$\boldsymbol{E}_4(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_4 z} = (\mathscr{E}_1(x,y) - \mathscr{E}_2(x,y) + \mathscr{E}_4(x,y) - \mathscr{E}_5(x,y))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_4 z}$$

$$\boldsymbol{E}_5(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_5 z} = \left(\frac{1}{2}\mathscr{E}_1(x,y) - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathscr{E}_2(x,y) + \mathscr{E}_3(x,y) - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathscr{E}_4(x,y) + \frac{1}{2}\mathscr{E}_5(x,y)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_5 z}$$

注意到这些波函数没有归一化，但它们彼此正交。图 13.8 显示了五个模式的波函数。

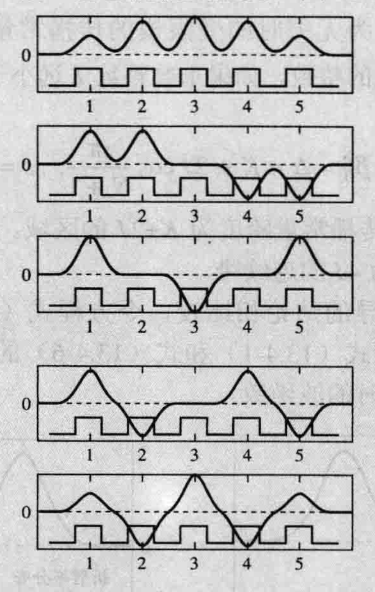


图 13.8　五个平行相同波导的超模的波函数

13.5 相位匹配和频率选择性耦合——复用

根据式（13.3-18），两平行波导间最大的能量耦合效率为

$$\frac{\kappa^2}{\kappa^2+\delta^2} \tag{13.5-1}$$

式中 κ 为耦合常数，δ 与两波导传播常数之差成正比。当 $\kappa \ll \delta$ 时，耦合效率会非常低。两种不同波导之间可以高效率地耦合，即使两波导之间存在由频率选择引起的周期性介质微扰。

可以参照图 13.9 来分析波导间模式耦合。在第 12 章中介绍的一般性分析法在两波导间存在周期性介质微扰的情况下同样适用。

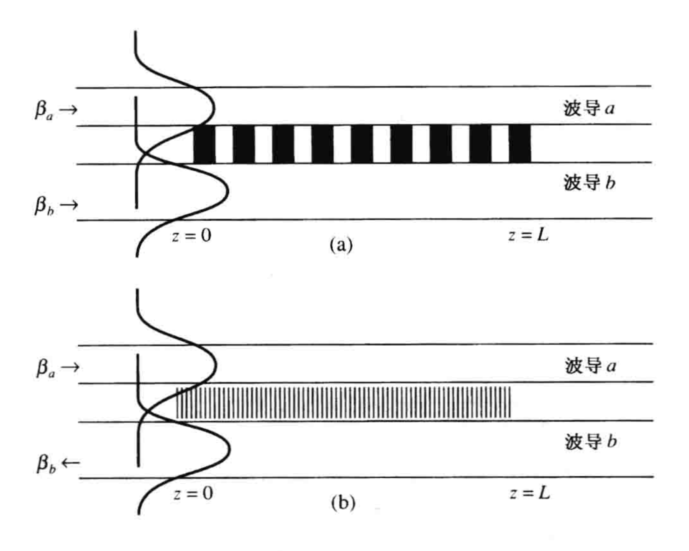


图 13.9　(a)波导间的同向耦合；(b)波导间的反向耦合

假设两波导的模式传播常数相差很大（如，$\kappa_{ab} \ll |\beta_b-\beta_a|$），那么在没有周期性介质微扰时，耦合就可以忽略不计。图 13.9(a)给出了同向耦合时的情况，通常存在于长周期光栅中。图 13.9(b)给出了反向耦合时的情况，通常存在于短周期（或高频）光栅中。

同向光栅耦合器

此时，光波的电场可以写成

$$\boldsymbol{E}(x,y,z)=A(z)\mathscr{E}_a(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_a z}+B(z)\mathscr{E}_b(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_b z} \tag{13.5-2}$$

式中 $A(z)$和 $B(z)$是关于 z 的模式振幅函数。当存在周期性介质微扰时，由方程（12.4-39）得到通解

$$\begin{aligned}A(z)&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Delta\beta/2)z}\left[\left(\cos sz-i\frac{\Delta\beta}{2}\frac{\sin sz}{s}\right)A(0)-i\kappa\frac{\sin sz}{s}B(0)\right]\\B(z)&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Delta\beta/2)z}\left[-i\kappa^*\frac{\sin sz}{s}A(0)+\left(\cos sz+i\frac{\Delta\beta}{2}\frac{\sin sz}{s}\right)B(0)\right]\end{aligned} \tag{13.5-3}$$

式中

$$s^2 = \kappa^*\kappa + \left(\frac{\Delta\beta}{2}\right)^2 \tag{13.5-4}$$

$$\kappa = \frac{\omega}{4}\int \mathscr{E}_a^*(x, y) \cdot \varepsilon_m(x, y)\,\mathscr{E}_b\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{13.5-5}$$

$$\Delta\beta = \beta_a - \beta_b - m\frac{2\pi}{\Lambda} = 0 \tag{13.5-6}$$

式中 Λ 是介质微扰的周期，$\varepsilon_m(x, y)$ 是周期性的介质微扰的第 m 个傅里叶分量，A（0）和 B（0）是 z=0 处的模式的幅度。

如果一束光沿 z=0 方向入射（例如，B（0）= 0），上述解变为

$$\begin{aligned} A(z) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Delta\beta/2)z}\left(\cos sz - i\frac{\Delta\beta}{2}\frac{\sin sz}{s}\right)A(0) \\ B(z) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Delta\beta/2)z}\left(-i\kappa^*\frac{\sin sz}{s}\right)A(0) \end{aligned} \tag{13.5-7}$$

耦合效率（或者衍射效率）定义为

$$\eta = \left|\frac{B(L)}{A(0)}\right|^2 \tag{13.5-8}$$

式中 L 是互作用长度。利用等式（13.5-7），得到

$$\eta = \frac{|\kappa|^2}{|\kappa|^2 + (\Delta\beta/2)^2}\sin^2|\kappa|L\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta\beta}{2|\kappa|}\right)^2} \tag{13.5-9}$$

现在把耦合效率看做波长的函数。设 λ_0 是满足相位匹配条件的中心波长，即

$$\Delta\beta = \beta_a - \beta_b - m\frac{2\pi}{\Lambda} = n_a\frac{2\pi}{\lambda_0} - n_b\frac{2\pi}{\lambda_0} - m\frac{2\pi}{\Lambda} = 0, \quad \text{at } \lambda = \lambda_0 \tag{13.5-10}$$

式中 n_a 和 n_b 分别是各波导传输模式的有效折射率。根据式（13.5-10），对于同向耦合的相位匹配需要的光栅周期为

$$\Lambda = m\frac{\lambda_0}{|n_a - n_b|}, \quad m = 1, 2, 3, \cdots \tag{13.5-11}$$

如果假设有效折射率对与 $1/\lambda$ 相当的波长的扰动不敏感，那么在一般波长的情况下相位差 $\Delta\beta$ 可以写成

$$\Delta\beta = (n_a - n_b)\left(\frac{2\pi}{\lambda} - \frac{2\pi}{\lambda_0}\right) \tag{13.5-12}$$

进一步假设互作用长度为 $|\kappa|L = \pi/2$，当波长 $\lambda = \lambda_0$ 时耦合效率为 100%。由式（13.5-9），当 $\Delta\beta = 1.60|\kappa|$（假设 $|\kappa|L = \pi/2$）时耦合效率降为 50%。利用式（13.5-9）和式（13.5-12），得到 FWHM 带宽

$$\Delta\lambda = 1.60\frac{\lambda_0^2}{\pi|n_a - n_b|}|\kappa| \tag{13.5-13}$$

考虑两个平行波导的例子，其中 $n_a = 1.50$，$n_b = 1.51$，$|\kappa| = 5\text{cm}^{-1}$，$\lambda_0 = 1\mu\text{m}$。由

式（13.5-13）得 $\Delta\lambda = 25\text{nm}$。根据式（13.5-11），相位匹配需要的光栅周期为 100μm 的整数倍。一般情况下，同向耦合的带宽很宽。带宽反比于有效折射率差$|n_a - n_b|$，且正比于耦合常数。因此如果想要窄带耦合（例如，在选频耦合器中），应设计差异很大、耦合常数小的波导。必须注意在一个小的耦合常数需要很长的互作用长度（$|\kappa|L = \pi/2$）才能达到 100%的耦合效率。

利用$|\kappa|L = \pi/2$ 和式（13.5-11）的光栅周期，耦合带宽又可以写为（假设 m=1）

$$\Delta\lambda = 0.8\frac{\lambda_0}{N} \tag{13.5-14}$$

式中 N 是光栅周期数（$N = \Lambda / L$）。得到光栅耦合的带宽反比于周期数 N。

反向光栅耦合器

在这种情况下光传输的电场可以写成

$$\boldsymbol{E}(x, y, z) = A(z)\mathscr{E}_a(x, y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_a z} + B(z)\mathscr{E}_b(x, y)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\beta_b z} \tag{13.5-15}$$

式中 $A(z)$和 $B(z)$是模式幅度且是 z 的函数。波导 b 的模式$\mathscr{E}_b(x,y)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\beta_b z}$沿$-z$ 方向传输。根据 12.4 节反向耦合器服从边界条件的一般解为

$$\begin{aligned} A(z) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Delta\beta/2)z}\,\frac{s\cosh s(L-z) + i(\Delta\beta/2)\sinh s(L-z)}{s\cosh sL + i(\Delta\beta/2)\sinh sL}A(0) \\ B(z) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Delta\beta/2)z}\,\frac{-i\kappa^*\sinh s(L-z)}{s\cosh sL + i(\Delta\beta/2)\sinh sL}A(0) \end{aligned} \tag{13.5-16}$$

式中

$$s^2 = \kappa^*\kappa - \left(\frac{\Delta\beta}{2}\right)^2 \tag{13.5-17}$$

$$\Delta\beta = \beta_a + \beta_b - m\frac{2\pi}{\Lambda} = 0 \tag{13.5-18}$$

式中 κ 是公式（13.5-5）中给出的耦合系数，$A(0)$是 z=0 时输入模式的幅度。由上面的解 $B(z)$，在 z=0 和 z=L 区域中两种模式的能量耦合效率为

$$\eta = \frac{|B(0)|^2}{|A(0)|^2} = \frac{|\kappa|^2\sinh^2 sL}{s^2\cosh^2 sL + (\Delta\beta/2)^2\sinh^2 sL} \tag{13.5-19}$$

现在讨论反向光栅耦合器的频率选择性质。假设 $\Delta\beta = 0$ 时的波长为 λ_0。反向耦合满足相位匹配条件所需的光栅的周期为

$$\Lambda = m\frac{\lambda_0}{|n_a + n_b|}, \quad m = 1, 2, 3, \cdots \tag{13.5-20}$$

在这个波长处的耦合效率为

$$\eta(\lambda_0) = \frac{|B(0)|^2}{|A(0)|^2} = \tanh^2|\kappa|L \tag{13.5-21}$$

根据前面的讨论，当波长不等于 λ_0 时相位差可以写成

$$\Delta\beta = (n_a + n_b)\left(\frac{2\pi}{\lambda} - \frac{2\pi}{\lambda_0}\right) \tag{13.5-22}$$

式中 n_a 和 n_b 是光波导模式的有效折射率。

根据图 12.19 和在 12.4 节中的讨论，反向耦合的带宽可以表示为

$$\Delta\beta = 4|\kappa| \tag{13.5-23}$$

利用式（13.5-22）和式（13.5-23），得到反向耦合的带宽为

$$\Delta\lambda = \frac{2\lambda_0^2}{\pi(n_a + n_b)}|\kappa| \tag{13.5-24}$$

由反向耦合的结果，发现分母与两个有效折射率的和成正比。这就导致了一个很窄的带宽，即具有很强的频率选择的优点。

利用两个平行波导的例子，其中 n_o=1.50，n_b=1.51，$|\kappa|$=5cm^{-1}，$\lambda_0 = 1\mu m$，对于反向耦合，上面的方程式满足 $\Delta\lambda = 0.11nm$。根据式（13.5-20），满足相位匹配的光栅周期是 0.33μm 的整数倍。通常的，反向耦合的带宽是相对较窄的，带宽反比于有效折射率的和（$n_a + n_b$），并且正比例于耦合常数$|\kappa|$。

利用 $|\kappa|L = \pi/2$，根据式（13.5-21）和光栅周期公式（13.5-20）得到峰值耦合效率是 84%，耦合带宽可以写为（假设 m=1）

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0}{N} \tag{13.5-25}$$

式中 N 是光栅中的周期数（$N = \Lambda / L$）。需要指出的是在这种情况下，光栅耦合的带宽同样反比于周期数 N。需要注意的是当$|\kappa|L$是接近 1 时表达式是有效的。如果当$|\kappa|L \gg 1$，必须要由式（13.5-24）得到带宽。在这种情况下，由式（13.5-24）可得到相互作用长度 L 的增大将不会使带宽减小。这是模式振幅 $A(z)$和 $B(z)$沿 z 轴方向的指数式衰减特性的直接结果。

反向光栅耦合的频率选择特性在利用密集波分复用（DWDM）的光通信中是必要的。在密集波分复用（DWDM）的光通信系统中，应用许多不同频率的信道来增加网络的传输容量。图 13.10 表示了 DWDM 光纤通信系统的反向光栅耦合器的示意图。

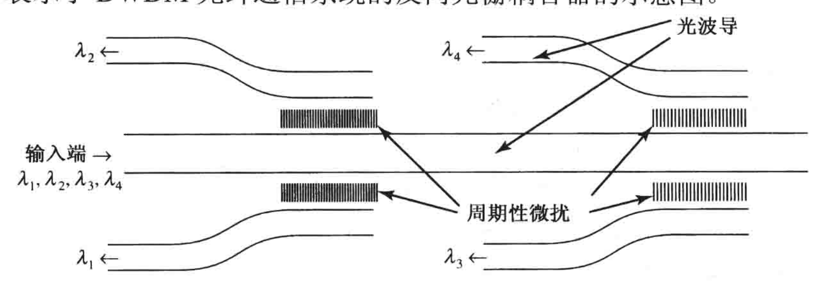


图 13.10　用于 DWDM 光纤通信系统的频率反向光栅耦合器（引自参考文献 4）

13.6　模式转换器

这里考虑在多模光波导间的耦合和单模波导（例如单模光纤）的两个极化模式间的耦合。令 $\boldsymbol{E}_1(x,y)\exp(-i\beta_1 z)$ 和 $\boldsymbol{E}_2(x,y)\exp(-i\beta_2 z)$ 为波导中传播的模式的电场。在波导中的总电场可以写为

$$\boldsymbol{E}(x,y,z) = A_1\boldsymbol{E}_1(x,y)\exp(-i\beta_1 z) + A_2\boldsymbol{E}_2(x,y)\exp(-i\beta_2 z) \tag{13.6-1}$$

式中 A_1 和 A_2 是模式的幅度，β_1 和 β_2 是传播常数。在没有色散的理想光纤中，模式幅度是常数。

在模式转换器中，会引入微扰，从而引起模式间的耦合和能量交换。因此，模式幅度 A_1 和 A_2 依赖于传播距离 z。接下来，将首先考虑多模波导中的模式间耦合，接着考虑单模波导（例如单模光纤）的两种极化模式间的耦合。

多模波导中的模式转换

参照图 13.11，首先研究两种具有不同传播常数（$\beta_1 \neq \beta_2$）的模式间的耦合。基于前面的讨论，当下面的条件满足时产生有效的耦合和能量交换：

（a）存在周期为 Λ 的周期性微扰，$\beta_1 - \beta_2 = m(2\pi/\Lambda)$，其中 m 是非零整数。

（b）两个波函数 $\boldsymbol{E}_1(x,y)$、$\boldsymbol{E}_2(x,y)$ 和介质微扰的第 m 个傅里叶分量 $\varepsilon_m(x,y)$ 间出现足够的重叠，使得耦合常数

$$\kappa = C_{12}^{(m)} = \frac{\omega}{4}\int \boldsymbol{E}_1^*(x,y)\cdot\varepsilon_m(x,y)\boldsymbol{E}_2(x,y)\,\mathrm{d}x \tag{13.6-2}$$

被式（12.4-18）中定义为非零数。

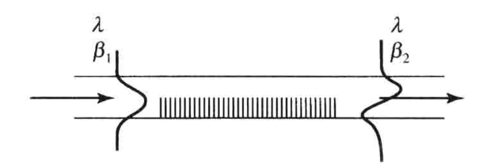


图 13.11　在介质平板波导中由能量模式 1 转换为能量模式 2 的模式转化器的示意图

当波导中两模式耦合时，能量从一个模式传到另一个模式，反之亦然。为确保能量从一个模式完全传到另一个中，选择一个合适的耦合长度积（例如 $|\kappa|L = \pi/2$）很重要。

模式转换的一个最重要的应用是光纤通信中特殊的色散补偿。正如在第 3 章中，由硅制成的单模光纤在 $\lambda = 1550$nm 的光谱区域周围，呈现出 D=17ps/nm·km 的色散。在多模光纤中（例如，V>2.405 的阶跃折射率硅光纤中），一些高阶模（例如 LP_{02} 模）可以呈现出达到 −500ps/nm·km 的负色散。在光通信中，这种负色散可以被用于色散补偿。图 13.12 表示了色散补偿的基本原理图，它利用了支持具有大的负色散的高阶模式的多模光纤。

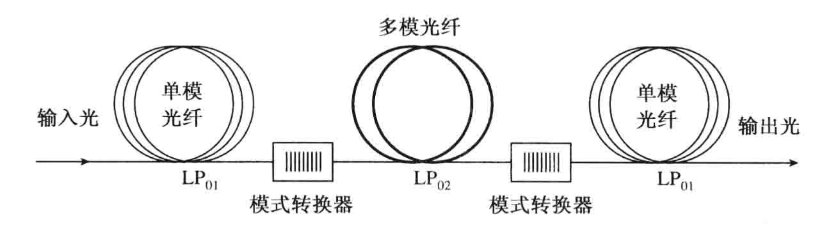


图 13.12　一种利用高阶模呈负色散传输的多模光纤的色散补偿方法。该模式转换器把光能从 LP_{01} 模式转化到 LP_{02} 模式，再通过多模光纤传输后转化回 LP_{01} 模式

在实际的光通信应用中，如图 13.12 所示的多模光纤必须设计为支持非常少的受限模式。这将消除传输常数差很小的模式间互相干扰的问题。而且多模光纤必须和对应的单模光

纤拥有相似或相同的芯径。这样能确保有效耦合使得结点处插入损耗最小。如果芯径吻合较好，单模光纤中的能量将会激发多模光纤中的基模（LP_{01}）。这将需要一个模式转换器把光能从基模转化到所需的高阶模式（例如 LP_{02}）。同时需要另一个模式转化器将能量转回到基模（LP_{01}）以使在单模光纤中产生一个有效的耦合。

偏正模式转换

一般来说，所有的波导模式都是偏正的。在平面波导中（例如平板波导）有 TE 模式和和 TM 模式，二者互相正交。两种类型的模式的传输常数通常是不同的，甚至在仅有一个 TE 模式和 TM 模式的波导中也是不同的。在环形介质波导中（例如硅质光纤），存在线性偏正模式（LP_{lmx} 和 LP_{lmy} 模式），两者也是互相正交的。由于存在环形对称，它们（拥有相同的 lm）拥有相同的传输常数。事实上，在单模光纤中有两种偏正模式，LP_{01x} 和 LP_{01y} 模式。这两种模式都是沿着光纤的轴线传输（z 轴）。在保偏光纤（或者双折射光纤）中，不存在环形对称，所以 LP_{01x} 和 LP_{01y} 模式具有不同的传输常数。基于前面的讨论，若能满足下列条件，就能产生有效耦合和偏正模式间的能量转换：

（a）如果两个偏振模的传播常数的差异足够大，那么就需要一个周期为Λ的周期性微扰。其周期Λ必须满足公式 $\beta_1-\beta_2=m(2\pi/\Lambda)$，其中 m 是非零整数。

（b）介质扰动第 m 个傅里叶分量 $\varepsilon_m(x,y)$ 必须含有非对角张量元素，从而使方程（13.6-2）定义的耦合常数是非零的。

接下来，研究在偏振模之间的耦合。从耦合方程式（12.4-28）开始

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A_1=-i\kappa A_2(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\beta z}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A_2=-i\kappa^*A_1(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta\beta z}\qquad(13.6\text{-}3)$$

式中 A_1 是一个偏振模的振幅，A_2 是另一个偏振模的振幅，与介质微扰 $\Delta\varepsilon(x,y,z)$ 相对应的耦合常数是 κ，并有

$$\Delta\beta=\beta_1-\beta_2\qquad(13.6\text{-}4)$$

假设介质微扰的耦合常数为

$$\kappa=C_{12}^{(m)}=\frac{\omega}{4}\int\boldsymbol{E}_1^*(x,y)\cdot\varepsilon(x,y)\boldsymbol{E}_2(x,y)\mathrm{d}x\qquad(13.6\text{-}5)$$

为了阐述偏振模的耦合，考虑在环形单模光纤中激发的特殊偏振模，相应的$\Delta\beta=0$。在这种情况下，边界条件为 $A_2(0)=0$。耦合方程的解可以写成

$$A_1(z)=A_1(0)\cos|\kappa z|$$
$$A_2(z)=-i\frac{\kappa^*}{|\kappa|}A_1(0)\sin|\kappa z|\qquad(13.6\text{-}6)$$

这里假设 κ 是常数，$A_1(0)$ 是在 $z=0$ 处输入的偏振模振幅。因为两个模的传播常数相同，能量就在两个偏振模之间来回耦合。如果光纤的长度足够长，存在介质微扰而形成的偏振模能耦合，围绕通常是弯曲或者压力等外界因素。因此，耦合常数 κ 是一个随 z 慢变化且随机函数。这种情况下，解可以近似表示为

$$A_1(z)=A_1(0)\cos|X|$$

$$A_2(z) = -i\frac{X^*}{|X|}A_1(0)\sin|X| \tag{13.6-7}$$

式中

$$X = \int_0^z \kappa \mathrm{d}z \tag{13.6-8}$$

通常 X 是由耦合性质决定的一个复变量。对于一个长度固定和随机变化的耦合常数的环形光纤，X 就是随机复变量。这时，输出偏振也是随机变化的。

为了避免两个偏振模之间的随机耦合，可以使用芯层为椭圆形的一些特殊光纤（见图 13.13）。这种光纤允许有不同的传播常数的两个偏振模。对于图 13.13 中所示的椭圆芯区的光纤，其长轴与坐标系的 y 轴平行。能够看出 LP_{01y} 的传播常数比 LP_{01x} 要大得多。换句话说，基模（含有最大的 β 值的模式）沿着椭圆芯区的长轴被偏振化。实际上，应用外部干扰能使圆形光纤变成一个椭圆形光纤。

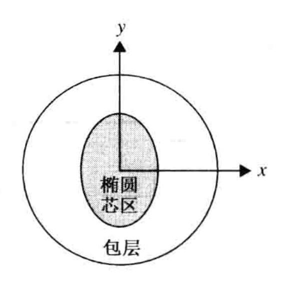


图 13.13　一个椭圆芯区的光纤。两个偏振模式的传播常数是 $\beta_{\mathrm{LP}_{01x}} < \beta_{\mathrm{LP}_{01y}}$

如果光纤的芯区具有很大的椭圆率，传播常数的差异（$\Delta\beta = \beta_{\mathrm{LP}_{01x}} - \beta_{\mathrm{LP}_{01y}}$）就足够大，从而抑制能量在偏振模式中耦合。这些光纤被称为保偏光纤（PMFs）。在偏振模式中耦合的能量百分比为

$$\eta = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + (\Delta\beta/2)^2} \tag{13.6-9}$$

习题

13.1　推导方程式（13.2-18）

$$\delta\beta_m^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\iint \mathscr{E}_m^* \cdot \Delta n^2(x,y)\mathscr{E}_m \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint \mathscr{E}_m^* \cdot \mathscr{E}_m \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} = \frac{\omega^2}{c^2}\langle \Delta n^2(x,y)\rangle$$

传输常数 β^2 的修正值等于微扰的期望值。

13.2　证明，在无损波导中，总的功率流等于各个模式功率流之和。

13.3　用狄拉克算符重写方程式（13.3-5）并记

$$(L + \Delta n_\alpha^2)|\alpha\rangle = \beta_\alpha^2|\alpha\rangle,\quad \alpha = a,b$$

L 是线性厄米特算符表示 $\nabla_t^2 + \omega^2[n_s^2(x,y)]/c^2$ 其中 $\nabla_t^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$。

（a）证明：用这种记法耦合常数式（13.3-9）成为

$$\kappa_{ab} = \langle a|\Delta n_a^2|b\rangle \omega\varepsilon_0 / 4$$
$$\kappa_{ba} = \langle b|\Delta n_b^2|a\rangle \omega\varepsilon_0 / 4$$

证明 $\kappa_{ba} = \kappa_{ab}^*$，耦合方程式（13.3-13）的形式与模式功率守恒定律是一致的。

（b）推导式（13.3-15）。

（c）证明式（13.3-15）与能量守恒定律是一致的。

13.4

（a）证明方程式（13.3-33）中的波函数是彼此正交的。

（b）画出波函数。

13.5　参考图 P13.5 考虑双包层圆芯光纤，附加包层折射率 $n_c < n_2$。

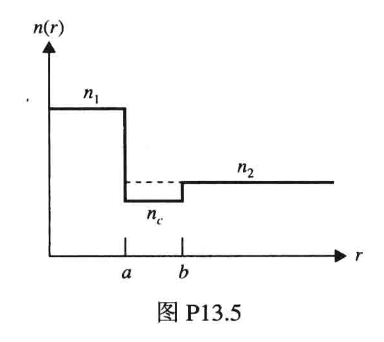


图 P13.5

（a）把附加的包层作为一个介质微扰，写出微扰值 $\Delta n^2(r)$。

（b）以这种渐变折射率光纤模型为基础，计算由介质微扰引起的传播常数的修正。

13.6　参考图 P13.6，考虑一个椭圆芯光纤 $\delta = a - b \ll a$。

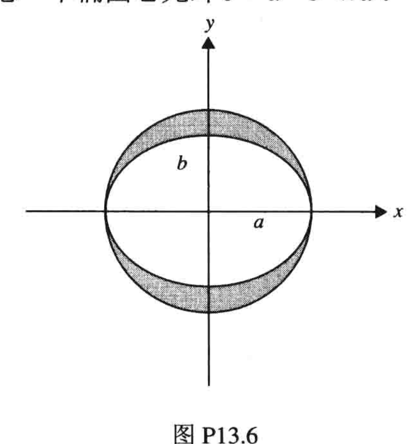


图 P13.6

（a）把阴影区域看成是介质微扰，写出微扰值 $\Delta n^2(x, y)$。

（b）以渐变折射率光纤的基模（LP_{01}）为基础，证明在无微扰光纤的芯区，场强度可以写成

$$|E|^2=\begin{cases}|A|^2 J_0^2(hr)+\left|\dfrac{hA}{2\beta}\right|^2 4J_1^2(hr)\cos^2\phi, \mathrm{LP}_{01x}\\ |A|^2 J_0^2(hr)+\left|\dfrac{hA}{2\beta}\right|^2 4J_1^2(hr)\sin^2\phi, \mathrm{LP}_{01y}\end{cases}$$

如果忽略小项$(hA/2\beta)^2$，证明场强积分为

$$\langle E|E\rangle=\pi a^2|A|^2\left(1+\frac{h^2}{q^2}\right)J_1^2(ha)$$

（c）用海尔曼-费曼定理（习题 13.1）证明：

$$\Delta\bar{n}=\bar{n}_{\mathrm{LP}_{01x}}-\bar{n}_{\mathrm{LP}_{01y}}=\frac{q^2h^2}{2\beta^2(q^2+h^2)}\frac{a-b}{a}(n_1-n_2)$$

假定$\delta=a-b\leqslant a$。可以认为当 r=a 时，场值与阴影区的保持相同。

（d）对于单模光纤 SMF-28，计算双折射率 n_2=1.4600，n_1=1.4628，a=4.7μm，和$\lambda=1.55\mu\mathrm{m}$。需要解出$\beta$,$q$ 和 h。

13.7　设$(\boldsymbol{E}_m,\boldsymbol{H}_m)$和（$\boldsymbol{E}_n,\boldsymbol{H}_n$）作为无损介质波导的任意模式，且$I_{mn}$满足

$$I_{mn}=\frac{1}{2}\iint(\boldsymbol{E}_m\times\boldsymbol{H}_n^*)\cdot\hat{z}\mathrm{d}a=\delta_{mn}$$

（a）证明

$$I_{mn}=\frac{\beta_n}{2\omega\mu}\iint(\boldsymbol{E}_m\cdot\boldsymbol{E}_n^*)\mathrm{d}a+\frac{i}{2\omega\mu}\iint(\boldsymbol{E}_m\cdot\nabla)\boldsymbol{E}_{nz}^*\mathrm{d}a$$

这个公式表示了 TE 模式的正交性可简化为

$$\frac{\beta_n}{2\omega\mu}\iint(\boldsymbol{E}_m\cdot\boldsymbol{E}_n^*)\mathrm{d}a=\delta_{mn}\,(\mathrm{TE})$$

（提示：使用矢量公式$[\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})]\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{C}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$。）

（b）证明利用（a）和部分积分

$$2\delta_{mn}=I_{mn}^*+I_{mn}=\frac{\beta_n+\beta_m}{2\omega\mu}\iint(\boldsymbol{E}_m\cdot\boldsymbol{E}_n^*)\mathrm{d}a+\frac{i}{2\omega\mu}\iint\left(\boldsymbol{E}_{nz}^*\nabla\cdot\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{E}_{mz}^*\nabla\cdot\boldsymbol{E}_n\right)\mathrm{d}a$$

由$\nabla\boldsymbol{E}=0$或者$\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\boldsymbol{E}=0$可以得到（a）中的正交关系。

（c）按照在（a）和（b）的步骤，用I_{mn}同样的定义。证明

$$I_{mn}=\frac{\beta_n}{2\omega\mu}\iint\left(\boldsymbol{H}_m\cdot\frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{H}_n^*\right)\mathrm{d}a+\frac{i}{2\omega}\iint\frac{1}{\varepsilon}(\boldsymbol{H}_m\cdot\nabla)\boldsymbol{H}_{nz}^*\mathrm{d}a$$

因此对于 TM 模式，$\boldsymbol{H}_z=0$，正交关系可简化为

$$\frac{\beta_m}{2\omega}\iint\left(\boldsymbol{H}_m\cdot\frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{H}_n^*\right)\mathrm{d}a=\delta_{mn}\,(\mathrm{TM})$$

（d）证明$\boldsymbol{H}\cdot\nabla\varepsilon=0$或者$\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\boldsymbol{H}=0$可以满足（c）式的正交关系。

13.8　在电光模耦合$\beta_m^{\mathrm{TM}}\neq\beta_m^{\mathrm{TE}}$情况下，可用在传播方向上周期性的光电常数或者电场得到相位匹配。在实践中怎样实现？（可自由发挥。）

13.9　对于模式间向相反方向传输功率的耦合情况下，耦合方程可写成

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}z}=\kappa_{ab}B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\beta_b-\beta_a)z},\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}z}=\kappa_{ab}^{*}A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\beta_b-\beta_a)z}$$

（a）证明能量守恒可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(|A|^2-|B|^2\right)=0$$

（b）证明式（13.5-16）的解满足上述条件。

13.10　假设两个波导不相同。解方程式（13.3-28）的本征值问题：

$$\begin{bmatrix}\beta_a^2-\beta^2+K_a & J_a+I^*\left(\beta_a^2-\beta^2\right)\\ J_b+I\left(\beta_a^2-\beta^2\right) & \beta_b^2-\beta^2+K_b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_a\\ C_b\end{bmatrix}=0$$

（a）推导本征值和本征模式，假设传输常数为 β_a 和 β_b。

（b）假设在每一个波导中存在指数式增益常数 γ_a 和 γ_b。推导本征值和本征模式。（提示：利用复数形式的传输常数 $\beta_a'=\beta_a+i\gamma_a/2$ 和 $\beta_b'=\beta_b+i\gamma_b/2$。）

13.11　参照图 13.5，假设光波导之间的区域是高吸收区。定性解释用 $(++\cdots+)$ 表示的超模比用 $(+-+-\cdots+)$ 表示的超模在给定的注入电流下具有较小的模式增益的原因。（提示：利用式（13.4-6)。）

13.12　考虑如图 13.4-2（作者有误）所示线形阵列。令波导在 x 方向间隔距离 Λ（中心到中心）。在输出端（z=0）的场可写为

$$E(x,y)=\sum_{n=1}^{N}C_n\mathscr{E}_n(x,y)=\sum_{n=1}^{N}C_n\mathscr{E}_0(x-n\Lambda,y)$$

式中 $\mathscr{E}_0$（x，y）是波导中模式的波函数。

利用式（2.12-32），远场强度分布可写为

$$F\left(x_1,y_1\right)\propto\iint E\left(x,y\right)\exp[ik(xx_1+yy_1)/L]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

式中 L 是相对输出端的测量距离，$\left(x_1,y_1\right)$ 是观测平面的坐标。定义 $\theta=x_1/L$ 是观测角。

（a）证明：$F\left(x_1,y_1\right)\propto\sum_{n=1}^{N}C_n\exp(ikn\Lambda\theta)\iint\mathscr{E}_0\left(x,y\right)\exp[ik(xx_1+yy_1)/L]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

如果 $\mathscr{E}_0$（x,y）可近似为 δ 函数 $\delta\left(x,y\right)$，证明

$$F\left(\theta\right)\propto\sum_{n=1}^{N}C_n\exp(ikn\Lambda\theta)$$

（b）当 C_n 从 1 到所有的 n，估算超模的总和。

（c）当 $C_n=\left(-1\right)^n$，估算超模的总和。

13.13　在介质波导中受限模式的磁场能量积分等于电场能量积分。

（a）从式（13.1-1）到式（13.1-2），证明：

$$i\omega(\boldsymbol{H}^*\cdot\mu\boldsymbol{H}-\boldsymbol{E}^*\cdot\varepsilon\boldsymbol{E})=\nabla\left(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right)$$

（b）证明：以式（13.1-3，4）形式的导波有

$$\int\boldsymbol{H}^*\cdot\mu\boldsymbol{H}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int E^*\cdot\varepsilon\boldsymbol{E}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中积分包含整个 xy 平面。换句话说，磁场能量积分等于电场能量积分。

参考文献

1. Somekh, S., E. Garmire, A. Yariv, H. L. Garvin, and R. G. Hunsperger, Channel optical waveguide directional couplers. *Appl. Phys. Lett.* **27**:327 (1975).
2. Campbell, J. C., F. A. Blum, D. W. Shaw, and K. L. Lawley, GaAs electro-optic directional-coupler switch. *Appl. Phys. Lett.* **27**:202 (1975).
3. Kapon, E., C. Lindsey, J. Katz, S. Margalit, and A. Yariv, Coupling mechanism of gain guided laser arrays. *Appl. Phys. Lett.* **44**:389 (1984).
4. Yeh, P., and H. F. Taylor, Contradirectional frequency-selective couplers for guided-wave optics. *Appl. Opt.* **19**:2848 (1980).

第 14 章　光纤中的非线性光学效应

14.0　引言

用于光通信中的光纤大多数都是由熔融硅材料（SiO_2）制成的。熔融硅材料在 1550nm 波段附近呈现低损耗特性。在石英光纤中，非线性光学效应相对较小，其克尔系数 n_2 为 $\sim 3\times10^{-20}\,m^2/W$。然而由于作用长度可能相对较长（例如，数千米），因此在高功率、长距离光纤中非线性光学效应是不能被忽略的。目前，在用掺铒光纤放大器（EDFA）作为光传输功率放大器的波分复用（WDM）光网络中，非线性光学效应变得尤为重要。密集波分复用（DWDM）光网络中的信道波长即频率，是根据国际电信联盟（ITU）组织的规定来分配的：信道之间在频率上是等间隔的（例如，100GHz 或 50GHz）。目前，在以 25GHz 和 50GHz 为典型频率间隔的等距、密集多波长信道中，由于非线性光学四波混频作用（FWM），会造成相邻信道间的码间窜扰。此外，一些非线性光学效应也会随着信道光功率的增加而增强。 在大部分有用的光学材料中，硅具有最低的非线性光学效应。尽管如此，在 DWDM 光网络中，由于光纤口径小，导致光功率密度较高以及传输距离较长，因此即使光功率在毫瓦级水平，非线性效应也是要列入考虑的。这章中我们将讨论单模光纤中的各种非线性光学效应。其中包括四波混频（FWM），交叉相位调制（XPM），自相位调制（SPM），相位共轭，波长转换，以及光孤子传输。

14.1　克尔效应和自相位调制

我们考虑单束光在单模光纤中传播的情况。设 z 轴为光纤的光轴。由第 8 章的光克尔效应可知，二氧化硅的折射率可以写成

$$n = n_0 + n_2 I \tag{14.1-1}$$

式中 I 表示光强，n_0 表示光强趋于零时的折射率，n_2 是光学克尔系数（单位为 m^2/W）。在单模石英光纤中，n_0 和光强 I 都是空间坐标（x,y,z）的函数。对于线偏振模（LP_{01}），根据方程（3.3-33）或方程（1.4-1），光强可写成

$$I = \frac{\beta}{2\omega\mu}|\boldsymbol{E}(x, y)|^2 \tag{14.1-2}$$

式中 β 表示传播常数，$\boldsymbol{E}(x, y)$ 是如第 3 章所描述的传播模的波函数。由于对坐标的依赖，式（14.1-1）可以被改写为

$$n = n_0(x, y) + n_2 I(x, y) \tag{14.1-3}$$

式中 $n_0(x, y)$ 表示光纤折射率分布函数，非线性对折射率的贡献可以看做一个小微扰。根据第 13 章所描述的微扰理论，我们可以计算出非线性项 $n_2 I(x, y)$ 对传播常数的影响。由式（13.2-18）知，由于克尔效应的影响，传播常数可以修改为

$$\delta\beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\iint E^* \cdot \Delta n^2(x, y) E \, dx \, dy}{\iint |E(x, y)|^2 \, dx \, dy} = \frac{\omega^2}{c^2}\langle \Delta n^2(x, y)\rangle \tag{14.1-4}$$

对于典型的光束强度，$n_2 I(x, y) \ll n_0$，因此$\delta\beta \ll \beta$，利用式（14.1-3），上式可写成

$$2\beta\, \delta\beta = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\iint E \cdot 2n_0 n_2 I(x, y) E \, dx \, dy}{\iint |E(x, y)|^2 \, dx \, dy} \tag{14.1-5}$$

对于用于光通信中的大多数阶跃型光纤，折射率差（$n_{芯} - n_{包}$）相对于纤芯折射率$n_{芯}$是很小的，在这种情况下，由式（14.1-2）可知，式（14.1-5）可被写成

$$2\beta\, \delta\beta = 2n_{\mathrm{eff}} n_2 \frac{\beta}{2\omega\mu}\frac{\omega^2}{c^2}\frac{\iint |E(x, y)|^4 \, dx \, dy}{\iint |E(x, y)|^2 \, dx \, dy} \tag{14.1-6}$$

式中n_{eff}是等效折射率，其定义为

$$\beta = n_{\mathrm{eff}}\frac{\omega}{c} \tag{14.1-7}$$

在得到式（14.1-6）时，我们假定n_2在整个光纤结构中是常数。这是合理的，因为大多数光纤的纤芯和包层都是石英制成的。利用式（14.1-7）和式（14.1-6），我们得到了在克尔效应下，传播模的等效折射率的修正表达式如下式给出

$$\delta n_{\mathrm{eff}} = n_2 \frac{\beta}{2\omega\mu}\frac{\iint |E(x, y)|^4 \, dx \, dy}{\iint |E(x, y)|^2 \, dx \, dy} \tag{14.1-8}$$

现在，我们可以定义光纤传播模的有效面积

$$A_{\mathrm{eff}} = \frac{\left(\iint |E(x, y)|^2 \, dx \, dy\right)^2}{\iint |E(x, y)|^4 \, dx \, dy} \tag{14.1-9}$$

式中$\boldsymbol{E}(x, y)$是模的波函数，对等效折射率的修正可写成

$$\delta n_{\mathrm{eff}} = n_2 \frac{\frac{\beta}{2\omega\mu}\iint |E(x, y)|^2 \, dx \, dy}{A_{\mathrm{eff}}} \tag{14.1-10}$$

我们注意到，上式的分子就是光束的光功率P，所以对等效折射率的修正可写成

$$\delta n_{\mathrm{eff}} = n_2 \frac{P}{A_{\mathrm{eff}}} \tag{14.1-11}$$

式中 P 表示模的功率，A_{eff}是光纤中传播模的有效面积。A_{eff}是光纤传播模式中的一个很重

要的参数。这个参数与传播模的波函数有关，取决于波导结构。对于高斯分布波函数的特殊情形

$$\boldsymbol{E}(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{a^2}\right) \tag{14.1-12}$$

式中有效面积为

$$A_{\text{eff}} = \pi a^2 \tag{14.1-13}$$

有效面积 A_{eff} 衡量即模式所占的物理面积，对于一个束缚模式，有效面积就近似是波导的纤芯。在极端情况下，当波函数在纤芯内分布均相同，而纤芯以外均为 0 时，有效面积就是纤芯的面积。

例：克尔效应引起的等效折射率的改变。

考虑在有效面积为 $100\mu\text{m}^2$ 的单模光纤中传输功率为 10mW 的光波模，克尔效应引起的传播模式的等效折射率的改变为

$$P = 10\text{mW}$$
$$A_{\text{eff}} = 100\mu\text{m}^2$$
$$n_2 = 3\times10^{-20}\,\text{m}^2/\text{W}$$
$$\delta n_{\text{eff}} = n_2 I_{\text{eff}} = n_2\frac{P}{A_{\text{eff}}} = 3\times10^{-12}$$

因此等效折射率的改变很小。然而，在长度为 L 的光纤中，由等效折射率引起的相移变化为

$$\delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta n_{\text{eff}} L \tag{14.1-14}$$

其中 L 是光纤的长度，λ 是光波长，对于 $\lambda = 1.5\mu\text{m}$，L 在 100km 范围内，相移相当大，能达到 1 弧度量级。

当入射光纤的光束由一串代表信号的光脉冲组成时，克尔效应引起的相移是时间的函数。它遵循方程式（14.1-11）。实际上，本征光克尔效应是相对较快的，所以等效折射率几乎是随着局部光强的变化而立刻改变的。因此对于高频（或宽带）信号，克尔效应引起的相移是时间的迅变函数。克尔效应会引起时变相移，从而导致所谓的自相位调制（SPM）和交叉相位调制（XPM）现象。

自相位调制

我们考虑一束光在长度为 L 的单模光纤中传输的情形，在光纤的输出端（$z=L$），这束光的电场可以写成

$$E(x, y, L, t) = A_0\psi(x, y)\exp[i(\omega t - kL)] = A_0\psi(x, y)\exp[i(\omega t - \phi)] \tag{14.1-15}$$

式中 A_0 是常数，ω 为频率，$\psi(x, y)$ 是传播模的波函数。相移 ϕ 可写成

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} n_{\text{eff}} L \tag{14.1-16}$$

利用式（14.1-16）和式（14.1-11），我们可将因克尔效应引起的相移写成

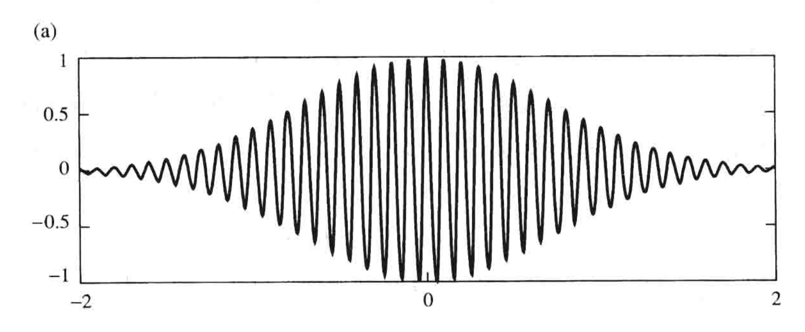
$$\delta\phi(t)=\frac{2\pi}{\lambda}\delta n_{\text{eff}}L=\frac{2\pi}{\lambda}n_2L\frac{P(t)}{A_{\text{eff}}}\equiv\frac{2\pi}{\lambda}n_2LI_{\text{eff}}(t) \tag{14.1-17}$$

$I_{\text{eff}}(t)$是等效光强（$P(t)/A_{\text{eff}}$）。这种光束在单模光纤中的相移是由光束自身的瞬时强度引起的。如果光束的相位随时间变化，我们可定义“局部频率”为

$$\omega'(t)=\frac{\partial}{\partial t}[\omega-\phi(t)]=\omega-\frac{\partial}{\partial t}\delta\phi(t)=\omega-\frac{2\pi}{\lambda}n_2L\frac{\partial}{\partial t}I(t) \tag{14.1-18}$$

ω是光束的原频率，为了简洁，我们去掉了下标 eff。克尔诱导（或自诱导）引起的频率变化为

$$\Delta\omega=\omega'-\omega=-\frac{\partial}{\partial t}\delta\phi(t)=-\frac{2\pi}{\lambda}n_2L\frac{\partial}{\partial t}I(t) \tag{14.1-19}$$



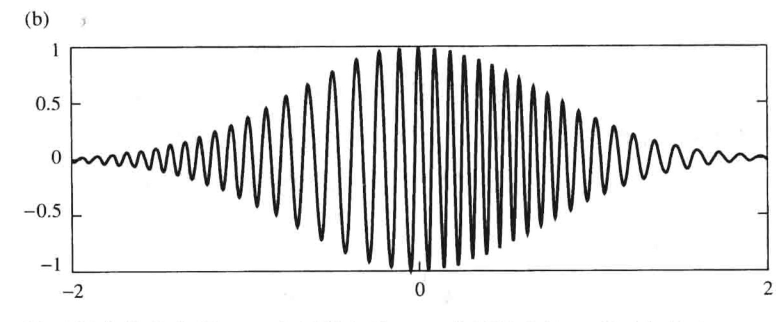


图 14.1　随时间变化的电场：(a)光纤输入端；(b)光纤输出端。所用参数为 $A_{\text{eff}}=100\mu\text{m}^2$，$P$=5mW, L=2500km，$\tau=0.05\text{ps}$，$n_2=3\times10^{-20}\text{m}^2/\text{W}$

为了说明自相位调制及其对频率的影响，我们考虑一个简单的例子，输入光脉冲为高斯脉冲

$$I(t)=I_0\exp(-t^2/\tau^2) \tag{14.1-20}$$

这里 I_0 是常数，τ 表征脉冲持续时间。用式（14.1-20）代替式（14.1-19）中的光强 $I(t)$，我们得到

$$\Delta\omega=\omega'(t)-\omega=\frac{2\pi}{\lambda}n_2L\frac{2t}{\tau^2}I_0\exp\left(\frac{-t^2}{\tau^2}\right) \tag{14.1-21}$$

通过观察上式，我们注意到脉冲前沿（t<0）局部频率降低，而脉冲后沿的局部频率增高，因此当高斯脉冲在单模光纤传输时会因克尔效应而产生时变频率啁啾。在光纤输出端的电场时域函数如图 14.1 所示。我们注意到在输出端脉冲有频率啁啾(b)。式（14.1-12）中的

$\Delta\omega$ 是对由非线性效应造成的频率展宽的一种度量。当强短脉冲在长距离光纤中传输时，频率展宽会变得很严重。

14.2　交叉相位调制——极化

在波分复用（WDM）光网络中，一根光纤中有很多信道。每个信道对应唯一的一个载频（或波长），由于克尔诱导引起折射率的变化，因此一个信道上光强的瞬时变化将对其他信道上的脉冲进行调制，这就是交叉相位调制（XPM）。为了说清楚这个概念，我们考虑两束频率分别为 ω_1 和 ω_2 的波在单模光纤中传播的情况。为简单起见，我们假定两束光波都是偏振光。例如，它们对应于光纤中的 LP_{01x} 模（见第 3 章）。令光束的电场为

$$\boldsymbol{E}(x, y, z, t) = \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{x}}(E_{01}(x, y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1 t-\beta_1 z)} + E_{02}(x, y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_2 t-\beta_2 z)} + \mathrm{c.c.}) \tag{14.2-1}$$

式中 $E_{01}(x, y)$ 和 $E_{02}(x, y)$ 是 LP_{01} 模的波函数，β_1 和 β_2 分别是两束波的传播常数。

根据式（8.6-4），因为两个电场都是在 x 轴方向偏振，因此三阶非线性电极化强度可写成

$$P_x^{(3)}(x, y, z, t) = 4\chi_{1111}E_x E_x E_x \tag{14.2-2}$$

式中 E_x 是 x 方向的电场分量，χ_{1111} 是三阶非线性极化率，上标（3）表示三阶非线性。

我们现在用式（14.2-1）代替 E_x，代入上式得到

$$P_x^{(3)}(x, y, z, t) = \frac{4}{8}\chi_{1111}(E_{01}(x, y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1 t-\beta_1 z)} + E_{02}(x, y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_2 t-\beta_2 z)} + \mathrm{c.c.})^3 \tag{14.2-3}$$

上式中总共有 64 项，这里我们只关心那些含有频率 ω_1 和 ω_2 的项，因为只有这些项才能影响输入场，忽略那些含有 $3\omega_1$、$3\omega_2$、$(2\omega_1-\omega_2)$ 和 $(2\omega_2-\omega_1)$ 的项，得到

$$P_x^{(3)}(x, y, z, t) = \frac{1}{2}(P_{\mathrm{NL}x}^{(\omega_1)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1 t-\beta_1 z)} + P_{\mathrm{NL}x}^{(\omega_2)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_2 t-\beta_2 z)} + \mathrm{c.c.}) \tag{14.2-4}$$

式中非线性电极化强度的振幅为

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{NL}x}^{(\omega_1)} &= \chi_{\mathrm{eff}}^{(3)}(|E_{10}|^2 + 2|E_{20}|^2)E_{10} \\ P_{\mathrm{NL}x}^{(\omega_2)} &= \chi_{\mathrm{eff}}^{(3)}(|E_{20}|^2 + 2|E_{10}|^2)E_{20} \end{aligned} \tag{14.2-5}$$

和

$$\chi_{\mathrm{eff}}^{(3)} = 3\chi_{1111} \tag{14.2-6}$$

我们注意到式（14.2-5）中的第一项与式（8.6-6）是一致的。这项表示 14.1 节中的自相位调制。式（14.2-5）中的第二项代表了交叉相位调制。

如果将非线性电极化强度包括进来，那么在频率为 ω_1 和 ω_2 上总的电极化矢量可写成

$$\begin{aligned} P_x(x, y, z, t) = \frac{1}{2}\{&[\varepsilon_0 n^2(\omega_1) + \chi_{\mathrm{eff}}^{(3)}(|E_{10}|^2 + 2|E_{20}|^2)]E_{10}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1 t-\beta_1 z)} \\ &+ [\varepsilon_0 n^2(\omega_2) + \chi_{\mathrm{eff}}^{(3)}(|E_{20}|^2 + 2|E_{10}|^2)]E_{20}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_2 t-\beta_2 z)} + \mathrm{c.c.}\} \end{aligned} \tag{14.2-7}$$

我们注意到非线性电极化强度等价于每个频率各自的折射率的微小变化，这些变化可以写成

$$\Delta n(\omega_1)=\frac{3\chi_{xxxx}}{2n\varepsilon_0}(|E_{10}|^2+2|E_{20}|^2)=n_2(I_1+2I_2)$$
$$\Delta n(\omega_2)=\frac{3\chi_{xxxx}}{2n\varepsilon_0}(|E_{20}|^2+2|E_{10}|^2)=n_2(I_2+2I_1) \tag{14.2-8}$$

这里我们忽略 n_2 对频率的微小依赖性。两个传播模的强度 I_1， I_2 都是空间坐标（x, y）的函数，根据模式有效面积的定义，我们可以写出模式等效折射率的变化

$$\delta n_{\text{eff}}(\omega_1)=n_2(I_{1\text{eff}}+2I_{2\text{eff}})=n_2\left(\frac{P_1}{A_{1\text{eff}}}+2\frac{P_2}{A_{2\text{eff}}}\right)$$
$$\delta n_{\text{eff}}(\omega_2)=n_2(I_{2\text{eff}}+2I_{1\text{eff}})=n_2\left(\frac{P_2}{A_{2\text{eff}}}+2\frac{P_1}{A_{1\text{eff}}}\right) \tag{14.2-9}$$

这里 P_1、 P_2 分别是模的功率， $A_{1\text{eff}}$, $A_{2\text{eff}}$ 是模式的有效面积。克尔诱导引起的相移可以写成

$$\delta\phi_1=\frac{2\pi}{\lambda_1}L\delta n_{\text{eff}}(\omega_1)=\frac{2\pi}{\lambda_1}Ln_2(I_{1\text{eff}}+2I_{2\text{eff}})=\frac{2\pi}{\lambda_1}Ln_2\left(\frac{P_1}{A_{1\text{eff}}}+2\frac{P_2}{A_{2\text{eff}}}\right)$$
$$\delta\phi_2=\frac{2\pi}{\lambda_2}L\delta n_{\text{eff}}(\omega_2)=\frac{2\pi}{\lambda_2}Ln_2(I_{2\text{eff}}+2I_{1\text{eff}})=\frac{2\pi}{\lambda_2}Ln_2\left(\frac{P_2}{A_{2\text{eff}}}+2\frac{P_1}{A_{1\text{eff}}}\right) \tag{14.2-10}$$

这里我们注意到，第一项与自相位调制（SPM）有关，第二项与交叉相位调制（XPM）有关，当传播模式数多于两个时，交叉相位项必须是对其他所有传播模式求和。由交叉相位调制引起的第 m 个模的相移可写成

$$\delta\phi_{m\text{XPM}}=\frac{4\pi}{\lambda_m}Ln_2\sum_{i\neq m}I_{i\text{eff}}=\frac{4\pi}{\lambda_m}Ln_2\sum_{i\neq m}\frac{P_i}{A_{i\text{eff}}} \tag{14.2-11}$$

这里的求和包括同一根光纤中的所有模式（$i\neq m$）， λ_m 是第 m 个模的波长， P_i 是第 i 个模的功率， $A_{i\text{eff}}$ 是第 i 个模的有效面积。

由克尔诱导引起的第 m 个模式的频率变化是由其他所有模式（$i\neq m$）共同决定的，因此可写成

$$\Delta\omega=\omega'-\omega=-\frac{\partial}{\partial t}\delta\phi_{m\text{XPM}}(t)=-\frac{4\pi}{\lambda_m}n_2L\sum_{i\neq m}\frac{\partial}{\partial t}I_{i\text{eff}}(t) \tag{14.2-12}$$

在波分复用光网络中有许多信道共享一根光纤，每个信道都有自己的波长，总体上说，交叉相位调制会随着信道数的增加而加强。下面我们将考虑同一光波的两个偏振态分量之间的非线性耦合。

同一光波的偏振态耦合

令光波电场强度为

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,t)=\frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{x}}E_{0x}(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\beta_x z)}+\hat{\boldsymbol{y}}E_{0y}(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\beta_y z)}+\text{c.c.}) \tag{14.2-13}$$

式中 $E_{0x}(x,y)$ 和 $E_{0y}(x,y)$ 是 LP_{01} 模的波函数， β_x ,和 β_y 是传播常数，在圆形纤芯光纤中， $\beta_x=\beta_y$ 。为简单起见，我们将式（14.2-13）改写成

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,t)=(\hat{\boldsymbol{x}}E_x+\hat{\boldsymbol{y}}E_y) \tag{14.2-14}$$

我们注意到，E_x，E_y 分别是电场的 x 分量和 y 分量。

根据式（8.6-4），三阶非线性电极化强度矢量可以写成

$$P_i^{(3)}(x, y, z, t) = 4\chi_{ijkl}E_jE_kE_l \tag{14.2-15}$$

式中 E_j 表示式（14.2-13）所给出的电场的第 j 个分量（x 或 y），并假设对重复下标进行求和。现在我们考察式（14.2-15）的非线性电极化强度的 x 分量和 y 分量。利用线偏振模（LP 模）的近似，电场只有 x 分量和 y 分量。那么非线性电极化强度的 x 分量和 y 分量可以写成

$$\begin{aligned} P_x^{(3)}(x, y, z, t) &= 4\chi_{1111}E_xE_xE_x + 4\chi_{1122}E_xE_yE_y + 4\chi_{1212}E_yE_xE_y + 4\chi_{1221}E_yE_yE_x \\ &= 4\chi_{1111}E_xE_xE_x + 4(\chi_{1122} + \chi_{1212} + \chi_{1221})E_xE_yE_y \end{aligned} \tag{14.2-16}$$

$$\begin{aligned} P_y^{(3)}(x, y, z, t) &= 4\chi_{2222}E_yE_yE_y + 4\chi_{2211}E_yE_xE_x + 4\chi_{2121}E_xE_yE_x + 4\chi_{2112}E_xE_xE_y \\ &= 4\chi_{2222}E_yE_yE_y + 4(\chi_{2211} + \chi_{2121} + \chi_{2112})E_yE_xE_x \end{aligned} \tag{14.2-17}$$

这里我们只保留那些非线性系数不为零的项。硅是各向同性介质，在三阶非线性电极化率张量 χ_{ijkl} 中只有 21 个非零元素，其中只有三个元素是独立的。由对称性可得（见习题 14.8）

$$\chi_{1111} = \chi_{1122} + \chi_{1212} + \chi_{1221} \quad \text{and} \quad \chi_{1111} = \chi_{2222} \tag{14.2-18}$$

这样非线性极化强度可以写成

$$P_x^{(3)}(x, y, z, t) = 4\chi_{1111}E_xE_xE_x + 4\chi_{1111}E_xE_yE_y = 4\chi_{1111}E_x(E_xE_x + E_yE_y) \tag{14.2-19}$$

$$\begin{aligned} P_y^{(3)}(x, y, z, t) &= 4\chi_{2222}E_yE_yE_y + 4\chi_{2222}E_yE_xE_x \\ &= 4\chi_{1111}E_yE_yE_y + 4\chi_{1111}E_yE_xE_x = 4\chi_{1111}E_y(E_yE_y + E_xE_x) \end{aligned} \tag{14.2-20}$$

这里也用到了对称性 $\chi_{1122} = \chi_{2211}, \chi_{1212} = \chi_{2121}, \chi_{1221} = \chi_{2112}$。

用式（14.2-13）代替式（14.2-19）和式（14.2-20）中的 E_x，E_y，我们只取非线性项的幅值，并且限制输入光束只能在相同频率 ω 上振荡，可以得到

$$\begin{aligned} P_x^{(3)}(x, y, z, t) &= \chi_{xxxx}\{(\frac{3}{2}|E_{0x}|^2 + \frac{2}{2}|E_{0y}|^2)E_{0x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \beta_x z)} + \frac{1}{2}E_{0y}^2E_{0x}^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \beta' z)}\} + \text{c.c.} \\ P_y^{(3)}(x, y, z, t) &= \chi_{xxxx}\{(\frac{3}{2}|E_{0y}|^2 + \frac{2}{2}|E_{0x}|^2)E_{0y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \beta_y z)} + \frac{1}{2}E_{0x}^2E_{0y}^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \beta'' z)}\} + \text{c.c.} \end{aligned} \tag{14.2-21}$$

式中 β', β'' 为

$$\begin{aligned} \beta' &= 2\beta_y - \beta_x \\ \beta'' &= 2\beta_x - \beta_y \end{aligned} \tag{14.2-22}$$

我们注意到最后一项有不同的传播常数（β', β''），在长距离双折射光纤（当 $|\beta_x - \beta_y|L \gg 1$）中，它们对相位调制的贡献并没有得到累积。这种情况下，由克尔诱导引起的折射率变化可写成

$$\begin{aligned} \Delta n_x &= \frac{3\chi_{xxxx}}{2n\varepsilon_0}(|E_{0x}|^2 + \tfrac{2}{3}|E_{0y}|^2) = n_2(I_{0x} + \tfrac{2}{3}I_{0y}) \\ \Delta n_y &= \frac{3\chi_{xxxx}}{2n\varepsilon_0}(|E_{0y}|^2 + \tfrac{2}{3}|E_{0x}|^2) = n_2(I_{0y} + \tfrac{2}{3}I_{0x}) \end{aligned} \tag{14.2-23}$$

我们注意到，在极化强度分量中都存在自相位调制和交叉相位调制，同理可得由非线性

克尔效应引起的相位变化

$$\delta\phi_x = \frac{2\pi}{\lambda}Ln_2(I_{0x\text{eff}} + \frac{2}{3}I_{0y\text{eff}}) = \frac{2\pi}{\lambda}Ln_2\left(\frac{P_{0x}}{A_{0x\text{eff}}} + \frac{2}{3}\frac{P_{0y}}{A_{0y\text{eff}}}\right)$$

$$\delta\phi_y = \frac{2\pi}{\lambda}Ln_2(I_{0y\text{eff}} + \frac{2}{3}I_{0x\text{eff}}) = \frac{2\pi}{\lambda}Ln_2\left(\frac{P_{0y}}{A_{0y\text{eff}}} + \frac{2}{3}\frac{P_{0x}}{A_{0x\text{eff}}}\right) \tag{14.2-24}$$

式中 $I_{0x\text{eff}}$ 和 $I_{0y\text{eff}}$ 是等效光强，P_{0x} 和 P_{0y} 是功率，$A_{0x\text{eff}}$ 和 $A_{0y\text{eff}}$ 是极化强度分量的有效面积，克尔诱导引起的相位延迟可写为

$$\delta\phi_y - \delta\phi_x = \frac{2\pi}{3\lambda}Ln_2(I_{0y\text{eff}} - I_{0x\text{eff}}) = \frac{2\pi}{3\lambda}Ln_2\left(\frac{P_{0y}}{A_{0y\text{eff}}} - \frac{P_{0x}}{A_{0x\text{eff}}}\right) \tag{14.2-25}$$

由于极化强度分量之间的非线性克尔耦合，诱导相位延迟可以引起光束偏振态的变化（见习题（8.14））。

对于圆形纤芯光纤($\beta_x = \beta_y = \beta$)，非线性极化强度式（14.2-21）变为

$$P_x^{(3)}(x,y,z,t) = \chi_{xxxx}\{(\tfrac{3}{2}|E_{0x}|^2 + \tfrac{2}{2}|E_{0y}|^2)E_{0x} + \tfrac{1}{2}E_{0y}^2E_{0x}^*\}e^{i(\omega t-\beta z)} + \text{c.c.}$$

$$P_y^{(3)}(x,y,z,t) = \chi_{xxxx}\{(\tfrac{3}{2}|E_{0y}|^2 + \tfrac{2}{2}|E_{0x}|^2)E_{0y} + \tfrac{1}{2}E_{0x}^2E_{0y}^*\}e^{i(\omega t-\beta z)} + \text{c.c.} \tag{14.2-26}$$

非线性极化强度的振幅可以写成

$$P_{\text{NL}x}^{(\omega)} = \chi_{xxxx}\{(3|E_{0x}|^2 + 2|E_{0y}|^2)E_{0x} + E_{0y}^2E_{0x}^*\}$$

$$P_{\text{NL}y}^{(\omega)} = \chi_{xxxx}\{(3|E_{0y}|^2 + 2|E_{0x}|^2)E_{0y} + E_{0x}^2E_{0y}^*\} \tag{14.2-27}$$

这与式（8.6-11）是一致的。对于光纤中的偏振光来说，非线性极化强度会导致传播模式的等效折射率发生微小的变化（光克尔效应），如同 8.6 节所讨论的（也可参看习题 8.14）。

14.3　非简并四波混频

到目前为止，我们讨论的自相位调制（SPM）和交叉相位调制（XPM）是由单模光纤中的光克尔效应引起的。在波分复用光网络中有很多光波信道，每个信道都有单一的传播频率。在合适的条件下，不同信道间可能会发生能量交换。这种交换主要由三阶光学非线性所引起，而且发生在四种光波的情况下。这个过程就被称做光的四波混频。在 8.8 节中我们讨论了在非线性大块介质中的四波混频和相位共轭。在本节中，我们将在被广泛应用于光网络的单模光纤中考虑这一过程。当信道间的频率间隔相等时（例如，100GHz）[1,2]，四波混频的影响尤为显著。四波混频会导致信道间不需要的窜扰。在合适的条件下，四波混频可以被用来对时域脉冲进行整形（相位共轭）或者波长转换。大体上说，脉冲在相位共轭作用下，将显示出与啁啾作用相反的效果。这样可以对在另一段长度相同的光纤中传输的光脉冲进行整形和消除色散。

通常情况下，非线性四波混频过程牵涉到四种光波的参与。这种常规的三阶非线性过程，可以看做是输入三种光波，产生第四种光波的过程。令三种输入光波的频率和波矢为 $(\omega_1,\beta_1),(\omega_2,\beta_2),(\omega_3,\beta_3)$,那么第四种光波的频率和波矢$(\omega_4,\beta_4)$可以写成

$$\omega_4 = \omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3 \tag{14.3-1}$$

$$\beta_4 = \beta_1 \pm \beta_2 \pm \beta_3 \tag{14.3-2}$$

这里，我们注意到所有的波矢都是沿着光纤的 z 轴。通常情况下，在非线性四波混频中有很多可能的组合方式。每种组合都会产生一种新的频率、波矢的光波。在用于光通信的硅光纤中，我们只对所有四种频率都在相同或相近的信道波段中的情况感兴趣。换言之，我们只对那些频率差远小于波长频率（例如，$|\omega_m - \omega_n| \ll \omega_n, m,n=1,2,3,4$）的情况感兴趣。因此我们将只讨论以下情况

$$\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 \tag{14.3-3}$$

$$\beta_4 = \beta_1 + \beta_2 - \beta_3 \tag{14.3-4}$$

在四波混频中，不同频率的相对位置如图 14.2 所示。一般而言，四种光波频率都不相同，这就是非简并四波混频（NDFWM）。对于 $\omega_1=\omega_2$ 的特殊情况，则称为部分简并四波混频（PDFWM）。

以上两式可以看做能量守恒和动量守恒。由于波矢 β_4 和频率 ω_4 之间存在色散关系，所以这两个方程可能不能同时满足。这就是先前在 8.8 节中讨论过的相位匹配问题。因此只有在特殊的输入配置同时满足上述两式时，才有单模光纤中的非线性四波混频产生。本节，我们将讨论在单模光纤中，一个很有趣、有用的，并满足相位匹配条件的非线性四波混频装置。特别地，我们将讨论非简并和部分简并四波混频过程，这些过程在包括波长转换，相位共轭，频谱反转上都有重要应用。

我们首先考虑非简并非线性四波混频的情况，三个频率分别为 ω_1，ω_2，ω_3 的光波一起输入到一根单模光纤中，产生频率为 $\omega_1+\omega_2-\omega_3$ 的光波（见图 14.2 和图 14.3）。为了简单起见，我们假定三个输入光波都是偏振光（如，LP_{01x} 模）。令光纤中的三个输入光波为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}, t) &= \tfrac{1}{2}\hat{\boldsymbol{x}}A_1E_{10}(x, y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1 t-\beta_1 z)} + \mathrm{c.c.} \\
\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r}, t) &= \tfrac{1}{2}\hat{\boldsymbol{x}}A_2E_{20}(x, y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_2 t-\beta_2 z)} + \mathrm{c.c.} \\
\boldsymbol{E}_3(\boldsymbol{r}, t) &= \tfrac{1}{2}\hat{\boldsymbol{x}}A_3E_{30}(x, y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_3 t-\beta_3 z)} + \mathrm{c.c.}
\end{aligned} \tag{14.3-5}$$

式中，$E_{10}(x,y)$，$E_{20}(x,y)$ 和 $E_{30}(x,y)$ 是 LP_{01} 模的波函数，A_1, A_2 和 A_3 是波的幅值，β_1，β_2 和 β_3 是相应的传播常数。根据式（8.1-1）中的三阶项，产生频率为 $\omega_1+\omega_2-\omega_3$ 的非线性（NL）极化强度

$$\begin{aligned}
P_x^{(\mathrm{NL})}(\boldsymbol{r}, t) &= 3\chi_{1111}^{(3)}A_1A_2A_3^*E_{10}E_{20}E_{30}^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\omega_1+\omega_2-\omega_3)t-(\beta_1+\beta_2-\beta_3)z]} + \mathrm{c.c.} \\
&= \mathrm{Re}\left[6\chi_{1111}^{(3)}A_1A_2A_3^*E_{10}E_{20}E_{30}^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\omega_1+\omega_2-\omega_3)t-(\beta_1+\beta_2-\beta_3)z]}\right]
\end{aligned} \tag{14.3-6}$$

图 14.2　频谱分布：(a)非简并四波混频（NDFWM）；(b)部分简并四波混频（PDFWM）

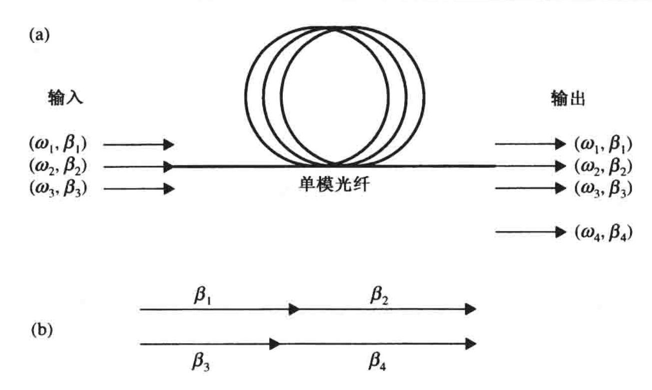


图 14.3　(a)单模光纤中四波混频的示意图，在输入端，三束(ω_1,β_1),(ω_2,β_2),(ω_3,β_3)的光波耦合输入单模光纤，产生新的光波(ω_4,β_4)；(b)动量守恒的矢量图

非线性极化强度实际上是振荡电偶极子的大量分布，辐射出频率为$\omega_4=\omega_1+\omega_2-\omega_3$的新光波，假设新的波矢满足动量守恒条件$\beta_4=\beta_1+\beta_2-\beta_3$。在长段光纤中，新产生的频率为$\omega_4$，波矢为$\beta_4$的波矢也会和其他三种光波中的任意两种混合。这会导致产生频率为ω_1, ω_2, ω_3和波矢为β_1, β_2, β_3的光波。因此所有四种光波在光纤中传播时发生能量交换。接下来，我们将推导光波振幅的耦合方程。

非简并四波混频的耦合模方程

下面我们将考虑如图 14.3(a)所示的四波混频过程。三种不同频率（ω_1, ω_2, ω_3）的光波输入到单模光纤中。由非线性极化新产生的光波记作光波 4。我们将推导出光纤中这四种光波所遵循的耦合方程。令光波电场为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}, t) &= \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{x}}A_1(z)E_{10}(x, y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1 t-\beta_1 z)} + \text{c.c.}\\
\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r}, t) &= \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{x}}A_2(z)E_{20}(x, y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_2 t-\beta_2 z)} + \text{c.c.}\\
\boldsymbol{E}_3(\boldsymbol{r}, t) &= \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{x}}A_3(z)E_{30}(x, y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_3 t-\beta_3 z)} + \text{c.c.}\\
\boldsymbol{E}_4(\boldsymbol{r}, t) &= \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{x}}A_4(z)E_{40}(x, y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_4 t-\beta_4 z)} + \text{c.c.}
\end{aligned} \tag{14.3-7}$$

式中模式振幅$A_1(z)$、$A_2(z)$、$A_3(z)$和$A_4(z)$是z的函数，反映光波在沿z轴传输时的耦合。为简单起见，我们假定所有的四束光波都是LP_{01x}模。

现在，我们考察与四束光波相互作用有关的非线性极化强度。我们特别关心振荡在频率（$\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$）的波的非线性极化强度。根据式（8.6-1），三阶非线性极化强度的一般表达式为

$$\begin{aligned}
P_x^{(\mathrm{NL})}(\boldsymbol{r}, t) = 4\chi_{1111}^{(3)}\frac{1}{8}[&A_1(z)E_{10}(x, y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1 t-\beta_1 z)} + A_2(z)E_{20}(x, y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_2 t-\beta_2 z)}\\
&+ A_3(z)E_{30}(x, y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_3 t-\beta_3 z)} + A_4(z)E_{40}(x, y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_4 t-\beta_4 z)} + \text{c.c.}]^3
\end{aligned} \tag{14.3-8}$$

我们注意到，即使在同一线偏振模（LP_{01x}）这一简单情况下，三阶非线性极化强度也有 512 项。因此我们需要一些明智的理由来选择与$P_x^{(NL)}$相关的项。首先，我们忽略频率为$3\omega_n$（n=1,2,3,4）的三次谐波项，以及频率为$2\omega_n=\omega_m$（m,n=1,2,3,4）的项。即使在相位匹配时，这些项的辐射波的频谱范围也在通信信道波段之外。其次，我们忽略频率为$2\omega_n-\omega_m$（m,n=1,2,3,4）的

非线性项。因此只保留那些在频率（ω_1，ω_2，ω_3，ω_4）上振荡的光波的项，我们得到

$$
\begin{aligned}
P_x^{(\mathrm{NL}\omega_1)}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{2}\chi_{1111}^{(3)} \times \{&6A_3A_4A_2^*E_{30}E_{40}E_{20}^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\omega_3+\omega_4-\omega_2)t-(\beta_3+\beta_4-\beta_2)z]} + [6|A_2E_{20}|^2A_1E_{10} \\
&+ 6|A_3E_{30}|^2A_1E_{10} + 6|A_4E_{40}|^2A_1E_{10} + 3|A_1E_{10}|^2A_1E_{10}]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1t-\beta_1z)} + \mathrm{c.c.}\} \\
P_x^{(\mathrm{NL}\omega_2)}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{2}\chi_{1111}^{(3)} \times \{&6A_3A_4A_1^*E_{30}E_{40}E_{10}^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\omega_3+\omega_4-\omega_1)t-(\beta_3+\beta_4-\beta_1)z]} + [6|A_1E_{10}|^2A_2E_{20} \\
&+ 6|A_3E_{30}|^2A_2E_{20} + 6|A_4E_{40}|^2A_2E_{20} + 3|A_2E_{20}|^2A_2E_{20}]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_2t-\beta_2z)} + \mathrm{c.c.}\} \\
P_x^{(\mathrm{NL}\omega_3)}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{2}\chi_{1111}^{(3)} \times \{&6A_1A_2A_4^*E_{10}E_{20}E_{40}^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\omega_1+\omega_2-\omega_4)t-(\beta_1+\beta_2-\beta_4)z]} + [6|A_1E_{10}|^2A_3E_{30} \\
&+ 6|A_2E_{20}|^2A_3E_{30} + 6|A_4E_{40}|^2A_3E_{30} + 3|A_3E_{30}|^2A_3E_{30}]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_3t-\beta_3z)} + \mathrm{c.c.}\} \\
P_x^{(\mathrm{NL}\omega_4)}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{2}\chi_{1111}^{(3)} \times \{&6A_1A_2A_3^*E_{10}E_{20}E_{30}^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\omega_1+\omega_2-\omega_3)t-(\beta_1+\beta_2-\beta_3)z]} + [6|A_1E_{10}|^2A_4E_{40} \\
&+ 6|A_2E_{20}|^2A_4E_{40} + 6|A_3E_{30}|^2A_4E_{40} + 3|A_4E_{40}|^2A_4E_{40}]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_4t-\beta_4z)} + \mathrm{c.c.}\}
\end{aligned}
\tag{14.3-9}
$$

我们注意到有许多非线性项中含有 $\exp[i(\omega_n t-\beta_n z)]$，($n$=1,2,3,4)，这些是先前讨论过的自相位调制和交叉相位调制项。它们会使相位常数 β_n 产生微小的改变。这里我们忽略这些项，而重点考察那些与四波混频有关的项。因此我们可以写出

$$
\begin{aligned}
P_x^{(\mathrm{NL})}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{2}\chi_{1111}^{(3)} \times \{&6A_3A_4A_2^*E_{30}E_{40}E_{20}^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\omega_3+\omega_4-\omega_2)t-(\beta_3+\beta_4-\beta_2)z]} \\
&+ 6A_3A_4A_1^*E_{30}E_{40}E_{10}^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\omega_3+\omega_4-\omega_1)t-(\beta_3+\beta_4-\beta_1)z]} \\
&+ 6A_1A_2A_4^*E_{10}E_{20}E_{40}^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\omega_1+\omega_2-\omega_4)t-(\beta_1+\beta_2-\beta_4)z]} \\
&+ 6A_1A_2A_3^*E_{10}E_{20}E_{30}^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\omega_1+\omega_2-\omega_3)t-(\beta_1+\beta_2-\beta_3)z]} + \mathrm{c.c.}\}
\end{aligned}
\tag{14.3-10}
$$

现在我们用式（14.3-7）中的 $\boldsymbol{E}$（四束波的总和），以及式（14.3-10）的非线性极化强度代入下面的波动方程式（8.3-2）

$$\nabla^2\boldsymbol{E} = \mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}) = \mu_0\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} + \mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{P}_{\mathrm{NL}}$$

我们注意到每个具有常量振幅的光波都是无非线性耦合的波动方程的一个解。四种频率中的每一种都必须满足最后一个方程。假定幅值是缓慢变化的（即 $\partial^2A_n(z)/\partial^2z \ll \beta_n\,\partial A_n(z)/\partial z$），在经过若干步代数计算后我们得到

$$
\begin{aligned}
E_{10}\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}z} &= -i3\chi_{1111}^{(3)}\frac{\omega_1^2}{\beta_1}\mu_0E_{30}E_{40}E_{20}^*A_3A_4A_2^*\exp(i\,\Delta\beta\,z) \\
E_{20}\frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}z} &= -i3\chi_{1111}^{(3)}\frac{\omega_2^2}{\beta_2}\mu_0E_{30}E_{40}E_{10}^*A_3A_4A_1^*\exp(i\,\Delta\beta\,z) \\
E_{30}\frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}z} &= -i3\chi_{1111}^{(3)}\frac{\omega_3^2}{\beta_3}\mu_0E_{10}E_{20}E_{40}^*A_1A_2A_4^*\exp(-i\,\Delta\beta\,z) \\
E_{40}\frac{\mathrm{d}A_4}{\mathrm{d}z} &= -i3\chi_{1111}^{(3)}\frac{\omega_4^2}{\beta_4}\mu_0E_{10}E_{20}E_{30}^*A_1A_2A_3^*\exp(-i\,\Delta\beta\,z)
\end{aligned}
\tag{14.3-11}
$$

式中 $\Delta\beta$ 描述的是在非简并四波混频（NDFWM）中的相位失配，它由下式给出

$$\Delta\beta = \beta_1+\beta_2-\beta_3-\beta_4 \tag{14.3-12}$$

为了得到式（14.3-11），我们用了式（14.3-3）的频率条件，并假定 $\chi_{1111}^{(3)}$ 与克尔系数成比例，并且在我们感兴趣的光谱范围内是一个常量。对式（14.3-11）两边同时乘以 $E_{10}(x,y)$，

然后在整个 xy 平面上积分，得到

$$\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}z} = -i3\chi_{1111}^{(3)} \frac{\omega_1^2}{\beta_1} \mu_0 A_2^* A_3 A_4 \frac{\int E_{10}^* E_{20}^* E_{30} E_{40}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y}{\int |E_{10}|^2 \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y} \exp(i\, \Delta\beta\, z) \tag{14.3-13}$$

我们定义

$$f_1 = \frac{\int E_{10}^* E_{20}^* E_{30} E_{40}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y}{\int |E_{10}|^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \int |E_{10}|^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y} \tag{14.3-14}$$

式（14.3-13）可写成

$$\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}z} = -in_2 \frac{2\omega_1}{c} A_2^* A_3 A_4 f_1 \exp(i\, \Delta\beta\, z) \tag{14.3-15}$$

式中 n_2 是克尔系数。为了得到式（14.3-15），我们利用式（8.6-7）中的关系式

$$n_2 = \frac{3c\mu_0 \chi_{1111}^{(3)}}{n_{\mathrm{eff}}^2 \varepsilon_0} \tag{14.3-16}$$

式中 n_{eff} 是传播模的等效折射率，并对式（13.2-4）中的模归一化

$$\int |E_{m0}|^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \frac{2\omega_m \mu_0}{\beta_m}, \quad m = 1, 2, 3, 4 \tag{14.3-17}$$

在式（14.3-16）中，我们忽略了四种光波中等效折射率的微小变化。

同理，我们可以得到其他三束光波的耦合方程。耦合方程可以写成

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}z} &= -in_2 \frac{2\omega_1}{c} A_2^* A_3 A_4 f_1 \exp(i\, \Delta\beta\, z) - \frac{\alpha}{2} A_1 \\
\frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}z} &= -in_2 \frac{2\omega_2}{c} A_1^* A_3 A_4 f_2 \exp(i\, \Delta\beta\, z) - \frac{\alpha}{2} A_2 \\
\frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}z} &= -in_2 \frac{2\omega_3}{c} A_1 A_2 A_4^* f_3 \exp(-i\, \Delta\beta\, z) - \frac{\alpha}{2} A_3 \\
\frac{\mathrm{d}A_4}{\mathrm{d}z} &= -in_2 \frac{2\omega_4}{c} A_1 A_2 A_3^* f_4 \exp(-i\, \Delta\beta\, z) - \frac{\alpha}{2} A_4
\end{aligned} \tag{14.3-18}$$

模式重叠常数为

$$f_2 = \frac{\int E_{10}^* E_{20}^* E_{30} E_{40}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y}{\int |E_{20}|^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \int |E_{20}|^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y}$$

$$f_3 = \frac{\int E_{10} E_{20} E_{30}^* E_{40}^*\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y}{\int |E_{30}|^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \int |E_{30}|^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y}$$

$$f_4 = \frac{\int E_{10}E_{20}E_{30}^*E_{40}^*\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\int |E_{40}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int |E_{40}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} \tag{14.3-19}$$

在式（14.3-18）中，我们给光纤中的传播模加上了线性衰减系数α，另外还假定在四种光波的频率范围内n_2是常量。

当$\omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega_3 \approx \omega_4$时，所有四个模式重叠常数$f_n(n=1,2,3,4)$等于$1/A_{\text{eff}}$，$A_{\text{eff}}$是传播模式（$\text{LP}_{01x}$）的有效面积，（见式（14.1-9））。这种情况下可以求出耦合方程的解析解。我们先考虑相位匹配条件得到满足的情况。

$\Delta\beta=0$的情况

设ω_0是与单模光纤零色散点对应的频率。对于硅光纤（例如，SMF-28），零色散点位于$\lambda_0=1.30\mu\text{m}(\omega_0=2\pi c/\lambda_0)$附近。模式的传播常数$\beta$可近似写成

$$\beta_n = \beta(\omega_n) = \beta(\omega_0) + \left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega}\right)_{\omega_0}(\omega_n-\omega_0) + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3\beta}{\partial\omega^3}\right)_{\omega_0}(\omega_n-\omega_0)^3 + \cdots \tag{14.3-20}$$

因为ω_0是零色散点，所以消掉了平方项$(\partial^2\beta/\partial\omega^2)_{\omega_0}(\omega_n-\omega_0)^2/2$。根据方程式（14.3-20），当四种光波的频率对称地分布在零色散点两边时，相位匹配条件$(\beta_1+\beta_2=\beta_3+\beta_4)$得到满足。换而言之

$$\omega_0-\omega_1=\omega_2-\omega_0,\quad \omega_0-\omega_3=\omega_4-\omega_0 \tag{14.3-21}$$

这种情形如图 14.4 所示。

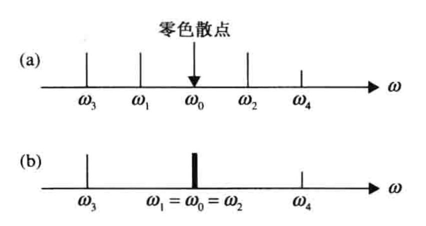


图 14.4　相位匹配时，四波混频的频谱图。频率对称地分布在零色散点ω_0两边。
(a)非简并四波混频；(b)部分简并四波混频

这里要着重注意，我们已经忽略了因自相位调制和交叉相位调制而引起的传播常数的微小变化。由式（14.2-9）可知，这些非线性贡献$(\Delta\beta)_{\text{NL}}$可以写成

$$(\Delta\beta)_{\text{NL}} = \frac{n_2}{A_{\text{eff}}}\left(P_4\frac{\omega_4}{c}+P_3\frac{\omega_3}{c}-P_2\frac{\omega_2}{c}-P_1\frac{\omega_1}{c}\right) \tag{14.3-22}$$

这里A_{eff}是模式的有效面积。我们注意到非线性贡献取决于模式功率，而且也许不能被忽略，尤其当模式功率很高时。有些情况中，在适当条件下非线性的贡献$(\Delta\beta)_{\text{NL}}$也许能消除线性的$\Delta\beta$。

当克尔系数以m^2/W为单位时，模振幅可以方便地写成

$$A_n = \sqrt{P_n}\exp(i\phi_n) = \sqrt{Q_n}\exp(-\alpha z/2)\exp(i\phi_n),\quad n=1,2,3,4 \tag{14.3-23}$$

这里 P_n 是相应的模式功率，单位为 W，ϕ_n 是相应的相位，Q_n 是在无线性衰减情况下相应的模式功率。利用这些新的符号，四个复数耦合方程可以写成以下八个实数方程

$$\begin{aligned}\frac{dQ_1}{dz} &= -4\gamma\sqrt{Q_1Q_2Q_3Q_4}\exp(-\alpha z)\sin\Delta\phi\\ \frac{dQ_2}{dz} &= -4\gamma\sqrt{Q_1Q_2Q_3Q_4}\exp(-\alpha z)\sin\Delta\phi\\ \frac{dQ_3}{dz} &= +4\gamma\sqrt{Q_1Q_2Q_3Q_4}\exp(-\alpha z)\sin\Delta\phi\\ \frac{dQ_4}{dz} &= +4\gamma\sqrt{Q_1Q_2Q_3Q_4}\exp(-\alpha z)\sin\Delta\phi\end{aligned} \tag{14.3-24}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\phi_1 &= -2\frac{\gamma}{Q_1}\sqrt{Q_1Q_2Q_3Q_4}\exp(-\alpha z)\cos\Delta\phi\\ \frac{d}{dz}\phi_2 &= -2\frac{\gamma}{Q_2}\sqrt{Q_1Q_2Q_3Q_4}\exp(-\alpha z)\cos\Delta\phi\\ \frac{d}{dz}\phi_3 &= -2\frac{\gamma}{Q_3}\sqrt{Q_1Q_2Q_3Q_4}\exp(-\alpha z)\cos\Delta\phi\\ \frac{d}{dz}\phi_4 &= -2\frac{\gamma}{Q_4}\sqrt{Q_1Q_2Q_3Q_4}\exp(-\alpha z)\cos\Delta\phi\end{aligned} \tag{14.3-25}$$

这里 γ 是一个描述四波混频增益的常量，由下式给出

$$\gamma = \frac{n_2\omega_0}{cA_{\text{eff}}} = \frac{2\pi}{\lambda_0 A_{\text{eff}}}n_2 \tag{14.3-26}$$

这里 λ_0 是与频率 ω_0 对应的波长。为了得出式（14.3-24）和式（14.3-25），我们假定 $|\omega_n-\omega_0| \ll \omega_0$。在典型的光通信网络中，信道间的频率间隔在 100GHz 范围内，而光波的频率 $(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4)$ 在 200THz 左右。

从关于相位的 4 个方程，我们得到

$$\frac{d}{dz}\Delta\phi = 2\gamma\left(\frac{1}{Q_3}+\frac{1}{Q_4}-\frac{1}{Q_1}-\frac{1}{Q_2}\right)\sqrt{Q_1Q_2Q_3Q_4}\exp(-\alpha z)\cos\Delta\phi \tag{14.3-27}$$

这里 $\Delta\phi$ 为

$$\Delta\phi = \phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4 \tag{14.3-28}$$

通过考察模式功率的耦合方程式（14.3-24）和方程式（14.3-27），我们注意到存在四个独立的不变量（积分常数）。它们是

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dz}(Q_1+Q_2+Q_3+Q_4) = 0\\ &\frac{d}{dz}(Q_1-Q_2) = 0\\ &\frac{d}{dz}(Q_3-Q_4) = 0\\ &\frac{d}{dz}(\sqrt{Q_1Q_2Q_3Q_4}\cos\Delta\phi) = 0\end{aligned} \tag{14.3-29}$$

方程式（14.3-24）和式（14.3-27）与锁相型耦合振荡器中的方程很相似。由于耦合效应，与其有关的光波相位会被锁定。通过考察式（14.3-27），我们注意到相位被锁定在

$$\Delta\phi = \pm\pi/2 \tag{14.3-30}$$

这是方程式（14.3-27）的解。这也可在特殊情况如 $P_4(0)=0$（第四种光波的输入功率为0）时容易得到。利用 $P_4(0)=0$ 以及式（14.3-29）中的四个不变量，我们得到了对于所有 z 值 $Q_1Q_2Q_3Q_4\cos\Delta\phi=0$。因为所有的模式功率都是有限的，我们得出对于所有 z 值，$\cos\Delta\phi=0$。从而得到方程式（14.3-30）的解。尤其要注意，当一般情况下，当 $P_4(0)\neq 0$ 时，这个解同样也是成立的。

现在，我们考虑一个设计用来实现相位共轭或波长转换的实用光波系统的例子。设在输入端（z=0）处没有第四种光波，由式（14.3-24）中的第四个方程以及在所有 z>0 时 $Q_4(0)=0$ 和 $Q_4(z)\geqslant 0$ 条件，我们发现 $\Delta\phi=+\pi/2$ 是一个合适的解。在这个例子里，耦合方程变为

$$\begin{aligned}
\frac{dQ_1}{dz} &= -4\gamma\sqrt{Q_1Q_2Q_3Q_4}\exp(-\alpha z)\\
\frac{dQ_2}{dz} &= -4\gamma\sqrt{Q_1Q_2Q_3Q_4}\exp(-\alpha z)\\
\frac{dQ_3}{dz} &= +4\gamma\sqrt{Q_1Q_2Q_3Q_4}\exp(-\alpha z)\\
\frac{dQ_4}{dz} &= +4\gamma\sqrt{Q_1Q_2Q_3Q_4}\exp(-\alpha z)
\end{aligned} \tag{14.3-31}$$

在等泵浦功率即 $P_1(0)=P_2(0)=P_3(0)$ 的情况下，可以对上面的耦合方程进行积分。这里我们指定光波 1 和光波 2 是泵浦光波。利用式（14.3-29）中的不变量以及边界条件，耦合方程的解可写成

$$\begin{aligned}
Q_1 &= P_p(0)U(z)\\
Q_2 &= P_p(0)U(z)\\
Q_3 &= P_p(0)[1-U(z)]+P_3(0)\\
Q_4 &= P_p(0)[1-U(z)]
\end{aligned} \tag{14.3-32}$$

这里 $U(z)$在[0,1]范围内是一个正的实值函数，并满足下面的微分方程

$$\frac{dU}{U\sqrt{[(1-U)+P_3(0)/P_p(0)](1-U)}} = -4\gamma P_p(0)\exp(-\alpha z)\,dz \tag{14.3-33}$$

对上式直接积分，结果为

$$U = \frac{1+\sigma}{1+\sigma\cosh^2[g(z)\sqrt{1+\sigma}]} \tag{14.3-34}$$

式中 σ 是个常数，代表输入端的模功率比

$$\sigma = \frac{P_3(0)}{P_p(0)} \tag{14.3-35}$$

$g(z)$为

$$g(z) = 2\gamma P_p(0)\frac{1 - e^{-\alpha z}}{\alpha} = \frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{P_p(0)}{A_{\text{eff}}}\frac{1 - e^{-\alpha z}}{\alpha}n_2 \tag{14.3-36}$$

考察函数 $U(z)$，我们注意到它是随 z 单调递减的。当 z 趋于无穷大时，U 取得最小值。在无损耗传输（$\alpha = 0$）的理想情况下，U 的最小值为 0。对于有限长光纤，$(1-U)$ 可以用来衡量光波之间的功率传输的比例。在单模光纤中，模式功率是硅光纤中相互作用长度的函数，如图 14.5 所示。

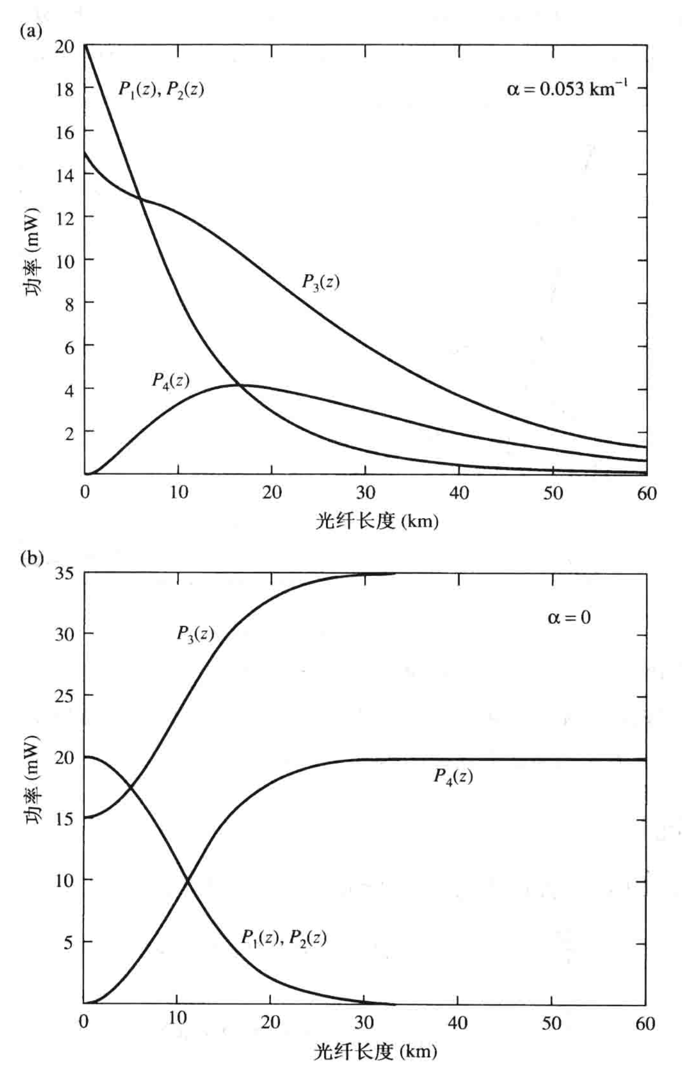


图 14.5 (a)在 $P_1(0) = P_2(0) = P_p(0) = 20\text{mW}$ 和 $P_3(0) = 15\text{mW}$ 的特殊情况下，单模石英光纤中由于非简并四波混频（NDFWM）引起的功率耦合。参数为波长 $\lambda_0 = 1300\text{nm}$，克尔系数为 $3\times10^{-20}\text{m}^2/\text{W}$，线性衰减系数为 $\alpha = 0.053\text{km}^{-1}$，$A_{\text{eff}} = 70\mu\text{m}^2$；(b)在无损耗传输（$\alpha = 0$）的理想情况下，单模硅光纤中由于非简并四波混频（NDFWM）引起的功率耦合

当光波 1 和光波 2 的功率是 20mW，光波 3 的功率是 15mW 时，由于四波混频引起的增益不足以抵消 $\alpha = 0.053\text{km}^{-1}$ 时的线性衰减，所以 $P_3(z)$ 是 z 的减函数。开始时光波 4 的功率 $P_4(z)$

由于四波混频效应开始增加，但由于线性衰减，其在达到一个最大值后开始下降。图 14.5（b）为无损耗传输（$\alpha=0$）的情况。这种情况下，我们注意到光波 3，4 的功率是 z 的增函数，而光波 1，2 的功率是 z 的减函数。在非简并四波混频（NDFWM）过程中，光波 1，2 为光波 3，4 提供能量。图 14.6 显示的是当光波 1，2 的功率增加到 40mW 时的功率耦合情况。这种情况下，由非简并四波混频（NDFWM）引起的增益会远大于线性衰减。由于线性衰减，光波 3 的功率 $P_3(0)$ 在刚开始时会下降，然后被放大。一旦光波 4 的功率在混频过程中建立起来时，由于非简并四波混频（NDFWM）增益引起的放大作用就出现了。由于线性衰减，光波 3，4 的功率在达到一个最大值后，开始下降。在这个区域中，由于非线性增益变得比线性衰减小了，因此所有光波的功率都开始下降。

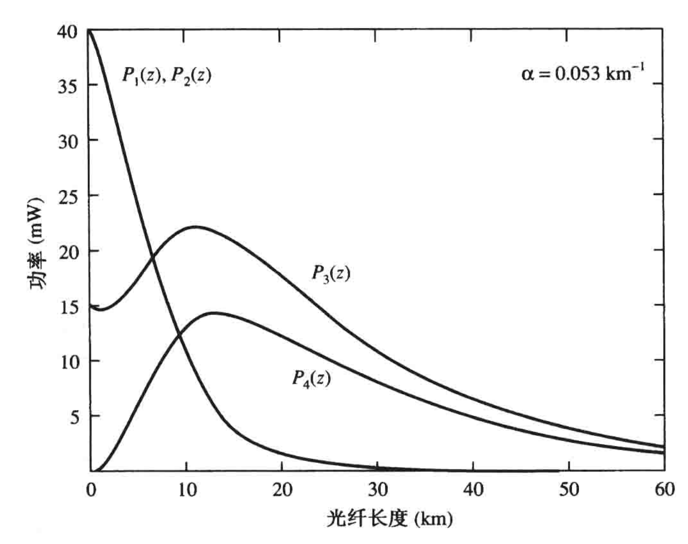


图 14.6　在 $P_1(0)=P_2(0)=P_p(0)=40\text{mW}$，和 $P_3(0)=15\text{mW}$ 的特殊情况下，单模石英光纤中由于非简并四波混频(NDFWM)引起的功率耦合。参数为波长 $\lambda_0=1300\text{nm}$，克尔系数为 $3\times10^{-20}\text{m}^2/\text{W}$，线性衰减系数为 $\alpha=0.053\text{km}^{-1}$，$A_{\text{eff}}=70\mu\text{m}^2$

$\Delta\beta\neq0$ 的情况

现在，我们考虑相位失配的情况。当 $\Delta\beta L\neq0$ 是，耦合方程变为

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}Q_1}{\mathrm{d}z} &= -4\gamma\sqrt{Q_1Q_2Q_3Q_4}\exp(-\alpha z)\sin(\Delta\phi-\Delta\beta\, z)\\
\frac{\mathrm{d}Q_2}{\mathrm{d}z} &= -4\gamma\sqrt{Q_1Q_2Q_3Q_4}\exp(-\alpha z)\sin(\Delta\phi-\Delta\beta\, z)\\
\frac{\mathrm{d}Q_3}{\mathrm{d}z} &= +4\gamma\sqrt{Q_1Q_2Q_3Q_4}\exp(-\alpha z)\sin(\Delta\phi-\Delta\beta\, z)\\
\frac{\mathrm{d}Q_4}{\mathrm{d}z} &= +4\gamma\sqrt{Q_1Q_2Q_3Q_4}\exp(-\alpha z)\sin(\Delta\phi-\Delta\beta\, z)
\end{aligned} \tag{14.3-37}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\Delta\phi = 2\gamma\left(\frac{1}{Q_3}+\frac{1}{Q_4}-\frac{1}{Q_1}-\frac{1}{Q_2}\right)\sqrt{Q_1Q_2Q_3Q_4}\,\exp(-\alpha z)\cos(\Delta\phi-\Delta\beta\, z) \tag{14.3-38}$$

在相位失配的情况下，四种光波之间的相位不再锁定。换言之，$\Delta\phi=$常数不再是式（14.3-38）的解。如果$\Delta\beta$足够小以致于$\Delta\beta L\ll 1$，L是光波相互作用长度，那么可以认为解$\Delta\phi=\pi/2$仍然有效。这种情况会发生在光波频率都在零色点散附近，或者光波之间的频率间隔很小的时候。在这些情况下，解仍然可以通过方程式（14.3-32）和式（14.3-34）求得，假设$g(z)$为

$$g(z)=2\gamma P_p(0)\frac{\Delta\beta\,\mathrm{e}^{-\alpha z}\sin(\Delta\beta\, z)+\alpha[1-\mathrm{e}^{-\alpha z}\cos(\Delta\beta\, z)]}{(\Delta\beta)^2+\alpha^2} \tag{14.3-39}$$

当$\alpha\ll|\Delta\beta|$时，根据式（14.3-39），$g(z)$成为

$$g(z)\approx 2\gamma P_p(0)\frac{\sin(\Delta\beta\, z)}{\Delta\beta} \tag{14.3-40}$$

由于$g(z)$是一正弦函数，所有四个光波的功率都存在一振荡损耗。为了使得相位失谐，最佳耦合长度为

$$L_{\text{optimum}}=\frac{\pi}{2(\Delta\beta)}=\frac{L_c}{4} \tag{14.3-41}$$

式中L_c是相干长度，定义为$L_c=2\pi/(\Delta\beta)$。在这一距离之后，光波 3 和光波 4 的能量又回到了光波 1 和光波 2。为了说明相位失谐的数量级概念，我们给出了下面的例子。

例：大失谐量的四波混频。

考虑一根单模石英光纤中的谱线区域分布在ν_0=193.5THz(λ_0=1550nm)附近，色散大约为17ps/nm-km，它等价于$(\partial^2\beta/\partial\omega^2)$=$2.2\times10^{-23}\,\mathrm{s}^2/\mathrm{km}$。设光波频率为

$\nu_0-\nu_1=\nu_2-\nu_0=100\mathrm{GHz}$

$\nu_0-\nu_3=\nu_4-\nu_0=200\mathrm{GHz}$

相位失谐量为

$$\Delta\beta=(\beta_1+\beta_2-\beta_3-\beta_4)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\beta}{\partial\omega^2}\right)_{\omega_0}[(\omega_1-\omega_0)^2+(\omega_2-\omega_0)^2-(\omega_3-\omega_0)^2-(\omega_4-\omega_0)^2] \tag{14.3-42}$$

代入上面的参数，我们得到$\Delta\beta=17.4\mathrm{km}^{-1}$，这是大的失谐量。在光纤中失谐量如此大的四波混频即使光纤长度超过了 1km 也是可以忽略不计的。

例：小失谐量的四波混频。

与上面例子采用相同的光纤，有下面的信道间隔：

$\nu_0-\nu_1=\nu_2-\nu_0=100\mathrm{MHz}$

$\nu_0-\nu_3=\nu_4-\nu_0=200\mathrm{MHz}$

这种情况下，频率空间缩小了 1000 倍，相位失谐量缩小了一百万倍。即$\Delta\beta=1.74\times10^{-5}\mathrm{km}^{-1}$。对于光纤长度$L$=100km，$\Delta\beta L=1.74\times10^{-3}$，这个值比 1 小得多。因此假设功率值足够大，在这些条件下四波混频将显得很重要。

14.4　部分简并四波混频

为了在光纤中实现波长变换，使用部分简并四波混频（PDFWM）会很方便，即 $\omega_1=\omega_2$，此时只有三个不同波长。电场可以写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r},t)&=\frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{x}}A_1E_{10}(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1t-\beta_1z)}+\mathrm{c.c.}\\\boldsymbol{E}_3(\boldsymbol{r},t)&=\frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{x}}A_3E_{30}(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_3t-\beta_3z)}+\mathrm{c.c.}\\\boldsymbol{E}_4(\boldsymbol{r},t)&=\frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{x}}A_4E_{40}(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_4t-\beta_4z)}+\mathrm{c.c.}\end{aligned}\tag{14.4-1}$$

这里 $E_{10}(x,y)$，$E_{30}(x,y)$ 和 $E_{40}(x,y)$ 是 LP_{01} 模的波函数；A_1，A_3 和 A_4 是波的振幅；ω_1，ω_3 和 ω_4 是对应的频率；β_1，β_3 和 β_4 是相应的传播常量。图 14.7 是在单模光纤中的部分简并四波混频原理图。

根据方程式（8.1-1）中的第三项，将产生频率为 $2\omega_1-\omega_3$ 的非线性极化项

$$\begin{aligned}P_x^{(\mathrm{NL})}(\boldsymbol{r},t)&=\frac{3}{2}\chi_{1111}^{(3)}A_1^2A_3^*E_{10}^2E_{30}^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(2\omega_1-\omega_3)t-(2\beta_1-\beta_3)z]}+\mathrm{c.c.}\\&=\mathrm{Re}[3\chi_{1111}^{(3)}A_1^2A_3^*E_{10}^2E_{30}^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(2\omega_1-\omega_3)t-(2\beta_1-\beta_3)z]}]\end{aligned}\tag{14.4-2}$$

与非简并四波混频一样，非线性极化是振荡偶极子的大量分布，振荡偶极子能够激发出新的频率为 $\omega_4=2\omega_1-\omega_3$ 的光子，新产生的波需要满足动量守恒条件即 $\beta_4=2\beta_1-\beta_3$。在长距离的光纤中，新产生的光波 ω_4 和波矢 β_4 将和其他两个波长的光波混在一起。这又将导致产生频率为 ω_1，ω_3 和波矢为 β_1，β_3 的光波。因此当沿着光纤传播时，这三个波长的光伴随着相互能量交换。光子能量和动量守恒就变成

$$\begin{aligned}\omega_4&=2\omega_1-\omega_3\\\beta_4&=2\beta_1-\beta_3\end{aligned}\tag{14.4-3}$$

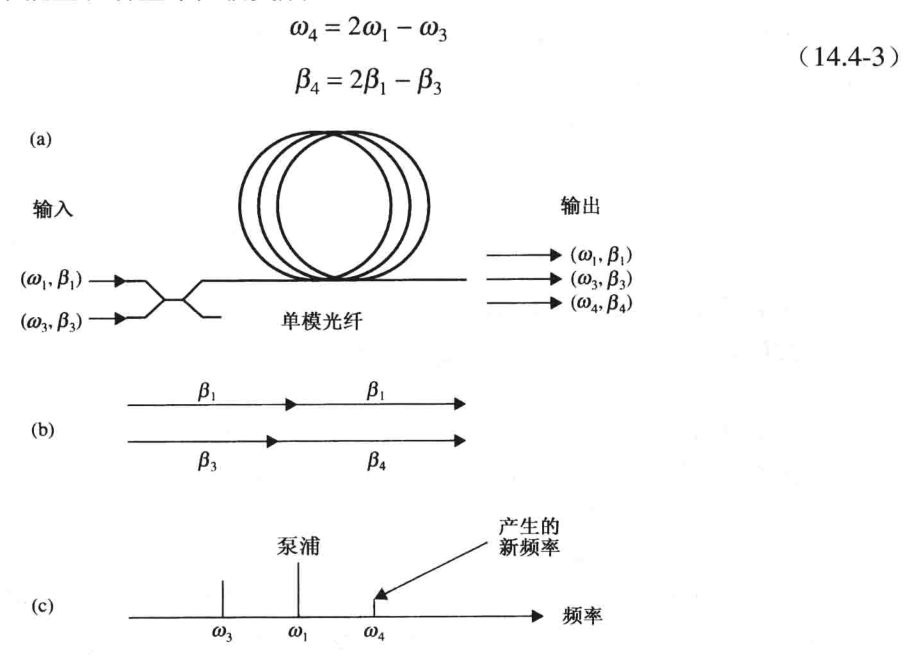


图 14.7　(a)在单模光纤中的部分简并四波混频原理图；(b)动量守恒矢量图；(c)光波的频谱图。注意：频率 ω_3 和 ω_4 与泵浦频率 ω_1 等距离，泵浦频率 ω_1 位于零色散点（或者附近）

要注意 ω_3 和 ω_4 是与泵浦频率 ω_1 等距离的频率。虽然波矢 β_4 和频率 ω_4 通过色散关系联系在一起，但是这两个方程不可能同时满足。因此仅仅当泵浦光频率 ω_1 位于零色散处时，单模光纤中的部分简并四波混频现象才会发生。

部分简并四波混频的耦合模方程

由于经过三阶非线性极化下的耦合作用，$A_1(z)$，$A_3(z)$ 和 $A_4(z)$ 是 z 的函数，反映光波沿着 z 轴传播时的能量交换。为了简化，我们再次假设所有的四个光波都处在 LP_{01} 模。对应的耦合模方程为

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{dz} &= -in_2\frac{2\omega_1}{c}A_1^*A_3A_4f_1\exp(i\,\Delta\beta\,z)-\frac{\alpha}{2}A_1\\ \frac{dA_3}{dz} &= -in_2\frac{\omega_3}{c}A_1^2A_4^*f_3\exp(-i\,\Delta\beta\,z)-\frac{\alpha}{2}A_3\\ \frac{dA_4}{dz} &= -in_2\frac{\omega_4}{c}A_1^2A_3^*f_4\exp(-i\,\Delta\beta\,z)-\frac{\alpha}{2}A_4\end{aligned} \tag{14.4-4}$$

式中 n_2 是 Kerr 系数，f_1、f_2 和 f_3 是在 14.3 节中定义的交叠系数，α 是线性衰减系数，$\Delta\beta$ 描述了部分简并四波混频（PDFWM）中的相位失配因子，可以表示为

$$\Delta\beta = 2\beta_1-\beta_3-\beta_4 \tag{14.4-5}$$

为了得到方程式（14.4-4），我们使用了频率条件式（14.4-3），而且假设与 Kerr 系数成比例的 $\chi_{1111}^{(3)}$ 在感兴趣的频谱范围是一常量。当 $\omega_1\approx\omega_3\approx\omega_4$ 时，所有三个模式的交叠系数是常量，都等于 $1/A_{\text{eff}}$，这里 A_{eff} 是传播模式（LP_{01x}）的有效纤芯面积。这种情况下分析耦合模方程则变得比较方便。

对于相位匹配（即 $\Delta\beta=0$）情形，通过使用上一节提到的非简并四波混频的方法可以求解模式功率问题。根据边界条件

$$\begin{aligned}P_1(z=0)&=P_p(0)\\ P_3(z=0)&=P_3(0)\\ P_4(z=0)&=0\end{aligned} \tag{14.4-6}$$

模式功率可以写成

$$\begin{aligned}P_1(z)&=P_p(0)V(z)\exp(-\alpha z)\\ P_3(z)&=\{\tfrac{1}{2}P_p(0)[1-V(z)]+P_3(0)\}\exp(-\alpha z)\\ P_4(z)&=\tfrac{1}{2}P_p(0)[1-V(z)]\exp(-\alpha z)\end{aligned} \tag{14.4-7}$$

式中 $V(z)$ 由下式给出

$$V(z)=\frac{1+2\sigma}{1+2\sigma\cosh^2[\frac{1}{2}g(z)\sqrt{1+2\sigma}]} \tag{14.4-8}$$

这里 σ 是一常量，表示输入处的模式功率比

$$\sigma=\frac{P_3(0)}{P_p(0)} \tag{14.4-9}$$

$g(z)$ 由下式给出

$$g(z)=2\gamma P_p(0)\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha z}}{\alpha}=\frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{P_p(0)}{A_{\mathrm{eff}}}\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha z}}{\alpha}n_2 \tag{14.4-10}$$

满足

$$\gamma=\frac{n_2\omega_0}{cA_{\mathrm{eff}}}=\frac{2\pi}{\lambda_0 A_{\mathrm{eff}}}n_2 \tag{14.4-11}$$

在方程式（14.4-10）和式（14.4-11）中，λ_0 是对应泵浦光频率 $\omega_0=\omega_1$ 的波长（注意：$\omega_1\approx\omega_3\approx\omega_4$）。

这里强调，函数 $V(z)$ 是关于 z 的单调递减函数。在 z=0 时，$V(0)=1$。当 z 接近无穷远的时候，V 达到了最小值。假设在无损耗传输的情况下（$\alpha=0$），$g(z)=2\gamma P_p(0)z$。函数 $V(z)$ 达到了最小值 0，这表示能量完全地从泵浦光传到了光波 3 和光波 4。对于一段有限长的光纤，（$1-V$）代表了光波之间能量传输的比率。实际上，在光纤光学传输中的线性衰减是不能被忽略的。在这种情况下，$V(z)$ 具有 $(1-\mathrm{e}^{-\alpha z})/\alpha$ 的函数形式。我们可以得出在 $z\gg 1/\alpha$ 的区域内，三个光波之间的能量耦合将变得毫无意义。图 14.8 显示了在单模石英光纤中的模式功率作为相互作用长度的函数。当泵浦光（光波 1）的光功率为 40mW，光波 3 的光功率为 15mW 时，FWM 带来的增益不足以抵消 $\alpha=0.053\mathrm{km}^{-1}$ 时带来的线性损耗。所以 $P_3(z)$ 是关于 z 的递减函数。由于部分简并四波混频（PDFWM）增益作用，开始时光波 4 的功率 $P_4(z)$ 增大，在达到最大值之后，由于线性损耗衰减功率开始减少。图 14.8（b）是在假设无损耗传输（$\alpha=0$）条件下的情况。这里，我们要注意：光波 3 和光波 4 的功率是 z 的增函数，同时泵浦光（光波 1）是 z 的减函数。在整个部分简并四波混频（PDFWM）的过程中，泵浦光（光波 1）向光波 3 和 4 提供了能量。

图 14.9 显示当泵浦光功率增加到 60mW 时的功率耦合情况。这里，部分简并四波混频（PDFWM）增益远大于线性损耗。当线性损耗开始衰减时，光波 3 的功率 $P_3(z)$ 开始逐渐被放大。一旦光波 4 的功率在混频过程中建立起来时，由于部分简并四波混频（PDFWM）增益引起的放大作用就出现了。由于线性衰减，光波 3 和光波 4 的功率在达到一个最大值后，开始下降。在这个区域中，由于非线性增益变得比线性衰减小了，因此所有光波的功率都开始下降。为了实现波长变换，光纤长度的选择应达到一个最佳值，使光波 4 的功率达到最大值。

波长变换的最佳相互作用长度可以令 $\mathrm{d}P_4(z)/\mathrm{d}z=0$ 来导出。利用方程式（14.4-7），我们得到最佳耦合长度条件为

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}=-\alpha(1-V) \tag{14.4-12}$$

这里 $V(z)$ 由方程式（14.4-8）给出。把式（14.4-8）代入式（14.4-12）中，得到

$$V\frac{\mathrm{d}g(z)}{\mathrm{d}z}=\frac{\alpha}{\sqrt{1+2\sigma}}\tanh\left[\tfrac{1}{2}g(z)\sqrt{1+2\sigma}\right] \tag{14.4-13}$$

式中 $g(z)$ 由式（14.4-10）给出。如果 $\gamma P_p(0)$ 很小，即满足 $\gamma P_p(0)/\alpha\ll 1$，则 $g(z)\ll 1$ 且 $V(z)\approx 1$，此时有 $\tanh[g(z)\sqrt{1+2\sigma}/2]\approx g(z)\sqrt{1+2\sigma}/2$。再根据式（14.4-13），就可以得到波长变换的最佳光纤长度为

$$L_{\text{最佳}}=\frac{\ln 3}{\alpha} \tag{14.4-14}$$

图 14.8 给出了一个实例，最佳长度大约 20km。

在基于部分简并四波混频（PDFWM）的波长转换中，光波 3 和光波 4 都由泵浦光（光波 1）来提供能量。因此可以定义转换效率为

$$\eta = \frac{\Delta P_3(z) + \Delta P_4(z)}{P_1(0)} = \frac{P_3(z) - P_3(0)e^{-\alpha z} + P_4(z)}{P_1(0)} \tag{14.4-15}$$

应用方程式（14.4-7），转换效率可以写成

$$\eta = (1 - V)\exp(-\alpha z) = \frac{2\sigma \sinh^2[\frac{1}{2} g(z)\sqrt{1 + 2\sigma}]}{1 + 2\sigma \cosh^2[\frac{1}{2} g(z)\sqrt{1 + 2\sigma}]} \exp(-\alpha z) \tag{14.4-16}$$

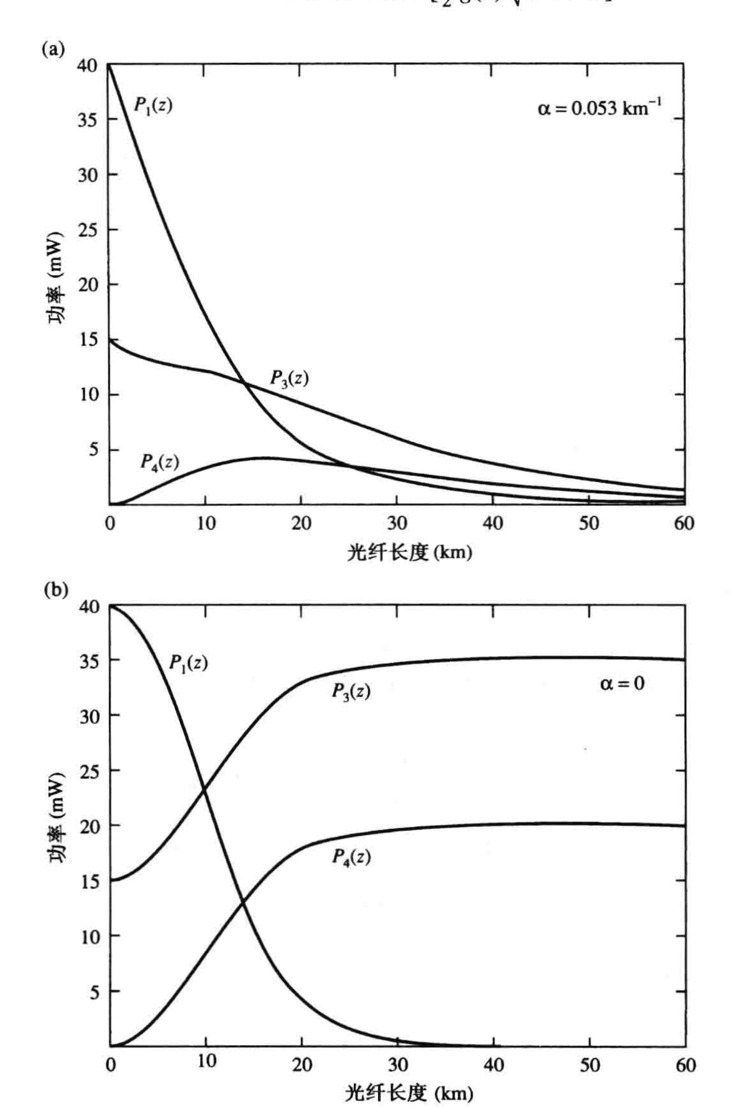


图 14.8　(a)当 $P_1(0) = P_p(0) = 40\mathrm{mW}$，$P_3(0) = 15\mathrm{mW}$ 时，单模石英光纤中的部分简并四波混频（PDFWM）功率耦合曲线。具体参数为：波长 $\lambda_0 = 1300\mathrm{nm}$，Kerr 系数为 $3\times10^{-20}\mathrm{m}^2/\mathrm{W}$，线性衰减系数 $\alpha = 0.053\mathrm{km}^{-1}$，$A_{\mathrm{eff}} = 70\mu\mathrm{m}^2$；(b)在无损耗传输（$\alpha = 0$）的理想情况下，得到的单模石英光纤中的部分简并四波混频（PDFWM）功率耦合曲线

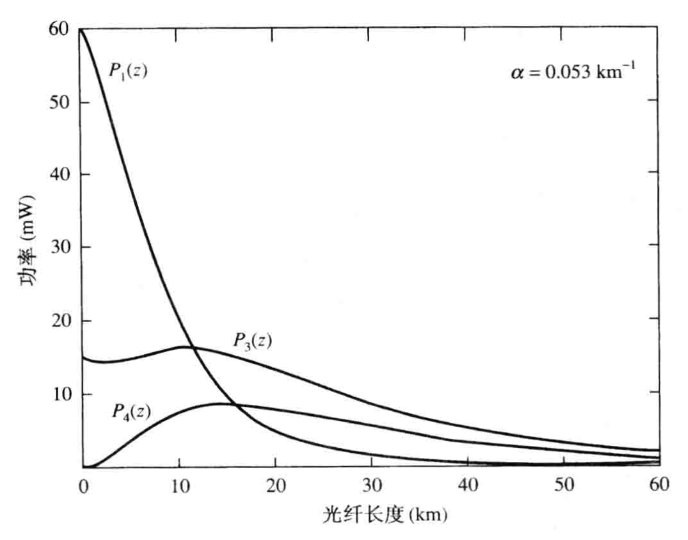


图 14.9　当 $P_1(0)=P_p(0)=60\text{mW}$ 、 $P_3(0)=15\text{mW}$ 时，单模石英光纤中的部分简并四波混频（PDFWM）功率耦合曲线。具体参数：波长 $\lambda_0=1300\text{nm}$ ，Kerr 系数为 $3\times10^{-20}\text{m}^2/\text{W}$ ，线性衰减系数 $\alpha=0.053\text{km}^{-1}$ ， $A_{\text{eff}}=70\mu\text{m}^2$

根据式（14.4-14）和式（14.4-16），当 $\gamma P_p(0)/\alpha \ll 1$， $g(z)\ll 1$， $V(z)\approx 1$ 时，最佳转换效率可以写成

$$\eta_{\max}=\frac{8\gamma^2 P_3(0)P_p(0)}{27\alpha^2} \tag{14.4-17}$$

一般地，这个转换效率是关于泵浦功率 $P_p(0)$ 的增函数。

例：最佳转换效率。

作为一个例子，对于部分简并四波混频（PDFWM）的相位匹配情形，当波长 $\lambda_0=1300\text{nm}$ ，Kerr 系数为 $3\times10^{-20}\text{m}^2/\text{W}$ ，线性衰减系数 $\alpha=0.053\text{km}^{-1}$ ， $A_{\text{eff}}=70\mu\text{m}^2$ 。耦合常量 γ 由式（14.4-11）给出

$$\gamma=\frac{n_2\omega_0}{cA_{\text{eff}}}=\frac{2\pi}{\lambda_0 A_{\text{eff}}}n_2=0.0021\text{m/W}$$

当功率值 $P_3(0)=P_p(0)=10\text{mW}$ 时，通过式（14.4-17）就可以给出最佳转换效率为

$$\eta_{\max}=\frac{8\gamma^2 P_3(0)P_p(0)}{27\alpha^2}=0.045$$

当功率值 $P_3(0)=30\text{mW}$ ， $P_p(0)=10\text{mW}$ 时，最佳转换效率变为

$$\eta_{\max}=\frac{8\gamma^2 P_3(0)P_p(0)}{27\alpha^2}=0.136$$

由式（14.4-14）可以得到最佳耦合长度为

$$L_{\text{最佳}}=\frac{\ln 3}{\alpha}=20.7\text{km}$$

图 14.10 和图 14.11 说明了当输入功率不同时，转换效率随耦合长度的函数变化曲线。值得注意的是，式（14.4-14）和式（14.4-17）是在较低效率机制下（ $V\approx 1,\eta\ll 1$ ）的最佳耦

合长度和最佳耦合效率的近似解。

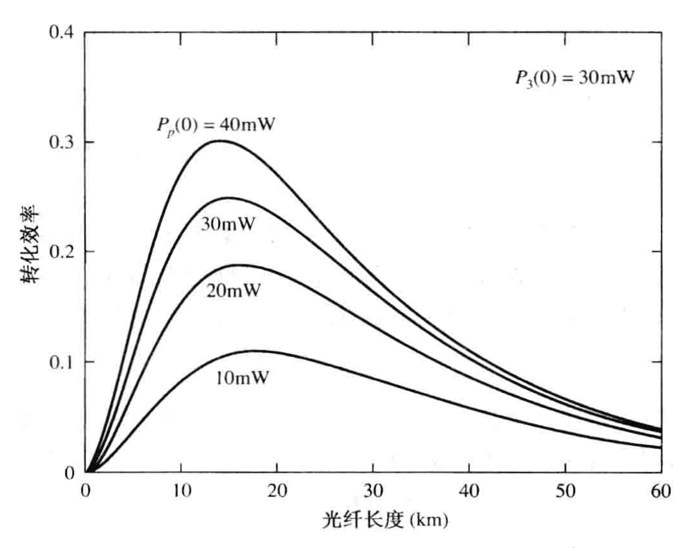


图 14.10　当 $P_3(0)=30\text{mW}$，不同泵浦功率时，单模石英光纤中的部分简并四波混频（PDFWM）波长转化效率曲线。具体参数：波长 $\lambda_0=1300\text{nm}$，Kerr 系数为 $3\times10^{-20}\text{m}^2/\text{W}$，线性衰减系数 $\alpha=0.053\text{km}^{-1}$ $A_{\text{eff}}=70\mu\text{m}^2$

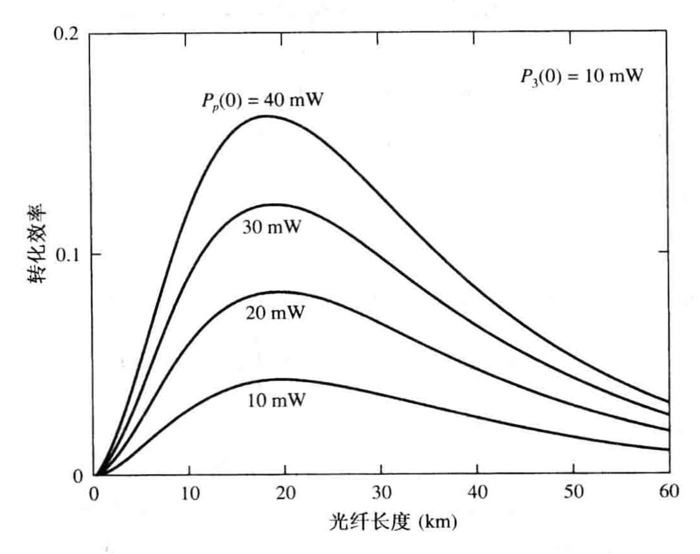


图 14.11　当 $P_3(0)=10\text{mW}$，不同的泵浦功率时，单模石英光纤中的部分简并四波混频（PDFWM）波长转化效率曲线。具体参数：波长 $\lambda_0=1300\text{nm}$，Kerr 系数为 $3\times10^{-20}\text{m}^2/\text{W}$，线性衰减系数 $\alpha=0.053\text{km}^{-1}$ $A_{\text{eff}}=70\mu\text{m}^2$

相位共轭与频率啁啾反转

现在我们来讨论在单模光纤中四波混频（FWM）的一个重要性质。特别地，我们比较感兴趣光波 3 和光波 4 的时域分布的关系。根据时域分布，电场振幅可以表示为

$$\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{x}}A_1(z)E_{10}(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1 t-\beta_1 z)}+\text{c.c.}$$

$$\boldsymbol{E}_3(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{x}}A_3(z)p_3(t)E_{30}(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_3 t-\beta_3 z)}+\text{c.c.} \qquad (14.4\text{-}18\text{a})$$

$$\boldsymbol{E}_4(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{x}}A_4(z)p_4(t)E_{40}(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_4 t-\beta_4 z)}+\text{c.c.}$$

式中 $p_3(t)$ 和 $p_4(t)$ 分别是光波 3 和光波 4 的时域分布。在式（14.4-18a）中，我们假设泵浦光是一连续光（CW）。

根据非线性极化关系式（14.4-2），或者式（14.4-4）中第三个耦合方程，我们可以得到，在部分简并四波混频（PDFWM）中，光波 4 的时域分布与光波 3 的时域分布的相位共轭成正比。在一般不考虑损耗的情况下，根据方程式（14.4-2）得到

$$p_4(t)=p_3^*(t) \qquad (14.4\text{-}18\text{b})$$

这里假设泵浦光（光波 1）是一个连续光。也就是说，光波 4 的时域分布是光波 3 时域分布的相位共轭。相位共轭的存在，使得光波 4 的频谱分布实际上是光波 3 关于泵浦频率 ω_1 的反转过程。图 14.12 说明了谱线反转的这一有趣特性。

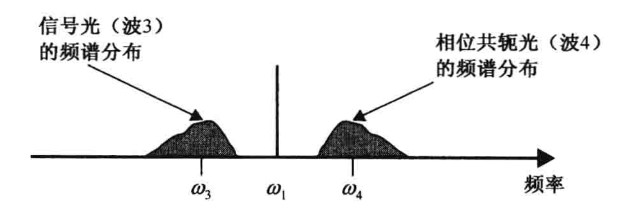


图 14.12　在单模光纤中，部分简并四波混频（PDFWM）引起的泵浦光（ω_1）谱线反转图。两阴影区表示光波 3 和光波 4 各自的归一化光谱分布

关于频率为 ω_1 的泵浦光频谱反转也可以从光波之间的频率关系式（14.4-3）看出

$$\omega_4=2\omega_1-\omega_3 \qquad (14.4\text{-}19)$$

把信号光（光波 3）看成是它的所有频谱分量的线性组合总和

$$p_3(t)\exp(i\omega_3 t)=\exp(i\omega_3 t)\int q_3(\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\,\mathrm{d}\Omega \qquad (14.4\text{-}20)$$

式中 $q_3(\Omega)$ 表示频率分量为（$\omega_3+\Omega$）波的振幅。根据式（14.4-19）得到，信号光（光波 3）的每一频率分量（$\omega_3+\Omega$）都将与频率为 ω_1 的泵浦光（光波 1）发生部分简并四波混频（PDFWM）过程，最终产生频率为 $[2\omega_1-(\omega_3+\Omega)]=(\omega_4-\Omega)$ 和振幅为 $q_3^*(\Omega)$ 的新光波。新的光波（$\omega_4-\Omega$）是相位共轭光波（光波 4）的一种频率分量。把所有新产生的光波频率分量组合在一起，这就是相位共轭光波（光波 4）。因此可以写成

$$\begin{aligned}p_4(t)\exp(i\omega_4 t)&\equiv\exp(i\omega_4 t)\int q_4(\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\,\mathrm{d}\Omega\\&=\exp(i\omega_4 t)\int q_3^*(\Omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}\,\mathrm{d}\Omega\end{aligned} \qquad (14.4\text{-}21)$$

从而

$$q_4(\Omega) = q_3^*(-\Omega) \tag{14.4-22}$$

式中 $q_4(\Omega)$ 是频率为 $\omega_4+\Omega$ 光波 4 的频率分量的归一化振幅。这个结果和方程（14.4-18b）非常一致，谱线反转如图 14.13 所示。

基于部分简并四波混频（PDFWM）过程的谱线反转的这一独特特性可以用来在光通信系统中的脉冲恢复（或者色散补偿）。如第 7 章中所讨论，一个光脉冲在存在群速度色散（GVD）的单模光纤中传输时会出现脉冲展宽和频率啁啾现象。由于群速度色散（GVD），光脉冲的不同频率分量在光纤中具有不同的传输速率。正常色散（$D>0$）下，高频分量比低频分量速率要大。这将导致脉冲的展宽和负啁啾。这里，我们定义所谓正啁啾，就是随着时间的变化本地频率发生增加的现象。

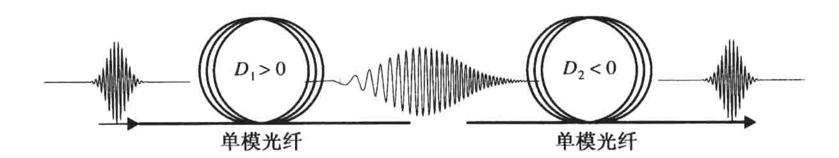


图 14.13　单模光纤中常规色散补偿的原理图。一个没有啁啾的入射光脉冲沿着带有正常色散（$D_1>0$）的光纤中传输时，在光纤输出端光脉冲被展宽和产生了啁啾，高频部分在脉冲前沿。当第二段光纤含有负的群速度色散，当满足 $D_1L_1+D_2L_2=0$ 时，就能恢复出原始脉冲。其中 L_1 和 L_2 是光纤的长度

在常规的色散补偿中，从正常色散光纤（$D_1>0$）出来的输出光脉冲是沿着带有反常色散（$D_2<0$）效应的光纤传输的。在第一段光纤中，光脉冲的高频分量比中心频率分量的传输速率要快，因此脉冲出现了超前边缘；而低频分量比中心频率分量速率要慢，因此脉冲出现了滞后边缘。当这种展宽的、带有啁啾的光脉冲沿着反常色散光纤传输时，在满足第二段光纤与第一段光纤的色散长度相等的条件下，滞后的低频分量就能赶追上高频分量。换句话说

$$D_1L_1+D_2L_2=0 \tag{14.4-23}$$

当上述条件满足时，脉冲展宽和啁啾就会被消除，如图 14.13 所示。这种色散补偿的缺点是需要反常色散光纤，而这种光纤的传输损耗通常比较高。

单模光纤中部分简并四波混频（PDFWM）产生的频谱反转也会带来光脉冲的啁啾反转。图 14.14 显示了这种情形。一个具有啁啾的光脉冲入射到以连续光（CW）为泵浦光的单模光纤中，如果单模光纤是零色散的，则光脉冲将保持原来的形状在光纤中传输。但是，由于频谱反转，高频超前边缘上的频率将要改变，变成了低频超前边缘。类似地，低频滞后边缘将会变成高频滞后边缘。这就导致了频率啁啾反转。

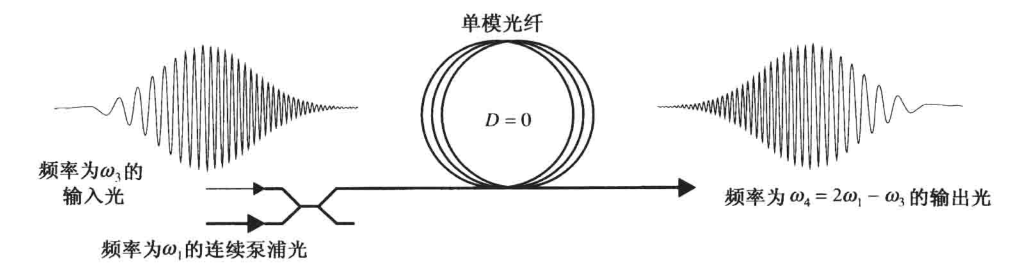


图 14.14　当泵浦光为频率 ω_1 的连续光时，单模光纤中的部分简并四波混频现象所带来的啁啾反转示意图

通过使用正常色散光纤，啁啾反转可以用来消除光脉冲的展宽和啁啾。基本原理如图 14.15 所示，包括两段正常色散光纤和插入一个相位共轭器。在第一段光纤（$D_a>0$）的输入端 z_1 处有一无啁啾的脉冲信号入射到光纤，在 z_2 输出端口脉冲被展宽并发生啁啾。现在再让这输出信号耦合到一个相位共轭器，该相位共轭器由一单模光纤（$D=0$）的部分简并四波混频（PDFWM）所组成。由于频谱反转，在 z_3 处的输出脉冲产生了啁啾反转。然后再将这一脉冲通入另一个长度已合理选择的正常色散光纤中。假如满足 $D_aL_a=D_bL_b$，则原始脉冲在输出端 z_4 处就被能被恢复出来，其中 L_a 和 L_b 是光纤的长度。

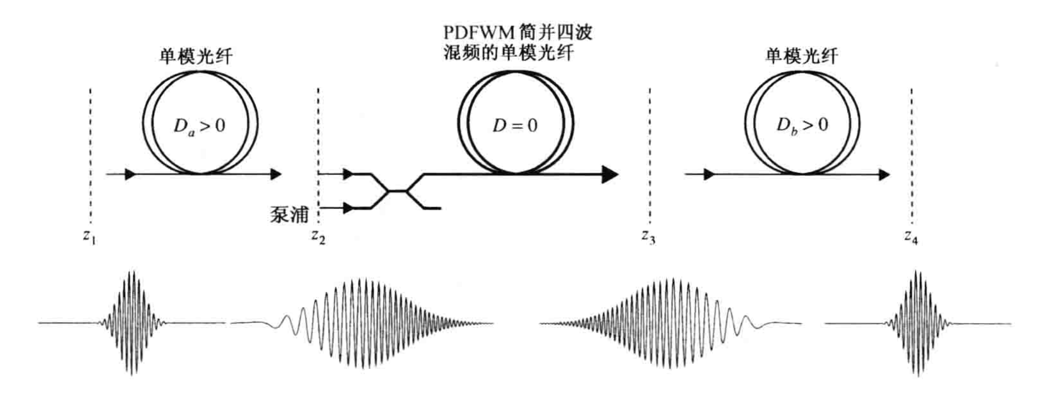


图 14.15　基于部分简并四波混频（PDFWM）过程的单模光纤色散补偿原理图设在位置 z_1、z_2、z_3 和 z_4 四处对脉冲信号进行检测

色散补偿示意图如图 14.15 所示，可以按照光波的傅里叶频谱来解释。我们来考察系统中光脉冲信号包络的变化情况，分别对位置 z_1、z_2、z_3 和 z_4 处的光脉冲信号包络进行傅里叶变换

1. Wave 3 at $z=z_1$:　$q_{31}(\Omega)=q_3(\Omega)$

2. Wave 3 at $z=z_2$:　$q_{32}(\Omega)=q_{31}(\Omega)\exp(-i\beta_3L_a)$

$$=q_3(\Omega)\exp(-i\beta_{30}L_a-i\Omega\tau_a-i\delta_aL_a\Omega^2) \tag{14.4-24}$$

3. Wave 4 at $z=z_3$:　$q_{41}(\Omega)=q_{32}^*(-\Omega)$

4. Wave 4 at $z=z_4$:　$q_{42}(\Omega)=q_{41}(\Omega)\exp(-i\beta_4L_b)=q_{41}(\Omega)\exp(-i\beta_{40}L_b-i\Omega\tau_b-i\delta_bL_b\Omega^2)$

式中 L_a 和 L_b 是光纤的长度，β_3 和 β_4 分别是光波 3 和光波 4 的传播常数，$\beta_{30}=\beta_3(\Omega=0)$，$\beta_{40}=\beta_4(\Omega=0)$。$\tau_a$，$\tau_b$，$\delta_a$ 和 δ_b 分别由下式给出

$$\begin{aligned}
\tau_a&=\left(\frac{\partial\beta_3}{\partial\omega}\right)_{\Omega=0}L_a=\frac{L_a}{v_g(\omega_3)}\\
\tau_b&=\left(\frac{\partial\beta_4}{\partial\omega}\right)_{\Omega=0}L_b=\frac{L_b}{v_g(\omega_4)}\\
\delta_a&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\beta_3}{\partial\omega^2}\right)_{\Omega=0}\\
\delta_b&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\beta_4}{\partial\omega^2}\right)_{\Omega=0}
\end{aligned} \tag{14.4-25}$$

物理意义上，τ_a 和 τ_b 分别是光纤 a 和 b 的传播延迟，而 δ_a 和 δ_b 分别是光纤 a 和 b 的群速度色散（GVD）。根据方程式（14.4-24），输出脉冲的傅里叶变换可以写成

$$\begin{aligned} q_{42}(\Omega) &= q_{41}(\Omega)\exp(-i\beta_{40}L_b - i\Omega\tau_b - i\delta_b L_b\Omega^2) \\ &= q_3^*(-\Omega)\exp(+i\beta_{30}L_a - i\Omega\tau_a + i\delta_a L_a\Omega^2)\exp(-i\beta_{40}L_b - i\Omega\tau_b - i\delta_b L_b\Omega^2) \end{aligned} \quad (14.4\text{-}26)$$

假如我们选择的两光纤满足

$$\delta_a L_a = \delta_b L_b \quad (14.4\text{-}27)$$

因此

$$q_{42}(\Omega) = q_3^*(-\Omega)\exp(-i\phi - i\Omega\tau) \quad (14.4\text{-}28)$$

式中 ϕ 是相位常量，$\tau = \tau_a + \tau_b$ 表示总群时延。现在我们可以考察系统输出端的光波时域分布

$$p_4(t) = \int q_{42}(\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\mathrm{d}\Omega = \int q_3^*(-\Omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi-\mathrm{i}\Omega\tau}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\mathrm{d}\Omega = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}p_3^*(t-\tau) \quad (14.4\text{-}29)$$

因此输出信号（振幅平方）包络和输入信号包络基本一样，只是相差了一个群时延 τ。运用 PDFWM 来解决单模光纤中的色散补偿的理论最早在 1978 年提出[3]。而在色散位移光纤（零色散在 $\lambda_0 = 1549\text{nm}$ 处）中利用部分简并四波混频（PDFWM）进行色散补偿的实验演示在 1993 年实现[4]。

14.5　光孤子

我们已经证明了单模光纤中由于 Kerr 效应带来的自相位调制（SPM）能引起频率啁啾现象。单模光纤中的色散也能够引起频率啁啾（和脉冲展宽）。在 1973 年 Hasegawa[5]提出在低损耗光纤中由自相位调制引起的脉冲展宽和群速度色散（GVD）引起的脉冲收缩的平衡能产生在传输中形状保持不变光脉冲，这种脉冲叫光孤子。根据 Kerr 效应所描述的关系 $n = n_0 + n_2 I$，光脉冲在非线性介质中传输会产生自相位调制。自相位调制与脉冲强度变化的共同作用导致频率啁啾，使低频分量处于脉冲前沿。如果介质中存在第 7 章中所描述的群速度色散，它的特性由参数 $\beta'' = (\partial''\beta / \partial''\omega)$ 表示，那么在适当的条件下频率啁啾可被压缩。如我们所知，群速度色散将引起变换限制脉冲变宽。由 Kerr 效应引起的自相位调制和群速度色散达到平衡时引起光脉冲自身保持不变（孤子）。令人感兴趣的是孤子并不限于光学。历史上，在 1834 年在英国的一个运河上，一个孤立的水波被观察并第一次被 John Scott Russel 描述[6]。

光孤子的数学描述

为了说明这种基本的物理现象。我们首先考虑图 14.16 所示的情形，一束变换限制光脉冲在光纤中传输，光纤的折射率与光强 I 有关

$$n = n_0 + n_2 I \quad (14.5\text{-}1)$$

式中 n_0 是光强为零时的折射率，n_2 是 Kerr 系数。为了详细阐述，我们假设一个高斯脉冲。

$$E_{\text{in}} = A_0 \exp\left(i\omega_0 t - \frac{\alpha t^2}{2}\right) \quad (14.5\text{-}2)$$

这里 A_0 是个无关紧要的常量，α 也是一个常量。在脉冲传输一小段距离 ΔL 后，脉冲成为

$$E_{\text{out}} = E_{\text{in}} \exp(-ik\,\Delta L) = A_0 \exp\left[i\left(\omega_0 t - \frac{\omega_0}{c} n(I)\,\Delta L\right)\right]\exp\left(-\frac{\alpha t^2}{2}\right) \tag{14.5-3}$$

式中 c 是真空中的光速。

输出光束的相位为

$$\phi(\Delta L, t) = \omega_0 t - \frac{\omega_0}{c}[n_0 + n_2 I_0 \exp(-\alpha t^2)]\,\Delta L \tag{14.5-4}$$

而瞬间频率（或局域频率）为

$$\omega(\Delta L, t) = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \omega_0 + 2\frac{\omega_0}{c} n_2 I_0\ \Delta L\ \alpha t \exp(-\alpha t^2) \tag{14.5-5}$$

式中 I_0 是脉冲中心（t=0）时的瞬时强度。

对于 $n_2 > 0$ 时局部频率分布见图 14.16，中心以外，脉冲的最重要的部分是正啁啾，即 $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t > 0$。如果我们在空间域考察啁啾脉冲，我们注意到前沿（$t$<0）包含波的低频分量，而后沿（$t$>0）由波的高频分量组成。如果是正啁啾，即 $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t > 0$，光脉冲进入线性色散光纤，有

$$\beta''' \equiv \frac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}\omega^2} = \left(-\frac{1}{v_g^2}\frac{\mathrm{d}v_g}{\mathrm{d}\omega}\right) < 0\ (\text{或者}D > 0)$$

由于迟来的高频信号被加速到离低频分量的距离将变短，脉冲被压缩。当沿着光纤传输所有频率成分彼此“追上”时的位置就是最小脉冲宽度发生的位置。超过这个点后，脉冲将会被加宽。

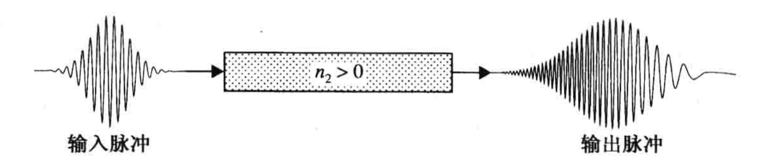


图 14.16　输入和输出脉冲的空间分布，输入脉冲没有啁啾，由于非线性介质（n_2>0）中的自相位调制，输出脉冲带有啁啾

设想有一个由相互交叉变化的光纤，一半有 $\beta'' < 0$ 和 n_2=0，剩下的 $\beta'' = 0$ 和 n_2>0。这样的一根光纤由三段组成，如图 14.17 所示。我们在平面 1 开始一个变换限制脉冲，由于色散 $\beta'' \neq 0$，该脉冲在平面 2 展开并且啁啾，如在第 7 章中讨论的一样。在非线性光纤（n_2>0）中传播导致在平面 3 发生啁啾符号反转而脉冲长度不变。在最后一单元（$\beta'' < 0$）的色散光纤中，低频部分脉冲前沿速度相对降低，在平面 4 得到一个原始的没啁啾的脉冲。在实际光纤中，两种因素（即，n_2 和 β''）同时存在的，这导致了非扩展的稳态脉冲——孤子。

为了探究孤子的性质，我们将导出决定孤子在非线性介质传输的方程。

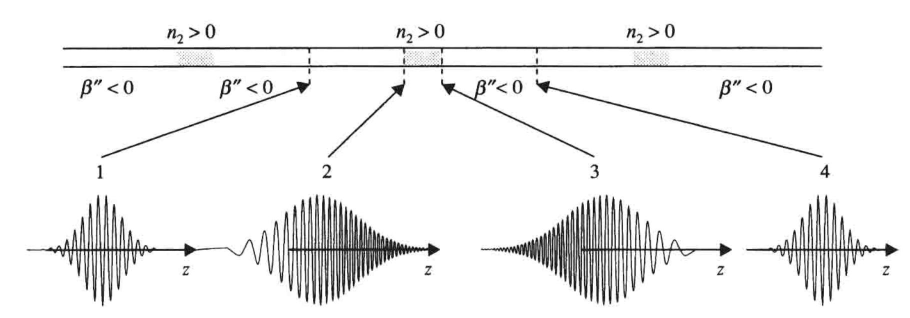


图 14.17　线性色散 β'' 和非线性啁啾 n_2 共同作用下，光脉冲在多段光纤中连续传播的形成孤子的原理图。光脉冲在一个周期性光纤单元的四个平面上的空间分布也被画出

非线性薛定谔方程

我们对在非线性和色散介质中传输的脉冲形状包络特别感兴趣。考虑一个光脉冲沿 z 轴传输，脉冲的电场可以写成

$$E(z,t)=\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)e^{i(\omega t-\beta z)}d\omega \tag{14.5-6}$$

式中 $S(\omega)$ 是脉冲的傅里叶谱，β 是传输常量。在色散介质中，传输常量可以写为

$$\beta(\omega)=\beta_0+\beta'(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}\beta''(\omega-\omega_0)^2+\cdots \tag{14.5-7}$$

这里 ω_0 是参考频率，它常被作为脉冲的载波频率。且

$$\beta_0=\beta(\omega_0),\quad \beta'=\left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega}\right)_{\omega=\omega_0},\quad \beta''=\left(\frac{\partial^2\beta}{\partial\omega^2}\right)_{\omega=\omega_0} \tag{14.5-8}$$

利用方程式（14.5-7），电场表达式（14.5-6）可以写成为

$$E(z,t)=e^{i(\omega_0 t-\beta_0 z)}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega_0+\Omega)e^{i(\Omega t-\beta'\Omega z-\beta''\Omega^2 z/2)}d\Omega \tag{14.5-9}$$

式中 Ω 是从参考频率 ω_0 测量得到的。

$$\Omega=\omega-\omega_0 \tag{14.5-10}$$

如果我们将电场写成

$$E(z,t)=A(z,t)e^{i(\omega_0 t-\beta_0 z)} \tag{14.5-11}$$

那么脉冲的振幅（或包络函数）可以写成

$$A(z,t)=\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega_0+\Omega)e^{i(\Omega t-\beta'\Omega z-\beta''\Omega^2 z/2)}d\Omega \tag{14.5-12}$$

从这个积分形式，我们可以导出一个关于振幅演化（或传播）的微分方程如下。对方程式（14.5-12）取偏微分，我们得到

$$\frac{\partial}{\partial t}A(z,t)=i\int_{-\infty}^{\infty}\Omega S(\omega_0+\Omega)e^{i(\Omega t-\beta'\Omega z-\beta''\Omega^2 z/2)}d\Omega$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}A(z,t)=-\int_{-\infty}^{\infty}\Omega^2 S(\omega_0+\Omega)e^{i(\Omega t-\beta'\Omega z-\beta''\Omega^2 z/2)}d\Omega$$

$$\frac{\partial}{\partial z}A(z,t)=-i\int_{-\infty}^{\infty}(\beta'\Omega+\beta''\Omega^2/2)S(\omega_0+\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Omega t-\beta'\Omega z-\beta''\Omega^2 z/2)}\mathrm{d}\Omega \tag{14.5-13}$$

按照方程式（14.5-13），线性介质中 $A(z,t)$的包络方程可以写成

$$\frac{\partial A}{\partial z}+\frac{1}{v_g}\frac{\partial A}{\partial t}-i\frac{\beta''}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}=0 \tag{14.5-14}$$

式中 v_g 是群速，由下式给出

$$v_g=\frac{1}{\beta'}=\left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\right)_{\omega=\omega_0} \tag{14.5-15}$$

如果输入功率足够高，我们必须考虑由于 Kerr 效应引起的传输常量 β 的修正，这可以通过在方程式（14.5-9）或方程式（14.5-12）中对传输常量加入一个修正项。我们得到

$$A(z,t)=\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega_0+\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Omega t-\beta'\Omega z-\beta''\Omega^2 z/2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_2 I z}\mathrm{d}\Omega \tag{14.5-16}$$

式中 I 是光波的局域强度，由下式给出

$$I=\tfrac{1}{2}c\varepsilon_0 n_0|A(z,t)|^2 \tag{14.5-17}$$

β_2 由下式给出

$$\beta_2=\frac{\omega_0}{c}n_2 \tag{14.5-18}$$

周围修正项的结果，振幅的空间变化近似为

$$\frac{\partial}{\partial z}A(z,t)=-i\int_{-\infty}^{\infty}(\beta_2 I+\beta'\Omega+\beta''\Omega^2/2)S(\omega_0+\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Omega t-\beta'\Omega z-\beta''\Omega^2 z/2)}\mathrm{d}\Omega \tag{14.5-19}$$

根据方程式（14.5-17）和方程式（14.5-19），包含了 Kerr 效应的场振幅（包络函数）方程变为

$$\frac{\partial A}{\partial z}+\frac{1}{v_g}\frac{\partial A}{\partial t}-i\frac{\beta''}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}=-i\tfrac{1}{2}\omega_0\varepsilon_0 n_0 n_2|A|^2 A \tag{14.5-20}$$

我们发现将坐标系随群速 v_g 一起运动是有用的，定义

$$\tau=t-\frac{z}{v_g} \tag{14.5-21}$$

并重写方程式（14.5-20），得到

$$-i\frac{\partial A}{\partial z}-\frac{\beta''}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2}+\frac{1}{2}\omega_0\varepsilon_0 n_0 n_2|A|^2 A=0 \tag{14.5-22}$$

方程描述了光脉冲在非线性色散介质中的演变过程。称为非线性薛定谔方程的式（14.5-22）是我们的主要结果。在 $\beta''<0$时，方程式（14.5-22）的解为

$$A(z,\tau)=A_0\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma z}}{\cosh(\tau/\tau_0)}=A_0\,\mathrm{sech}(\tau/\tau_0)\exp(-i\gamma z) \tag{14.5-23}$$

式中 A_0 是实常数，τ_0 和 γ 是常量，由下式给出

$$\frac{1}{\tau_0}=\left(\frac{\omega_0\varepsilon_0 n_0 n_2}{-2\beta''}\right)^{1/2}A_0$$

$$\gamma=-\frac{\beta''}{2\tau_0^2}=\frac{\omega_0\varepsilon_0 n_0 n_2}{4}A_0^2 \tag{14.5-24}$$

我们注意到在 $\beta''<0$ 和 $n_2>0$ 时，两个常量 τ_0 和 γ 都是正的。在以（z,t）为基本变量下，基本孤子解为

$$A(z,t)=A_0\,\mathrm{sech}\left(\frac{t-z/v_g}{\tau_0}\right)\exp(-i\gamma z) \tag{14.5-25}$$

基本孤子的强度分布如图 14.18 所示。在强度最大的一半的全宽为

$$\tau_{\mathrm{FWHM}}=1.76\tau_0 \tag{14.5-26}$$

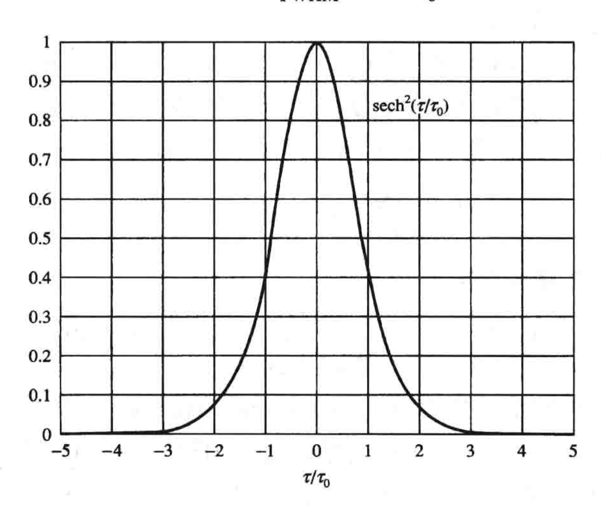


图 14.18　基本孤子的强度分布曲线

我们可以将孤子的展宽 τ_0 看成为独立的参量，它与所给出的 β'' 和 n_2 一起表示光纤中孤子的特性。根据方程式（14.5-24），一旦给定 τ_0 后，A（z,t）的两个常量 A_0 和 γ 就能确定。注意振幅 A_0 不是任意常量。脉冲的能量由下式给出

$$U=\tfrac{1}{2}cn_0\varepsilon_0 A_{\mathrm{eff}}\int|E(z,t)|^2\,\mathrm{d}\tau \tag{14.5-27}$$

式中 A_{eff} 是光纤中传播模式的有效面积。

利用 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{sech}^2(x)\mathrm{d}x=2$，我们可以把脉冲能量写成

$$U=\tfrac{1}{2}cn_0\varepsilon_0 A_{\mathrm{eff}}\tau_0 A_0^2 \tag{14.5-28}$$

或等价地，根据方程（14.5-24）写成

$$U=\frac{-\beta'' c}{\tau_0\omega_0 n_2}A_{\mathrm{eff}} \tag{14.5-29}$$

在 $\beta''<0$ 时，U 为正。用常用的色散参数 D（单位：ps/nm • km），根据方程（7.1-17）

$$D=-\frac{2\pi c}{\lambda_0^2}\beta'' \tag{14.5-30}$$

脉冲能量可以写成

$$U = \frac{\lambda_0^3 D}{4\pi^2 c\tau_0 n_2} A_{\text{eff}} \tag{14.5-31}$$

我们注意到只要脉冲宽度确定，基本孤子的能量就被确定。脉冲能量与脉冲宽度成反比，所以低能量的孤子的脉冲宽，这引起了在长距离光纤中由于损耗脉冲变宽。我们注意到，在给定的光纤中（β'' 和 n_2 固定），孤子电场的峰值 A_0 由关系式（14.5-24）决定。因为场由脉冲的持续时间限制，孤子的峰值功率为

$$P_{孤子} = \frac{U}{\tau_{\text{FWHM}}} = \frac{\lambda_0^3 D}{4\pi^2 c\tau_0 \tau_{\text{FWHM}} n_2} A_{\text{eff}} \tag{14.5-32}$$

下面的例子可以帮助我们得到一些孤子性质和孤子能量范围的了解。

例：石英光纤中的光孤子。

我们将利用以下数据：$\lambda_0 = 1.55\times10^{-6}\text{m}$，$n_0 = 1.45$，$n_2 = 3\times10^{-20}\text{m}^2/\text{W}$，$D = 18\text{ps/nm-km}$，纤芯有效面积为 $A_{\text{eff}} = 100\mu\text{m}^2$。假设数据传输率为 10^{10}bit/s，$\tau_{\text{FWHM}} = 3\times10^{-11}\text{s}$，$\tau_0 = \tau_{\text{FWHM}}/1.76 = 1.76\times10^{-11}\text{s}$，根据方程（14.5-31）孤子能量可以表达为

$$U = \frac{\lambda_0^3 D}{4\pi^2 c\tau_0 n_2} A_{\text{eff}} = 1.1\times10^{-12}\text{J}$$

这样，光纤中孤子的峰值功率为

$$P_{孤子} = \frac{U}{\tau_{\text{FWHM}}} = \frac{\lambda_0^3 D}{4\pi^2 c\tau_0 \tau_{\text{FWHM}} n_2} A_{\text{eff}} = 0.036\text{W}$$

我们注意到，如果我们希望高比特 $f_{\text{bit}} > 10^{10}$ bit/s 的通信，则需要应用较小的 τ_0。这将增大峰值功率，它与 τ_0^{-2} 成正比。当光纤中功率超过 100mW，这对应于光纤中的能量密度接近 10^5W/cm^2。这样的强度使得非线性效应如拉曼效应和四波混频变得非常重要，并引起退化[2]。

最近研究比较多的光纤中的光孤子通信问题大部分在由 L.Mollenauer[7~14]等人的实验得到验证，光孤子通信在长距离（数千千米）时也同样适用。

高阶孤子

非线性薛定谔方程（NLS）同样适用于高阶模传输，比如一个输入脉冲形式为

$$A(z=0, \tau) = NA_0 \operatorname{sech}(\tau/\tau_0) \tag{14.5-33}$$

式中 N 是整数称为孤子的阶数，N=1,2 时的非线性薛定谔方程（NLS）的解析解由文献[15~17]给出

$$A_1(z,\tau) = A_0 \frac{1}{\cosh(\tau/\tau_0)} \exp(-i\gamma z) \tag{14.5-34}$$

$$A_2(z,\tau) = A_0 \frac{4[\cosh(3\tau/\tau_0) + 3e^{-i8\gamma z}\cosh(\tau/\tau_0)]}{[\cosh(4\tau/\tau_0) + 4\cosh(2\tau/\tau_0) + 3\cos(8\gamma z)]} \exp(-i\gamma z) \tag{14.5-35}$$

方程（14.5-34）给出的一阶解（基本孤子）包含时间分布函数 $\operatorname{sech}^2(\tau/\tau_0)$，它与光纤中 z 的大小无关，也就是说基本孤子形状在传输时保持最初的形态不变。但是，二阶孤子（N=2）的形状与光纤中 z 的大小有关。事实上，脉冲形状是一个关于 z 的周期函数。所有

的孤子的振动周期是 $\gamma z = \pi/4$ 或等价为

$$z_{\text{period}} = \frac{\pi}{4\gamma} = -\frac{\pi\tau_0^2}{2\beta''} \tag{14.5-36}$$

这里我们注意到 $\beta'' < 0$，周期可以写成关于色散参数 D（ps/nm • km）的形式

$$z_{\text{period}} = \frac{\pi^2 c\tau_0^2}{D\lambda_0^2} \tag{14.5-37}$$

上面给出的石英光纤中孤子的例子，孤子周期为 z_{period}=21km（脉冲的 FWHM 宽度为 30ps）。孤子的周期与脉冲宽度的平方成比例。结果周期变得非常小成为微微秒孤子。高阶孤子的演化在附近是 $\gamma z = \pi/8$ 对称的。当 N>2，高阶孤子的解析解不可得到。图 14.19 是 N=2 的二阶孤子在光纤不同的位置的脉冲形状。我们注意到当光脉冲在光纤中传输时，脉冲形状发生了周期性的压缩和展宽。

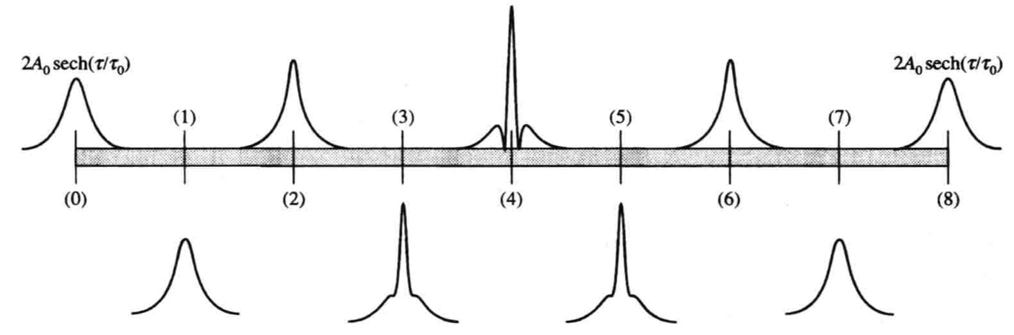


图 14.19　光纤中不同位置的二阶孤子（N=2）脉冲的时域分布 $|A_2|$：(0) γz =0，(1) $\gamma z = \pi/32$，(2) $\gamma z = 2\pi/32$，(3) $\gamma z = 3\pi/32$，(4) $\gamma z = 4\pi/32$，(5) $\gamma z = 5\pi/32$，(6) $\gamma z = 6\pi/32$，(7) $\gamma z = 7\pi/32$，(8) $\gamma z = 8\pi/32$

习题

14.1　利用方程式（14.1-21）

$$\Delta\omega = \omega'(t) - \omega = \frac{2\pi}{\lambda} n_2 L \frac{2t}{\tau^2} I_0 \exp(-\frac{t^2}{\tau^2})$$

（a）画出 $\Delta\omega$ 随时间变化的函数曲线，并求出 $\Delta\omega$ 的最大值；

（b）估算并证明由于自相位调制引起的频谱展宽为

$$\Delta\omega_{\text{展宽}} = \frac{8\pi}{\sqrt{2e}} n_2 \frac{I_0 L}{\tau\lambda}$$

式中 L 为传播长度，e=2.71828。

14.2　证明非简并四波混频的耦合方程式（14.3-18）与能量守恒关系一致：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(|A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_3|^2 + |A_4|^2\right) = 0$$

假设 $\alpha = 0$，$f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f$，频率满足方程式（14.3-3）。

14.3　在色散（β''）影响可以忽略的介质中，包络方程式（14.5-20）化为

$$\frac{\partial A}{\partial z}+\frac{1}{v_g}\frac{\partial A}{\partial z}=-i\frac{1}{2}\omega_0\varepsilon_0 n_0 n_2 |A|^2 A$$

证明在短距离，输入脉冲信号包络为 $A(t)=A_0\exp(-\alpha t^2)$，不考虑色散的情况下，传播函数为

$$A(z,t)=A\left(t-\frac{z}{v_g}\right)\exp\left(-i\frac{\omega_0\varepsilon_0 n_0 n_2 z}{2}|A(z,t)|^2\right) \tag{14.P-1}$$

14.4　证明对于高斯光脉冲包络 $A(t)=A_0\exp(-\alpha t^2)$，光强密度（ $\mathrm{W/m^2}$ ）可以写成

$$I(t)=\frac{|A(t)|^2}{2\eta}=\tfrac{1}{2}c\varepsilon_0 n_0|A(t)|^2=I_0\exp(-2\alpha t^2)$$
$$I_0=\frac{A_0^2}{2\eta}=\tfrac{1}{2}c\varepsilon_0 n_0 A_0^2 \tag{14.P-2}$$

再证明：在色散（ $\beta''\neq 0$ ）和非线性（ $n_2\neq 0$ ）光纤中，输出啁啾脉冲的波峰表达式为

$$A(z,t)\cong A\left(t-\frac{z}{v_g}\right)\exp\left[i\frac{2\omega_0 n_2\alpha I_0 z}{c}\left(t-\frac{z}{v_g}\right)^2\right]$$

14.5　如图 14.17 所示，一入射到周期性光纤的光脉冲，在端口 1 处的脉冲包络为一无啁啾的高斯脉冲 $A(t)=A_0\exp(-\alpha t^2)$，利用 7.2 节的结论[主要参考方程（72-13）]和习题 14.2，证明在端口 1 与端口 2 之间的啁啾脉冲可能在端口 3 和端口 4 之间被还原，在输出端 4 得到如图所示的原始脉冲。导出脉冲包络在端口 1 与端口 4 之间复原的必要条件。[提示：应该找出脉冲反转条件，在端口 1 和端口 4 处脉冲还原

$$I_0=\frac{\lambda_0|\beta''|\alpha}{\pi|n_2|}\left(\frac{L}{L_{\mathrm{NL}}}\right)\sqrt{1+(2\beta''L\alpha)^2} \tag{14.P-3}$$

式中 $2L$ 是色散光纤段的长度（图 14.7 显示一个包含二段长度为 L 的色散光纤并跨接一段长度为 L_{NL} 的非线性光纤]。

14.6　证明：在条件 $L=L_{(\mathrm{NL})}$ 和 $4|\beta''|^2\alpha^2L^2\ll 1$ 极限下，表达式（14.P-3）与方程式（14.5-24）一致，其中我们取 $2\alpha=1/\tau_0^2$。

14.7　已知 sech 脉冲 $A(t)=A_0\,\mathrm{sech}(t/\tau_0)$，利用下列接分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sech}(\alpha t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{2\pi}{\alpha}\mathrm{sech}(\frac{2\pi}{\alpha}\omega)$$

证明：

$$\Delta t_{1/2}\Delta\omega_{1/2}=1.97$$

式中 $\Delta t_{1/2}$ 和 $\Delta\omega_{1/2}$ 分别是时间分布和频率分布取最大值一半时的全宽。Sech 函数的傅里叶变换也是 sech 函数。

14.8　考虑由方程式（14.2-16）、式（14.2-17）所给出的非线性极化项。对于各向同性介质，非线性极化强度方向应该平行于电场方向。

（a）证明

$$\begin{aligned}&4\chi_{1111}E_xE_x+4(\chi_{1122}+\chi_{1212}+\chi_{1221})E_yE_y\\&=4\chi_{2222}E_yE_y+4(\chi_{2211}+\chi_{2121}+\chi_{2112})E_xE_x\end{aligned}$$

（b）利用 x 与 y 的对称性，证明

$$\chi_{1122}=\chi_{2211},\quad \chi_{1212}=\chi_{2121},\quad \chi_{1221}=\chi_{2112}$$

（c）证明

$$\chi_{1111}=\chi_{1122}+\chi_{1212}+\chi_{1221},\quad \chi_{1111}=\chi_{2222}$$

[提示：（a）中的方程对所有的 E_x 与 E_y 均成立]。

14.9

（a）推导方程式（14.3-11）。

（b）推导方程式（14.3-18）。

（c）推导方程式（14.3-24)，式（14.3-25）和式（14.3-29）。

（d）推导方程式（14.3-32）的解。

（e）当 $\alpha \ll |\Delta\beta|$ 时，推导最佳耦合长度（14.3-41）。

14.10

（a）推导方程式（14.4-4）。

（b）推导方程式（14.4-7）。

（c）推导方程式（14.4-12）和式（14.4-24）。

（d）推导方程式（14.4-17）。

14.11

证明：在 z 趋近于 0 时，方程式（14.5-35）简化为方程式（14.5-33）。

参考文献

1 Wu, W., P. Yeh, and S. Chi, Phase conjugation by four-wave mixing in single mode fibers. *IEEE Photonics Tech. Lett.* **6**(12):1448 (1994).

2 Agrawal, G. P., *Nonlinear Fiber Optics*. Academic Press, London, 1989.

3 Yariv, A., D. Fekete, and D. M. Pepper, Compensation for channel dispersion by nonlinear optical phase conjugation. *Opt. Lett.* **4**:52 (1979).

4 Watanabe, S., T. Naito, and T. Chikama, Compensation of chromatic dispersion in a single mode fiber by optical phase conjugation. *IEEE Photonics Technol. Lett.* **5**:92 (1993).

5 Hasegawa, A., and F. D. Tappert, Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion. *Appl. Phys. Lett.* **23**:142 (1984).

6 Dodd, R. K., J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, and H. C. Morris, *Solitons and Nonlinear Wave Equations*. Academic Press, London, 1982.

7 Mollenauer, L. F., R. H. Stolen, and J. P. Gordon, *Phys. Rev. Lett.* **45**:1095 (1980).

8 Mollenauer, L. F., and R. H. Stolen, *Opt. Lett.* **9**:13 (1984).

9 Mollenauer, L. F., and J. P. Gordon, Long-distance, high-bit-rate transmission using solitons in optical fibers. In: *The Froehlic/Kent Encyclopedia of Telecommunication*. Marcel Dekker, New York, 1995, p. 329. Excellent semipopular review article.

10 Gordon, J. P., and H. A. Haus, Random walk of coherently amplified solitons in optical fiber. *Opt. Lett.* **11**:665 (1986).

11 Mecozzi, A., J. D. Morres, H. A. Haus, and Y. Lai, Solition transmission control. *Opt. Lett.* **16**:1841 (1991).

12 Kodama, Y., and A. Hasegawa, Generation of asymptotically stable optical solitons and suppression of the Gordon–Haus effect. *Opt. Lett.* **17**:33 (1992).

13 Mollenauer, L. F., J. P. Gordon, and S. G. Evangelides, The sliding frequency guiding filter:

an improved form of soliton jitter control. *Opt. Lett.* **17**:1675 (1992).

14 Mollenauer, L. F., E. Lichtman, M. J. Neubelt, and G. T. Harvey, Demonstration using sliding-frequency guiding filters of error-free soliton transmission over more than 20 Mm at 10 Gbit/s single channel and over more than 13 Mm at 20 Gbit/s in a two channel WDM. *Electtron. Lett.* **29**:910 (1993).

15 Zakharov, V. E., and A. B. Schabat, *Sov. Phys. JETP* **34**:62 (1972).

16 Satsuma, J., and N. Yajima, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **N55**:284 (1974).

17 Ozyazici, M. S., and M. Sayin, Effect of loss and pulse width variation on soliton propagation. *J. Optoelectron. Adv. Mater.* **5**:(2): 447 (2003).

第 15 章　半导体激光器——理论及应用

15.0　引言

我们已经用原子系统离散的量子态讨论了激光器的基本原理。列举了氩离子激光器和红宝石激光器。在原子体系中当粒子数反转通过从高能态到低能态的受激辐射产生激光。在这一章中，我么们将讨论一类重要的激光器，半导体激光器。这类激光器，从半导体的高能态（倒带）到低能态（价带）的跃迁产生相干光辐射。

1961 年[1~3]发明的半导体激光器是第一个实现由研究课题和专门化应用向大批量消费性生产跃变的激光器。半导体激光器广泛地应用于家用产品（如 CD 播放器）和光通信网络。从经济效益和应用程度上来说，它在所有激光器中是最重要的。半导体激光器所具有的主要特点如下：

1. 体积小（300μm×10μm×50μm），容易组装进其他设备中；
2. 低功率电流（一般为 2V 电压时 15mA）直接泵浦，可由传统的晶体管电路直接驱动；
3. 能有效地将电能转化为光能，实际功率大于 50%；
4. 能以 2 万兆赫以上的频率直接调制泵浦电流，进而调制其输出；
5. 能在单片上与电子场效应晶体管、微波振荡器、双极晶体管以及Ⅲ-Ⅴ族半导体的光学元部件形成集成光电子电路；
6. 基于半导体的制造技术，适用于大批量生产；
7. 在输出光束大小上与典型的硅基光纤相容，能调节输出光束的波长使其在这类光纤的低损耗（$\lambda=1.5\mu m$）、低色散（$\lambda=1.3\mu m$）区域。

在显示应用上输出波长可达到光谱中蓝光的部分，在光存储上可实现高功率的输出。

从教学角度来说，理解现代半导体激光器的工作原理，不仅要了解第 5 章介绍的辐射与电子相互作用基本原理，还要了解电介质波导[4,5]（第 3 章）和半导体固体理论[6,7]。后者将在下面的章节里进行介绍。

15.1　半导体物理基础知识

在这一节里，将简要介绍一些了解半导体激光器所需的基本背景材料。学生还应阅读一些关于固态物质的波动力学（例如参阅[6]）的文章，以深入研究该课题。半导体中的电子与其他激光器介质中的电子最大的不同是半导体中所有的电子占据并共用整个晶体结构。而在传统的激光器介质如红宝石中 Cr^{3+}电子位于 Cr^{3+}母离子中 1 或 2 Å 的区域。此外，对于典型的铬掺杂水平 $2\times10^{19}cm^{-3}$，相邻 Cr^{3+}的平均间隔为 20 Å。在某一给定离子中的电子与其他

离子中的电子不发生联系。换句话说，电子是很好地局域化的，电子能量状态是离散的。

另一方面，在半导体中，由于邻近原子的存在，电子不再是局域化的。考虑硅晶体，当硅原子是无限地分开，每一个独立的硅原子周围的电子态是分立的，电子的波函数很好地局域在硅原子核的周围。当将硅原子的间距减小为硅晶体中的情形，电子态展宽为电子能带（见图 15.1）。在能带间出现能隙，由于能带存在宽度，能隙的宽度比独立原子的相邻的能级间距要小。

当原子的间距减小形成固态晶体，电子的波函数不再局域而形成能带。这样波函数扩展到整个晶体。由于电子的波函数在空间上的重叠，一个晶体中没有两个电子能处于同一量子态上，即有相同的本征函数。这就是所谓的“泡利不相容原理”。它是量子力学重要的基本原理之一。因此每个电子必须拥有各自的空间波函数和相应的能量本征值（与该态有关的总能量）。如果为每一个存在的电子能量（本征能量）画一条水平线（如图 15.1 所示），我们会发现带中的能级被“能量间隙”（禁带）而隔开。当原子被无限地分开，这些能带退变为分立的能级。图 15.1 是一个晶体中电子能级的图解。表 15.1 列出了一些半导体材料和它们的一些参数。

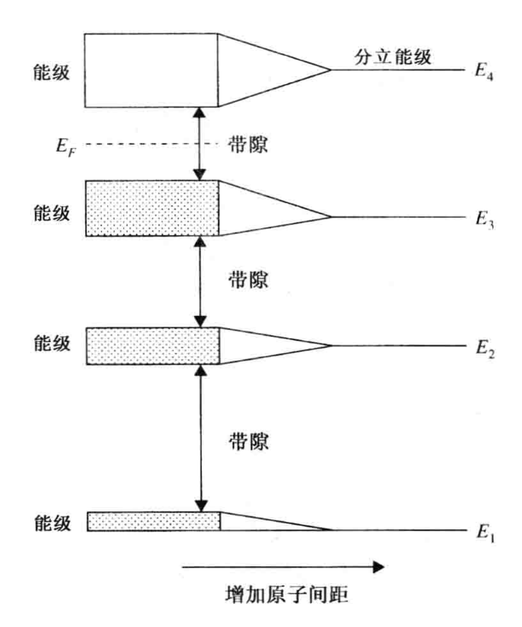


图 15.1　晶体中电子的能级图。当原子靠近形成固态晶体分立能态展宽为能带。在某一给定材料中，这些能级从基态能级一直到上端的高能级都被占据着。能量 E_F 标志着在 $T\to 0$K 时，由完全被占据的电子态($E<E_F$)跃迁到空状态（ $E>E_F$ ），叫做“费米能级”。除特殊情况，一般它不与晶体内电子的本征能量相对应

容许的能量状态被占据的方式决定了晶体的导电性能。如果电子正好填满一个或多个能带而下一个能带完全是空的，两带之间的间隙有足够大，比方说～3eV，这样的晶体是绝缘体。我们知道在室温下热能 k_BT 仅为 0.026eV 。这么宽的能带和能隙，穿过带隙的热激发可以忽略不计，外加电场将不会有电流出现。在恒定的力作用下，电子的动量和能量随时间增加。尽管如此，在完全填满的能带中，没有一个能量状态可容纳“被加速”的电子。既然每一个允态已被占据，当加上电场后并没有任何改变。这就是泡利不相容原理的结果。

表 15.1　典型半导体材料的参数

材料	带隙（eV）	能带	迁移率（300K）$(cm^2/V-s)$ 电子	空穴	有效质量 电子（纵/横模）	空穴（重/轻）	介电常数 $\varepsilon/\varepsilon_0$	折射率 $(h\nu=E_g)$
C	5.47	间接	2000	2100	1.4/0.36	1.08/0.36	5.7	-
Si	1.124	间接	1450	505	0.92/0.19	0.54/0.15	11.9	3.5
AlN	6.2	直接	-	14	-	-	9.14	2.7
AlP	2.41	间接	60	450	3.61/0.21	0.51/0.21	9.8	-
AlAs	2.15	间接	294	-	1.1/0.19	0.41/0.15	10	3.2
AlSb	1.61	间接	200	400	1.8/0.26	0.33/0.12	12	3.6
GaN	3.44	直接	440	130	0.22	0.96	10.4	-
GaP	2.27	间接	160	135	4.8/0.25	0.67/0.17	11.1	3.45
GaAs	1.424	直接	9200	320	0.063	0.5/0.067	12.4	3.6
GaSb	0.75	直接	3750	680	0.0412	0.28/0.05	15.7	3.8
InN	1.89	直接	250	-	0.12	0.5/0.17	9.3	-
InP	1.34	直接	5900	150	0.079	0.56/0.12	12.6	3.4
InAs	0.353	直接	33000	450	0.021	0.35/0.026	15.1	3.5
InSb	0.17	直接	77000	850	0.0136	0.34/0.0158	16.8	4.2

如果上端的被充满的带（价带）与紧位于其上方的带（导带）之间的间隙较小，比方说＜2eV，那么室温下的热激发就会引起电子部分地由价带向导带转移。这样，晶体就可以导电了。这种晶体叫做半导体。它们的导电性不仅受温度控制，而且受杂质原子掺杂水平的影响。在某一给定的带，如价带中，原子的波函数可由矢量 $\boldsymbol{k}$ 和相应的（布洛赫）波函数来表示

$$\psi(\boldsymbol{r}) = u_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{15.1-1}$$

函数 u_K 具有周期性并与该晶格结构具有相同的周期。因子 $\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$ 表征了电子的运动的波动性。在自由电子近似下，对所有的矢量 $\boldsymbol{k}$ 取 $u_K(r)=1$。这样波函数为简单平面波。波矢的量级与电子的德布罗意波长 λ_e 有如下关系

$$\lambda_e = \frac{2\pi}{|\boldsymbol{k}|} = \frac{2\pi}{k} \tag{15.1-2}$$

矢量 $\boldsymbol{k}$ 只能有一系列给定的值（即被量子化了）。该值的获得要求以穿过边长为 L_x, L_y, L_z 晶体的总相移 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$ 必须是 2π的整数倍，得

$$k_i = \frac{2\pi}{L_i}s, \quad s = 1, 2, 3, \cdots \tag{15.1-3}$$

这里 $i = x, y, z$。因此可以将 $\boldsymbol{k}$ 空间的体积分成许多单元，每个单元体积为

$$\Delta V_k \equiv \Delta k_x\ \Delta k_y\ \Delta k_z = \frac{(2\pi)^3}{L_x L_y L_z} = \frac{(2\pi)^3}{V} \tag{15.1-4}$$

其中 V 是晶体的体积；上式中每一个微体积元都对应一个量子态（如果考虑到每个电子固有的两个自旋态，就会有两个量子态）。在径向厚度为 dk 半径为 k 的球壳（$\boldsymbol{k}$ 空间）内，该状态的数量等于球壳的体积除以由式（15.1-4）定义的每个状态的体积 ΔV_k

$$\rho(k)\,\mathrm{d}k = \frac{k^2 V}{\pi^2}\mathrm{d}k \tag{15.1-5}$$

所以 $\rho(k)$ 就是 $\boldsymbol{k}$ 空间内单位体积中的量子态数（包含因子 2 是计入在某一给定（空间）状态中的电子处于“向上”或“向下”的自旋状态）。

一个电子 $\boldsymbol{k}$ 在导带（此后由下标注 c 表示）中从能带底量起的能量为

$$E_c(\boldsymbol{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_c} \tag{15.1-6}$$

式中 m_c 是一个电子在导带内的有效质量。在最简单、最理想的情况下（在这里我们就考虑这种情况），该能量只取决于电子波矢的大小 k 而不是其方向。我们知道 $\hbar k$ 是能带中电子的动量。因此公式（15.1-6）中可看做能带中电子的动能。

我们经常需要计算电子的数量，但不是在 $\boldsymbol{k}$ 空间内而是作为能量 E 的一个函数。态密度函数 $\rho(E)$（单位晶体体积中，单位能量范围内电子态的数量）由态守恒关系式来决定

$$\rho(E)\mathrm{d}E = \frac{1}{V}\rho(k)\mathrm{d}k$$

应用式（15.1-5）和式（15.1-6）可以导出

$$\rho_c(E) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m_c}{\hbar^2}\right)^{3/2} E^{1/2}$$

或

$$\rho_c(\omega) = \hbar\rho_c(E) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m_c}{\hbar}\right)^{3/2}\omega^{1/2} \tag{15.1-7}$$

式中 $\hbar\omega = E$ 。由 m_v（价带中的有效质量）代替 m_c 而得出的相似的关系式同样适用于价带。表 15.1 中列出了一些典型的半导体材料的参数。

图 15.2 描述了一个直接带隙半导体的能量 E 与 k 的关系，在该半导体中，在相同 $\boldsymbol{k}$ 值上，存在着导带的最小值和价带的最大值，圆点代表允许（无须占据）的电子能量。请注意，根据式（15.1-3），这些能态均匀地分布在 k 轴上。

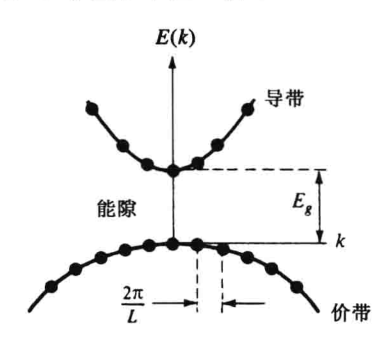


图 15.2　直接带隙半导体的典型能带结构（$m_c < m_v$）。均匀分布的圆点相应于电子能态

费米—狄拉克分布定律

一个电子占据能量为 E 的电子态的概率由费米—狄拉克分布函数[6,7]决定

$$f(E) = \frac{1}{\mathrm{e}^{(E-E_F)/k_B T} + 1} \tag{15.1-8}$$

式中，E_F 是费米能级，k_B 是玻耳兹曼常数（$k_B = 1.38066 \times 10^{-23}$ J/K），T 是绝对温度。特别注意到费米能级时温度的函数。在 $T = 0$K 时费米能级称为费米能。当电子能量远低于费米能级（$E_F - E \gg kT$）时，$f(E) \to 1$，电子态被完全占据；当电子能量远高于费米能级($E - E_F \gg kT$)时，$f(E) \propto \exp(-E/kT)$ 而且接近玻耳兹曼分布。当 $T=0$ 时，$E<E_F$ 则 $f(E)=1$；$E>E_F$ 则 $f(E) = 0$。这样低于费米能级的所有能级都被占据了，而高于费米能级的则全部为空的。在热平衡条件下，单个费米能级既适用于价带，也用于导带。而在热平衡受到扰动的条件下，例如在电流通过 p-n 结，或者由光致激发产生大量传导电子和空穴的体半导体中，导带与价带要用两个分开的费米能级，即称为“准费米能级”的来表示。只要一个能带中载流子散射时间 ($\sim 10^{-12}$s) 比能带之间的平衡时间 ($\sim 10^{-9} - 10^{-3}$s) 短得多，在受激系统中“准费米能级”的概念总是适用的。在 p-n 结激光器中使用大量载流子密度的情况，这个条件通常是满足的。

在半导体中费米能级也取决于掺杂浓度。在高掺杂的半导体中，费米能级或（1）由施主杂质掺杂而进入导带，或（2）由受主杂质掺杂而进入价带。图 15.3 所示，就是这种情况。根据式（15.1-8），在 0K 时 E_F 以下的所有状态都被占满，而高于 E_F 的能态都没有被占满，正如图中所示。从这一点上来说，高掺杂的半导体（也称为简并半导体）即使在温度很低的情况下，其导电性也不会消失，就像金属一样。简并半导体中掺杂浓度很高以至于玻耳兹曼近似失效。在价带中未被占据的状态 [图 15.3（b）中的空白区域] 叫做空穴。除了由于缺少电子而带正电荷并且能量是自上而下不断增加外，我们可以把这些空白区域当做电子来处理。图 15.3（b）中,半导体内空穴的数量就是进入价带顶部非阴影部分内电子态的数量。价带内一个电子受激发从 a 态跃迁到 b 态 [如图 15.3（b）] 的过程也可被看做一个空穴受激发从 b 态跃迁到 a 态的过程。这种观点的好处在于能够用语言和数学描述来对称地讨论导带和价带内的电流。

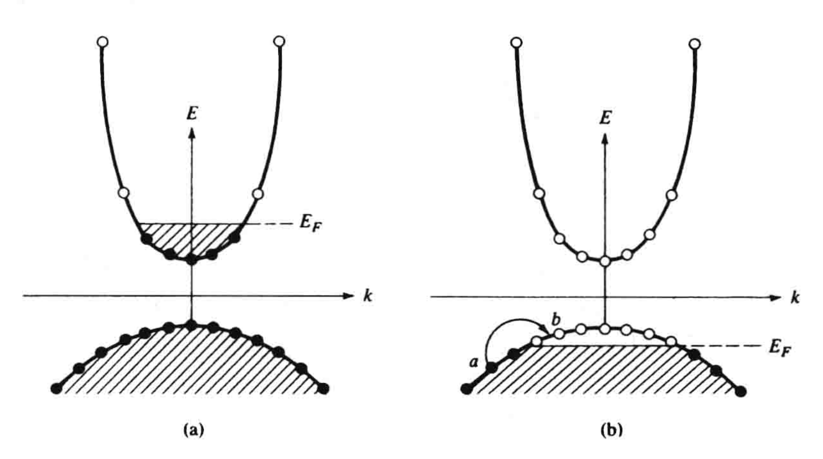


图 15.3　(a)在 0K 时简并的 n 型半导体的能带图；(b) 在 0K 时简并 p 型半导体的能带图。阴影部分代表所有电子态被占满的区域。空白部分代表未被占据的电子态（空穴）

为了更好地评价准费米能级的作用，不妨考虑非热平衡情况。在这种情况下电子以很高的速度受激发并进入简并 p 型半导体内的导带中。这可由下列方法来完成：一是将电子穿过 p-n 结注入 p 区域；二是以 $h\nu > E_g + E_{Fc} + E_{Fv}$ 的强光束照射半导体，这样每吸收一个光子就会有一个电子受激发由价带进入导带。图 15.4 就是这种情况。在受激之后，电子会弛豫，在约 10^{-12}s 内释放光频声子和声频声子回到导带的底部，同时电子通过弛豫穿过能隙回到价带

中去——被称做电子—空穴复合过程——所需的时间为恒定的

$$\tau \sim (3-4) \times 10^{-9}\text{s}$$

在分析半导体光放大的过程中，确定给定激发速率下的准费米能级 E_{Fc} 是很重要的。假定受激载流子进入的导带底部的电子弛豫是瞬间完成的，则有

$$\frac{N_c}{\tau} = \frac{I}{Ve} \tag{15.1-9}$$

式中 N_c 是导带中电子的密度(m^{-3})，I 是注入电流（单位：安培），τ是电子回到价带的弛豫时间（电子－空穴复合时间），V 是电流注入后电子在半导体中所占有的体积。能量在 E 和 $E+\text{d}E$ 之间的电子的密度是被允许的电子态密度 $\rho_c(E)$ 和这些状态被占据的概率 $f_c(E)$ 的乘积。

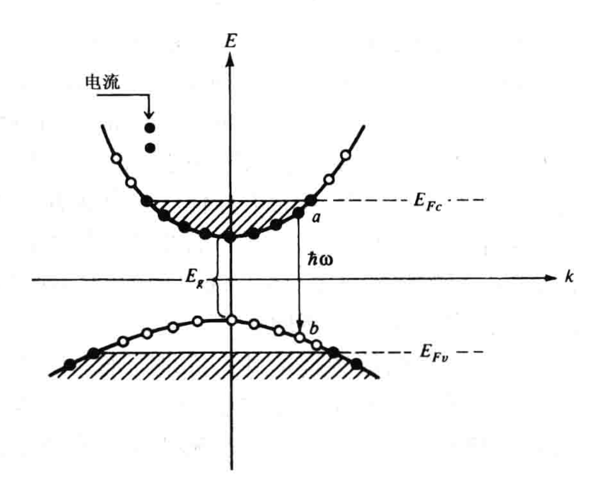


图 15.4　电子以单位体积 I/eV（$I=$ 总电流）的速率被注入半导体中的导带中

由公式（15.1-7）和式（15.1-8）可得

$$N_c = \frac{I\tau}{eV} = \int_0^\infty \rho_c(E) f_c(E)\,\text{d}E$$
$$= \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m_c}{\hbar^2}\right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{E^{1/2}}{\text{e}^{(E-E_{Fc})/k_BT}+1}\text{d}E \tag{15.1-10}$$

对于给定的注入电流 I，式（15.1-10）中唯一的未知量是导带的准费米能级 E_{Fc} 。因此在实际中可以通过数值方法将式（15.1-10）进行转换以求得 I 或 N_c（见附录 E）的函数 $E_{Fc}(T)$的值，这将会在后面用到它。当 T=0 时，该积分可变为

$$\int_0^{E_{F_c}} E^{1/2}\text{d}E = \frac{2}{3}E_{F_c}^{3/2}$$

从而得到

$$E_{Fc}(T=0) = (3\pi^2)^{2/3}\frac{\hbar^2}{2m_c}N_c^{2/3} \tag{15.1-11}$$

在探讨半导体中的光增益之前我们还需提到这样一个事实，即当一个电子在导带的一个态和价带的一个态之间跃迁（诱导地或自发地）时，这两个状态必须有着相同的 $\boldsymbol{k}$ 矢量。这是基于这样的一个事实：根据量子力学，这样一个跃迁速率总是与初态函数和终态复共轭波函数的乘积在晶体体积内的积分成比例。根据式（15.1-1）这样的一个积分趋向于无穷小，

除非满足条件

$$\boldsymbol{k}_f = \boldsymbol{k}_i \tag{15.1-12}$$

因此在如图 15.4 所示那样的能带结构图中，相应的跃迁可由垂直的箭头来表示。式（15.1-12）与这样一个事实一致：光子的动量相对电子的可忽略。

15.2　半导体（激光器）介质内的增益和吸收

考虑如图 15.5 所示的半导体材料，借助于电子泵浦（如电流注入）而形成了一个非热平衡稳定状态。受激形成的高密度的电子和空穴在同一空间内同时存在。这可由（如图所示的）准费米能级 E_{Fc} 和 E_{Fv} 来表明。准费米能级受带电载流子浓度和温度影响。

让（角）频率为 ω_0 的一束光穿过晶体。令 a 代表导带中电子态，b 代表价带中电子态。在这束光的激励下，将会诱导向下的 $a \to b$ 跃迁，从而导致光放大，$b \to a$ 的吸收性跃迁同时发生。如果 $a \to b$ 的跃迁速率超过了 $b \to a$ 的跃迁速率，光束将获得净的放大。

如前一节所讲述的那样，只有导带和价带的电子态有着相同的矢量 $\boldsymbol{k}$ 的跃迁才是允许的，因此图 15.5 中能级 a 和 b 都取某一 $\boldsymbol{k}$ 值。我们来讨论一组这样的能级，它们有着近似的 $\boldsymbol{k}$ 值，因此也就有着几乎相同的跃迁能量

$$\hbar\omega(\boldsymbol{k}) = E_g + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_c} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_v} \tag{15.2-1}$$

（在下面的讨论中，$\boldsymbol{k}$ 与 ω 的依赖关系将会被略去但已作考虑。）根据式（15.1-5），其 $\boldsymbol{k}$ 值位于径向厚度为 dk 的球壳内的这种能级组的密度为 $\rho(k)\mathrm{d}k/V$。

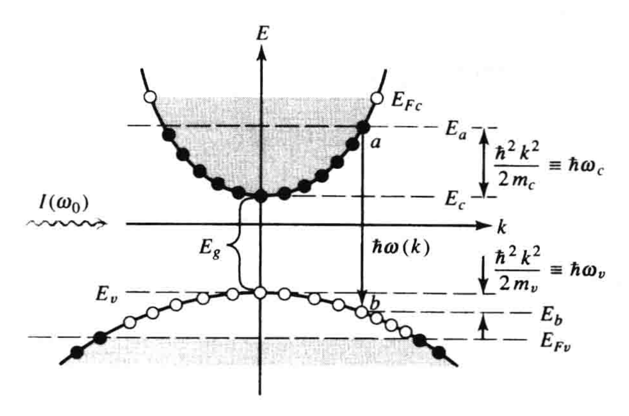


图 15.5　频率为 ω_0，强度为 I（ω_0）的光束入射在被泵浦的半导体介质上，它以准费米能级 E_{Fc} 和 E_{Fv} 表征。表明了一对具有相同 $\boldsymbol{k}$ 值的能级 a–b。$a \to b$ 的受激跃迁贡献一个光子给光束

在继续讲述新内容之前，先让我们复习一下与常规激光介质有关的一些研究结果。增益常数 $\gamma(\omega_0)$ 由式（5.5-7）给出

$$\gamma(\omega_0) = -\frac{k}{n^2}\chi''(\omega_0), \quad k = \frac{2\pi n}{\lambda} \tag{15.2-2}$$

式中 $\chi''(\omega_0)$ 为电极化率的虚部，由公式（5.6-24）得出

$$\chi''(\omega_0)=\frac{(N_1-N_2)\lambda_0^3}{8\pi^3 t_{自发}\Delta\nu n}\frac{1}{1+4(\nu-\nu_0)^2/(\Delta\nu)^2} \tag{15.2-3}$$

联合以上两个等式，并定义“弛豫时间”为$T_2=\dfrac{1}{\pi\Delta\nu}$，于是得

$$\gamma(\omega_0)=\frac{(N_2-N_1)\lambda_0^2}{4n^2 t_{自发}}\frac{T_2}{\pi[1+(\omega-\omega_0)^2T_2^2]} \tag{15.2-4}$$

在半导体中，T_2 是 k 电子和单色场发生相干互作用的平均寿命，具有声子—电子碰撞时间的量级，对于典型的半导体 $T_2 \sim 10^{-12}$s。相对于高能态 a 上的一个电子，相同 k 值的低能态 b 上被另外一个电子占据着。因此向下的跃迁速率

$$R_{a\to b}\propto f_c(E_a)[1-f_v(E_b)]$$

即导带上能级被占据的概率 $f_c(E_a)$ 与价带低能级为空着的概率（$1-f_v$）的乘积。根据式（15.1-8），函数 $f_v(E)$ 和 $f_c(E)$ 可由下列等式给出

$$f_c(E_a)=\frac{1}{e^{(E_a-E_{Fc})/k_BT}+1} \tag{15.2-5}$$

$$f_v(E_b)=\frac{1}{e^{(E_b-E_{Fv})/k_BT}+1} \tag{15.2-6}$$

这里需考虑到在泵浦条件下 $E_{Fc}\neq E_{Fv}$ 的事实。在典型的半导体中，导带电子的准费米能级接近导带底，价带电子的准费米能级接近价带顶。

为了把常规激光器的有关结果用到半导体的情形，可用在径向厚度为 dk 区间内电子和空穴形成的有效反转来替代反转粒子数密度(N_2-N_1)。

$$\begin{aligned}N_2-N_1 &\to \frac{\rho(k)\,\mathrm{d}k}{V}\{f_c(E_a)[1-f_v(E_b)]-f_v(E_b)[1-f_c(E_a)]\}\\ &=\frac{\rho(k)\,\mathrm{d}k}{V}[f_c(E_a)-f_v(E_b)]\end{aligned} \tag{15.2-7}$$

式中光子能量可表示为

$$E_a-E_b\equiv\hbar\omega=E_g+\frac{\hbar^2k^2}{2m_c}+\frac{\hbar^2k^2}{2m_v} \tag{15.2-8}$$

方程式（15.2-7）十分重要，它是常规激光介质（其中的能级占据概率服从玻耳兹曼统计）中粒子数反转与半导体介质（服从费米—狄拉克统计分布）中电子与空穴形成的有效反转之间差异的一个简要的说明。

再回到增益的表达式（15.2-4），利用式（15.2-7）将它重写为

$$\mathrm{d}\gamma(\omega_0)=\frac{\rho(k)\mathrm{d}k}{V}(f_c-f_v)\frac{\lambda_0^2}{4n^2\tau}\left(\frac{T_2}{\pi[1+(\omega-\omega_0)^2T_2^2]}\right)$$

式中ω_0 是光子频率，$\hbar\omega=\hbar\omega(k)$是如式（15-2-1）中参与跃迁的电子态的能量差。微分符号 $\mathrm{d}\gamma.$（ω_0)表示这里受诱导的仅仅是具有 $\boldsymbol{k}$ 矢量而且位于 dk 区间内的电子。为了与通常方法相一致，我们将导带中的电子和价带中的空穴复合的寿命τ来替代自发寿命 $t_{自发}$。为了得到增益常量，必须将所有电子的贡献加起来，即

$$\gamma(\omega_0) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}k\,\rho(k)}{V}[f_c(\omega) - f_v(\omega)]\frac{\lambda_0^2}{4n^2\tau}\left(\frac{T_2}{\pi[1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2]}\right) \tag{15.2-9}$$

我们将发现，在频域ω [$\hbar\omega$ 为能量间距 $E_a(\boldsymbol{k})-E_b(\boldsymbol{k})$]中推导出式（15.2-9）中的积分较为容易。由式（15.2-1）改写能量为

$$\hbar\omega = E_g + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_r} \tag{15.2-10}$$

m_r是折合有效质量，可表示为

$$\frac{1}{m_r} = \frac{1}{m_v} + \frac{1}{m_c} \tag{15.2-11}$$

利用关系式（15.2-10）可得到

$$\mathrm{d}\omega \equiv \frac{\hbar}{m_r} k\mathrm{d}k$$

$$k = \left(\hbar\omega - E_g\right)^{1/2}\left(\frac{2m_r}{\hbar^2}\right)^{1/2}$$

增益系数$\gamma(\omega_0)$的表达式（15.2-9）可变为

$$\gamma(\omega_0) = \int_0^\infty (\hbar\omega - E_g)^{1/2}\left(\frac{2m_r}{\hbar^2}\right)^{1/2} \frac{m_r\lambda_0^2[f_c(\omega) - f_v(\omega)]}{4n^2\pi^2\hbar\tau} \frac{T_2}{\pi[1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2]}\mathrm{d}\omega \tag{15.2-12}$$

在大多数情况下，我们可以替换归一化函数

$$\frac{T_2}{\pi[1+(\omega-\omega_0)^2 T_2^2]} \to \delta(\omega-\omega_0)$$

这只是说明这样一个事实，即该函数的线宽$\Delta\omega\sim T_2^{-1}$ 比其他因素产生的线宽要窄。在这种情况下，对式（15.2-12）求积分即得

$$\gamma(\omega_0) = \frac{\lambda_0^2}{8\pi^2 n^2\tau}\left(\frac{2m_c m_v}{\hbar(m_v + m_c)}\right)^{3/2}\left(\omega_0 - \frac{E_g}{\hbar}\right)^{1/2}[f_c(\omega_0) - f_v(\omega_0)] \tag{15.2-13}$$

式中ω_0是光子频率，$E_a - E_b = \hbar\omega_0$。于是净增益$\gamma(\omega_0) > 0$ 的条件是

$$f_c(\omega_0) > f_v(\omega_0) \tag{15.2-14}$$

在半导体中这个条件与常规粒子数反转条件 $N_2 > N_1$ 等价。利用式（15.2-5）和式（15.2-6），增益条件由式（15.2-14）变为

$$\frac{1}{\mathrm{e}^{(E_a-E_{Fc})/k_BT}+1} > \frac{1}{\mathrm{e}^{(E_b-E_{Fv})/k_BT}+1} \tag{15.2-15}$$

由于 $E_a - E_b = \hbar\omega_0$，由式（15.2-15）可得

$$\hbar\omega_0 < E_{Fc} - E_{Fv} \tag{15.2-16}$$

因而只有光子能量$\hbar\omega_0$比准费米能级间隙小的频率才会得以放大。条件（15.2-16）是由巴索夫（Basov）等人[1]、伯纳德（Bernard）还有杜拉夫格（Duraffourg）[8]首先得出的。图 15.6 表示了增益□(ω_0)关于频率ω_0 的一般特点。当光子能量大于带隙宽度，增益开始增加。当$\hbar\omega_0 < E_g$ 的时候增益变为零，因为在这些能级上不存在电子跃迁现象，在 $\hbar\omega = E_{Fc} - E_{Fv}$ 的频率上增益又变为零，在更高的频率下，光就被半导体吸收了。

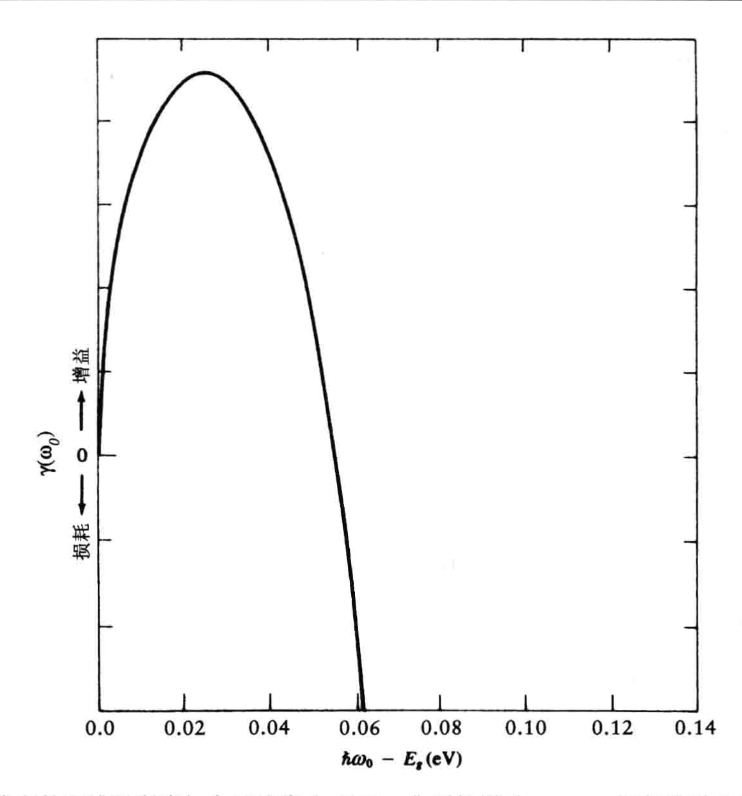


图 15.6　在某一确定的泵浦强度诸如电子浓度为 N 下，典型的增益 $\gamma(\omega_0)$ ~ 频率关系曲线（引自文献[9]）

图 15.7 所示为基于式（15.2-12）计算而得出的，以（注入）电子的密度为参数绘制的曲线图。曲线基于如下物理常量：GaAs: $m_c = 0.067m_e$, $m_v = 0.48m_e$, T_2 ~0.5ps, τ~3×10^{-9}s, E_g = 1.43eV（$m_e = 9.910953\times10^{-31}$kg）。我们注意到获得透明条件（$\gamma$ = 0）的最小密度为 $N_{透明}$ ~1.55 $\times10^{18}$ cm^{-3}，图 15.8 所示为最大增益与给定反转浓度 N_c 的关系。

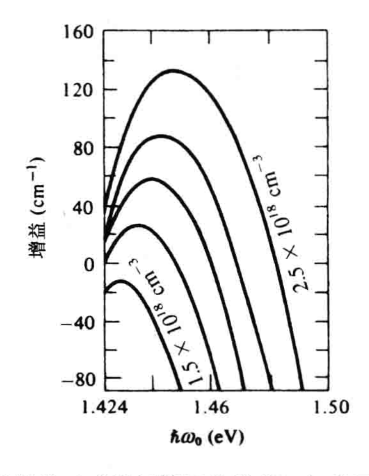


图 15.7　GaAs 光学增益（或损耗等于负增益）与光子能量的关系的计算结果[基于式（15.2-12）]，注入载流子密度为参量。（引自文献[9]）

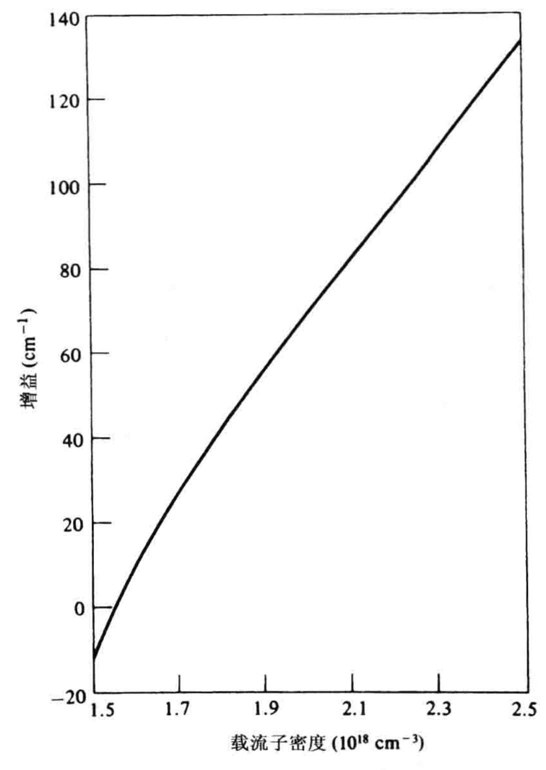


图 15.8　在 T = 300 K 时，图 15.7 中增益峰值 $\gamma_{max}(\omega_0)$ 与反转密度的函数关系曲线

由图 15.8 可知，半导体介质有可能获得高达每厘米数百的增益。而在一个激光器中实际存在的增益量由于饱和现象（见 5.7 节）的出现而与所损耗量相等。在典型半导体激光器中，该现象出现在 $20 < \gamma < 80\ \text{cm}^{-1}$ 时。在这一区域。我们可以用线性关系

$$\gamma_{最大} = B(N - N_{透明}) \tag{15.2-17}$$

来近似地描述图 15.8 中的曲线。满足图 15.8 数据的常量 B 约等于 $1.5\times10^{-16}\ \text{cm}^2$，对于 300K 下工作的 GaAs/GaAlAs 激光器来说这是一个很典型的数据。随着温度 T 的增加，增益常量 B 在降低。这是由于式(15.2-12)中费米函数 $f_c(\omega)$和 $f_v(\omega)$的跃迁区域的变窄造成的。在 77K 时，$B\sim5\times10^{-16}\text{cm}^2$ 。图 15.8 表明，在载流子密度大于透明值（图中的 $N_{透明}\sim1.55\times10^{18}\text{cm}^{-3}$）时，只要适度地增大反转密度，半导体激光二极管的增益就会有很大的增加。因此可以在有源区只有几十微米的半导体激光器内产生振荡。商用激光二极管的典型腔长为约 250μm。图 15.9 表示了增益系数与光子能量与带隙之差的函数关系。

学生可以参阅[10-12]以获得更多有关半导体激光器的基础知识。

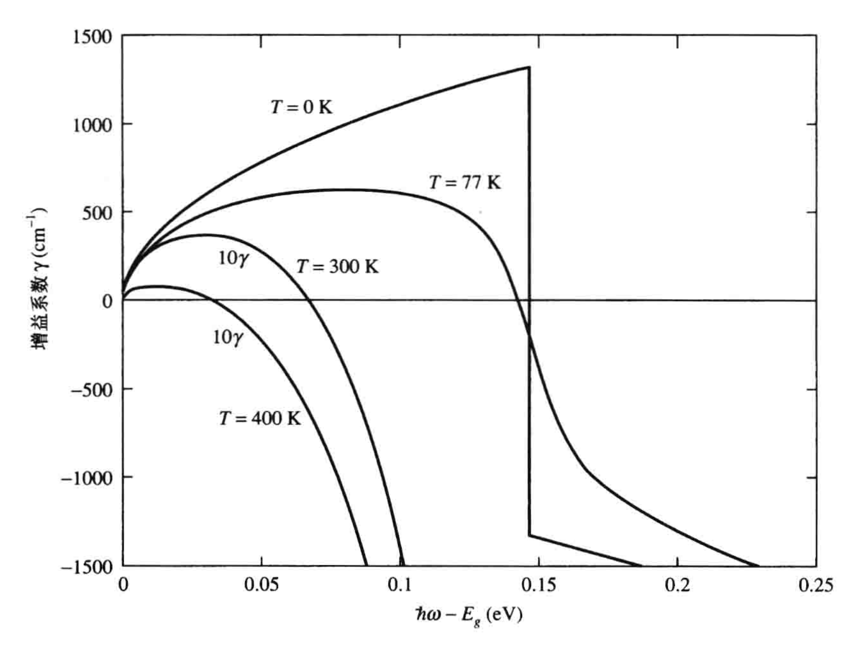


图 15.9　GaAs 激光器的增益系数在不同温度下与光子能量的函数关系图。300K 和 400K 时对应于 10γ。该情形下载流子浓度对应的准费米能级为 $E_{Fc}-E_{Fv}\approx E_g+0.15\text{eV}$

15.3　GaAs/$Ga_{1-x}Al_xAs$ 激光器

按照表 15.1，我们注意到二元 III-V 族半导体的带隙覆盖了较宽的可利用范围（从 1eV 到几个 eV）。因为带隙对应了激光器辐射的光子的能量，所以可覆盖很宽的光谱范围。尽管如此，实际可工作的器件由于衬底材料和晶体生长中的晶格匹配的要求导致半导体材料的选择受到限制。最常用的且缺陷浓度相对低的衬底是 GaAs 和 InP 晶体。在晶体生长发展的早期，已意识到两个二元化合物可形成三元或四元合金半导体。例如，GaAs 和 AlAs 可形成 $Ga_{1-x}Al_xAs$。最重要的两类半导体激光器都是以III-V族半导体为基础的，生长在 GaAs 或 InP 的衬底上。

第一类以 GaAs 和 $Ga_{1-x}Al_xAs$ 为基础。在这种情况下，有源区为 GaAs 或 $Ga_{1-x}Al_xAs$。因为 AlAs 半导体材料的带隙比 GaAs 的大，所以三元化合物 $Ga_{1-x}Al_xAs$ 的带隙介于 GaAs（$x=0, E_{\text{带隙}}=1.43\text{eV}$）和 AlAs（$x=1, E_{\text{带隙}}=2.1\text{eV}$）之间。下标 x 代表了 GaAs 中被铝所代替的镓原子的份数。这样，激光器在 0.75μm <λ< 0.88μm 上发射光子（这取决于有源区的摩尔份数 x 及其掺杂程度）。在石英纤维中，这样的光谱区适合于短距离（小于 2km）的光通信。

第二类半导体的有源区为 $Ga_{1-x}In_xAs_{1-y}P_y$，激光器在 1.1μm <λ<1.6μm（随 x 和 y 的变化而变化）上发射光子。接近 1.55μm 的区域特别有利，因为（如图 3.21 所示）光纤在这一波长上的损耗只有 0.15dB/km 那么小。这使得它非常适用于长距离光通信。

这一节将讨论 GaAs/$Ga_{1-x}Al_xAs$ 激光器。这种类型的普通激光器如图 15.10 所示，有一个很薄（0.1~0.2μm）的 GaAs 薄层夹在两个 GaAlAs 薄层之间。这种激光器通常被叫做双异

质结激光器。这种层状的基本结构是利用外延技术在 GaAs 晶体衬底上生长而成的，所以是不间断地进行结晶。

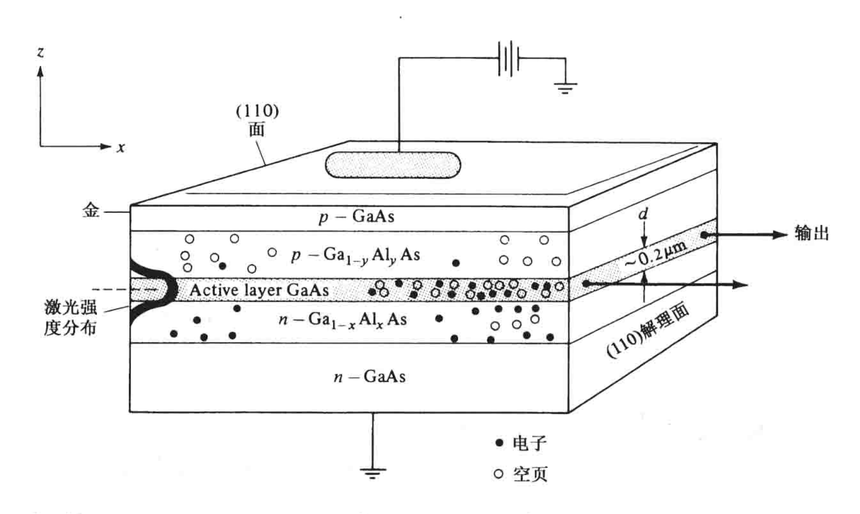


图 15.10　典型的 GaAs/GaAlAs 双异质结激光器。电子和空穴分别从 n 型和 p 型 GaAlAs 层注入到 GaAs 有源层中。由于受激电子—空穴的复合在光子频率 $v = E_g/h$ 附近产生光的放大

较好的晶体生长方法有液相外延和采用有机金属试剂（MOCVD）[11, 13, 14]的化学汽相沉积。还有一种重要方法——分子束外延[11, 13, 15, 16]——在超高真空中控制晶体组分的原子束达到对厚度以及掺杂精确控制。

通常，薄的有源区是不掺杂的，而一个 $Ga_{1-x}Al_xAs$ 层是 n 型重掺杂，另一个是 p 型掺杂，其折射率差为

$$n_{\mathrm{GaAs}} - n_{\mathrm{Ga_{1-x}Al_xAs}} \cong 0.62x$$

GaAs 的折射率与摩尔份数为 x 的三元晶体之间的不同构成了如图 3.1 中所描述的三层介质波导。在这一方面学生应复习第 3 章所讲述的基本模理论。最低阶模式（基模）大部分集中在 GaAs（高折射率）层中。图 15.11 所示为最低模的折射率分布以及典型的基模的强度分布图。当对其进行正向偏置时，电子由 n 型 $Ga_{1-x}Al_xAs$ 区注入到 GaAs 有源区，与此同时空穴从 p 型 $Ga_{1-x}Al_xAs$ 区注入。空穴密度必须与电子密度相等使得保持电中性。

GaAs 和 $Ga_{1-x}Al_xAs$ 禁带宽度之差 ΔE_g 产生的势垒 ΔE_c 阻止了注入到有源区的电子扩散出去进入 p 区。$Ga_{1-x}Al_xAs$ 的禁带宽度与摩尔份数 x 之间的关系可以[13]近似用下式来表示

$$E_g(x<0.37) = (1.424 + 1.267x)\mathrm{eV}$$

并如图 15.12 所示。

在 GaAs/GaAlAs 界面总的能带不连续量ΔE_g 的大部分（60%）由导带边所占有，即ΔE_c=0.6ΔE_g 而只有 40%落在价带ΔE_v = 0.4ΔE_g，因此空穴和电子都被有效地限制在有源区，这种对注入载流子和光模能量在相同区域内的双重限制很可能是成功实现低阈值连续半导体激光器[17~19]的最重要因素。在这些条件下，可以预期，光学模所得到的增益将随 $1/d$ 而变化，其中 d 是有源（GaAs）层的厚度。这是因为在给定总注入电流的情况下，载流子密度，进而增益都会与 $1/d$ 成正比变化。为了进一步讨论与有源区厚度 d 的依赖关系，使这种关系定量化，我们先给模增益下个定义

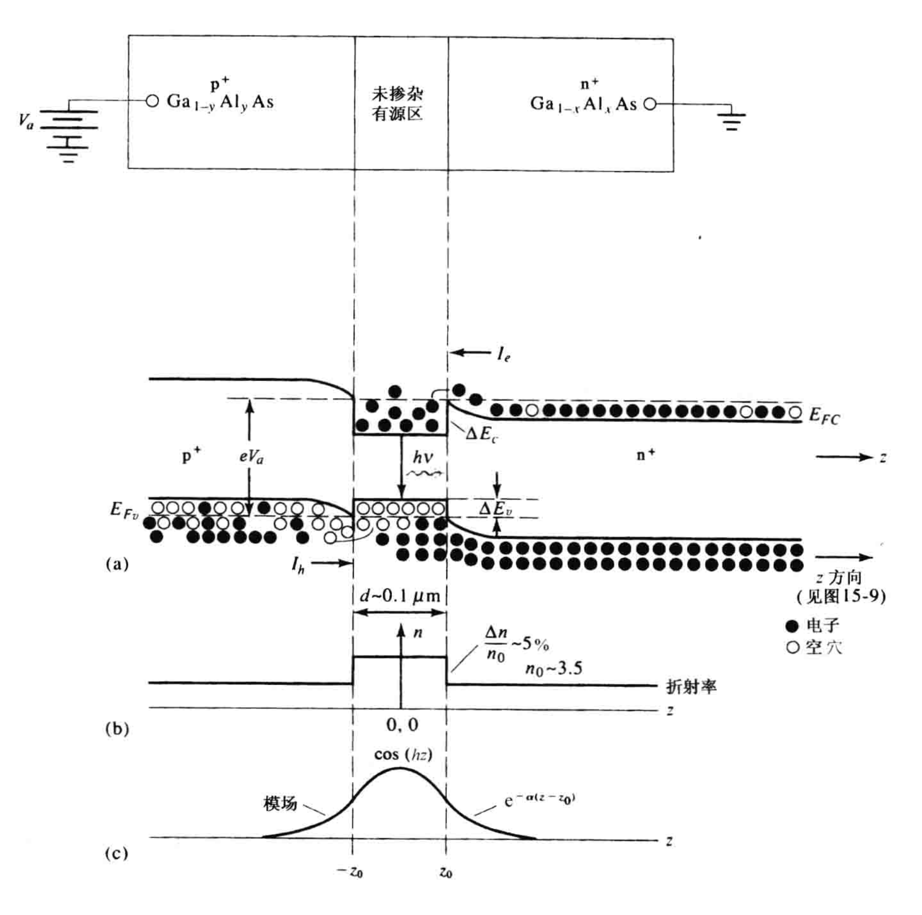


图 15.11　(a) 强正向偏置（几乎扁平）的双异质结 GaAs/GaAlAs 激光二极管的能带图。注意导（价）带边的能量间断□E_c(□E_v)形成的势阱对电子（空穴）的陷阱作用。(b) 折射率的空间(z)分布，对应于高折射率（GaAs）层内的介质波导。(c) 一个板状波导内的模式光强分布图

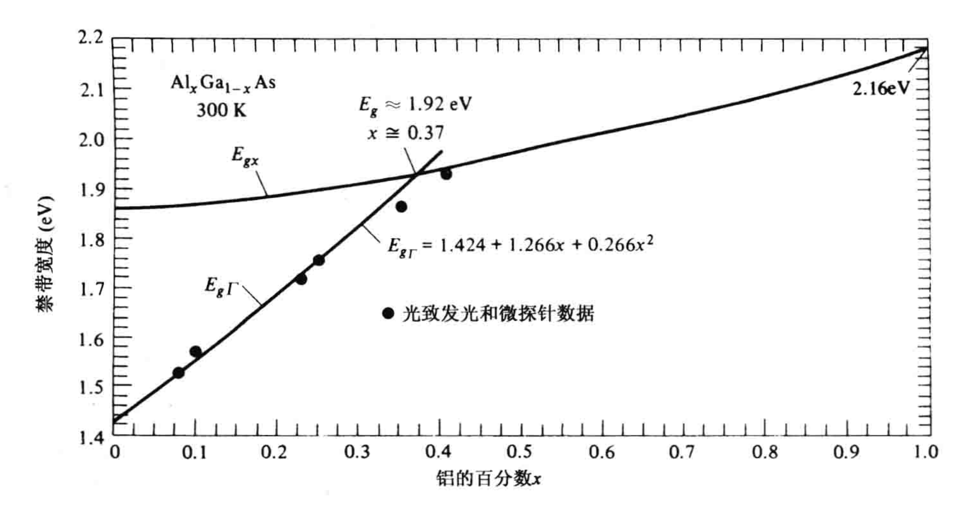


图 15.12　$Ga_{1-x}Al_xAs$ 禁带宽度与摩尔份数 x 的函数关系图。当 $x > 0.37$，为间接带隙（引自文献[11]）

$$g = \frac{\text{每单位长度（沿 } z\text{）产生的功率}}{\text{激励源所携带的功率}} = \frac{-\int_{-\infty}^{-d/2} \alpha_n |E|^2 \mathrm{d}z + \int_{-d/2}^{d/2} \gamma |E|^2 \mathrm{d}z - \int_{d/2}^{\infty} \alpha_p |E|^2 \mathrm{d}z}{\int_{-\infty}^{\infty} |E|^2 \mathrm{d}z} \tag{15.3-1}$$

式中γ是反转浓度与有源介质相同的介质内平面波的增益系数。增益系数γ由式（15.2-12）和式（15.2-17）所给出。α_n 是无泵浦的 n 型 $Ga_{1-x}Al_xAs$ 区的损耗常数，它主要是由自由电子吸收所产生的。参数α_p 是 p 型 $Ga_{1-y}Al_yAs$ 区域（自由空穴）的损耗常数。我们注意到，当$d \to \infty$时，$g \to \gamma$。

当$-d/2 < z < d/2$区间γ都为常数，很容易将式（15.3-1）重写为

$$g = \gamma \Gamma_a - \alpha_n \Gamma_n - \alpha_p \Gamma_p \tag{15.3-2}$$

式中

$$\Gamma_a = \frac{\int_{-d/2}^{d/2} |E|^2 \mathrm{d}z}{\int_{-\infty}^{\infty} |E|^2 \mathrm{d}z}, \quad \Gamma_n = \frac{\int_{-\infty}^{-d/2} |E|^2 \mathrm{d}z}{\int_{-\infty}^{\infty} |E|^2 \mathrm{d}z}, \quad \Gamma_p = \frac{\int_{d/2}^{\infty} |E|^2 \mathrm{d}z}{\int_{-\infty}^{\infty} |E|^2 \mathrm{d}z} \tag{15.3-3}$$

Γ_a近似地为 GaAs 有源层内传送的模功率分数。而Γ_n和Γ_p分别为在 n 区和 p 区中传送的功率分数。只要$\Gamma_a \sim 1$，即大部分模功率处于有源区内，增益 g 近似等于γ，与有源区的厚度 d 成反比。当不断减少 d，增加给定光束功率，进而提高受激跃迁的速率。随着 d 的减小，有源区外的模式强度的分数不断增加，这可以从图 15.13[11]模式波导图解中看出。有源区外的光波模式强度不能被放大，甚至被衰减。

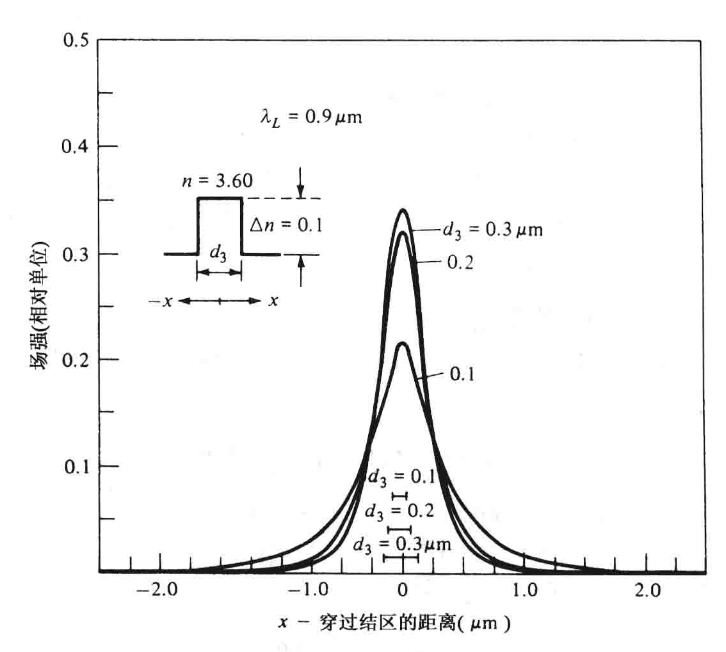
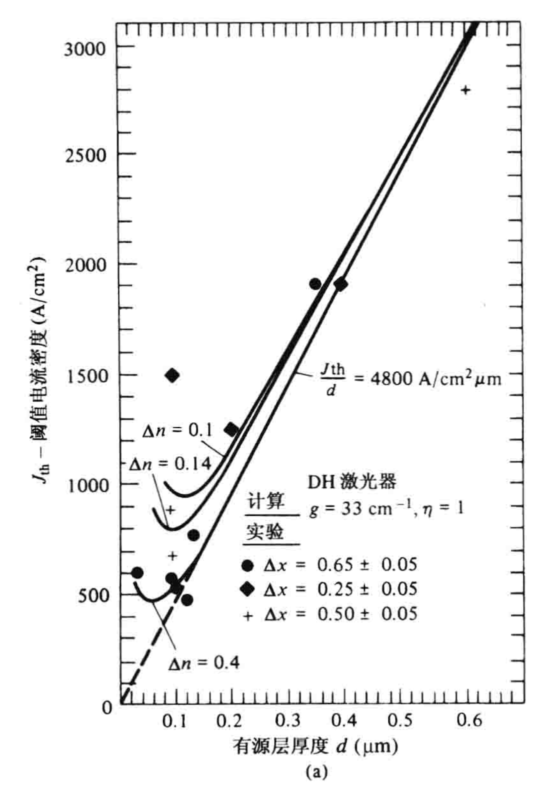


图 15.13　由计算得到的导引层厚度不同的分段不连续波导的近场强度分布图（引自文献[11]）

限制因子Γ_a的减少取决于d^{-1}，增益也随着 d[20]的不断减小而开始变小。图 15.14 所示为

阈值电流随 d 变化曲线。在 $d\leqslant 0.1\mu m$ 时，J_{th} 值降到最低点，然后开始上升，这是由于限制因子Γ_a的减小和当Γ_n和Γ_p增大时，p 和 n 型 GaAlAs 限制层内相应的损耗增加，即如图 15.13 所示，在那些未激励的损耗区域内，模式强度不断增加。



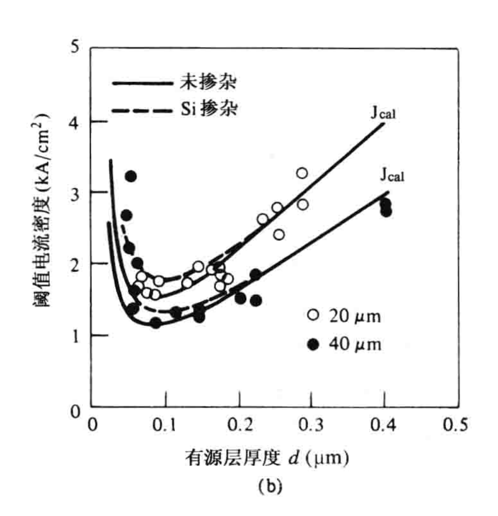


图 15.14　(a)未掺杂有源层的大面积腔长为 500μm AlGaAs 双异质结（DH）激光二极管的阈值电流密度与有源层厚度 d 的函数关系的计算值和实验值。较明显的例外为$\Delta x=0.25$ 的实验数据。该数据由高锗掺杂有源层的二极管获得（引自文献[11]）；(b)作为未掺杂和低硅掺杂有源层（$x=0.05$）的条形（20μm 和 40μm 宽的带状条形电极）300μm 长 AlGaAs 双异质结 DH 激光二极管（$\Delta x=0.25$）的阈值电流密度与有源层厚度 d 的函数关系的计算值和实验值（引自文献[21]）

例：双异质结激光器中的阈值电流密度。

考虑图 15.11 所示的 GaAs/GaAlAs 激光器。我们将使用下列参数：$\tau\sim 4\times 10^{-9}$s，L=500μm。阈值增益条件由式（15.3-2）给出，即

$$\gamma\Gamma_a=\alpha_n\Gamma_n+\alpha_p\Gamma_p-\frac{1}{L}\ln R+\alpha_s \tag{15.3-4}$$

式中 R 是腔镜的反射率，α_s 代表散射损耗（主要发生在异质结界面处的缺陷）。在表面未镀膜反射面的激光器中最大损耗项通常是 $L^{-1}\ln R$。在我们现在的情况下，取 GaAs（n=3.5）空气界面上的菲涅耳反射系数 R=0.31，于是有

$$-\frac{1}{L}\ln R=23.4\ \text{cm}^{-1}$$

设其余的损耗总计为约 10cm^{-1}，这样若取$\Gamma_a\sim 1$，则所需的总增益为 33.4cm^{-1}。根据图

15.8，这需要注入载流子密度 $N \sim 1.7 \times 10^{18} \text{cm}^{-3}$。在稳态条件下，载流子被注入到有源区的速率必须与电子—空穴复合率相同

$$\frac{J}{e} = \frac{Nd}{\tau}$$

利用上面的数据，得到

$$\frac{J}{d} = \frac{eN}{\tau} \sim 6.8 \times 10^3 \ \text{A}/(\text{cm}^2 - \mu\text{m})$$

J/d 的这个数值与图 15.14 中的测量值即约 5×10^3 符合得相当好。如果我们根据此值来估算图 15.14 所示 d 约 0.08μm 时的最低阈值电流密度，就可以得出

$$J_{最小} = 0.68 \times 10^4 \times 0.08 = 544 \ \text{A/cm}^2$$

这又与所观测到的值的范围相接近。

成功制造双异质结激光器的主要原因是位于 GaAs 顶部（反之亦然）的 $Ga_{1-x}Al_xAs$ 薄层外延生长的成功，因为它们的晶格常数在 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 的范围内的一个百分比上是相同的。这可以从图 15.15 中看出，图中显示的是与Ⅲ-Ⅴ族半导体化合物和对应的晶体常数与带隙能量的一个函数关系。我们注意到连接 AlAs($x = 1$)和 GaAs($x = 0$)的曲线近似地为水平线，同时该曲线与该成分范围内的一个恒定晶格常数非常接近。

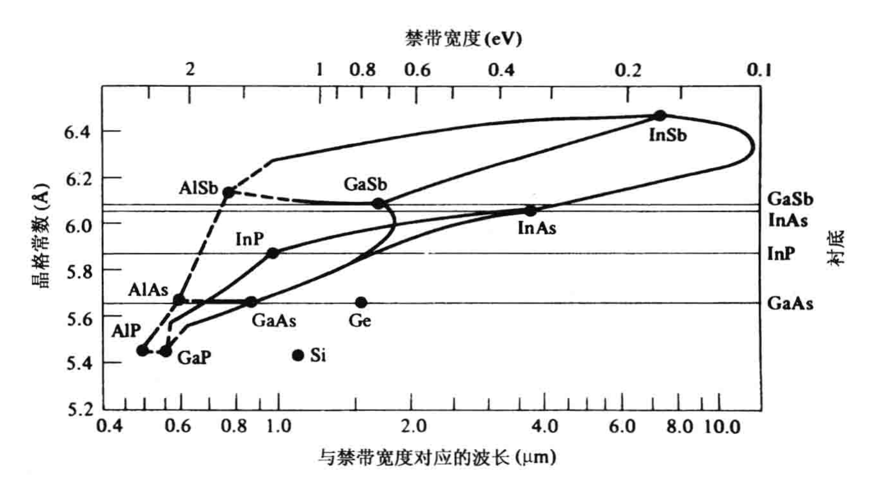


图 15.15　Ⅲ-Ⅴ族化合物：晶格常数与带间能隙和相应的波长的关系曲线。图中实线代表直接带隙材料；虚线代表间接带隙材料。图右部所示为可用于晶格匹配生长的二元化合物衬底

15.4　一些实际的激光器结构

在第 15.3 节中讨论过的双异质结激光器缺乏从侧面(y)方向限制电流和辐射的方法。这使得典型的大面积激光器能够激发不止一个横向(y)模式，从而引起无法接受的模式在空间和时间的不稳定性。为了解决这些问题，现代半导体激光器采用了一些在横向上对光和载流子的限制方法。这些方法中一个典型且成功的例子就是如图 15.16 所示的掩埋式双异质结构激光器[22]。为制造这类激光器，前三层即 n 型 $Ga_{1-x}Al_xAs$ 层、GaAs 层和 p 型 $Ga_{1-y}Al_yAs$ 层分别利用上述的晶体外延生长技术在 n 型 GaAs 衬底层上生长。然后，该结构用模板腐蚀到衬底

层从而产生了由原来各层组成的一个很薄的（约 3μm）的矩形台面，之后在该台面的每个边重新生长一个“掩埋式”$Ga_{1-z}Al_zAs$ 层并形成如图 15.16 所示的结构。

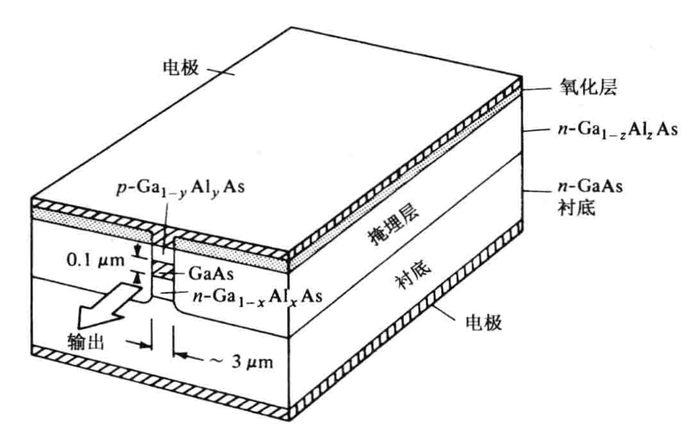


图 15.16　一个掩埋式双异质结激光器[22]

掩埋双异质结激光器最重要的特点就是 GaAs 有源区的四周都被较低折射率 GaAlAs 包围着。从电磁学角度来说，这种结构就是一个矩形介质光波导的结构。之所以这样来选择有源区的横向尺寸以及折射率间断（即摩尔分数 x，y 和 z）是因为这样的激光波导内只有最低一级的横模能够传播。该激光器的另一个特点是由于在上一节中讨论过的 GaAs/GaAlAs 界面上的能带间断而在有源区边界上形成了对注入载流子的限制，作为势垒从而阻止了载流子逃逸出有源区。采用这种结构的 GaAs 半导体激光器已被制造出来，见第 16 章，其阈值电流小于 1 毫安[23]，而大部分典型激光器的阈值电流为约 20 毫安。图 15.17 所示为商用激光器的典型功率与电流关系图。图 15.18 所示为远场强度的角分布图。

四元 GaInAsP 半导体激光器

长距离（大于 10km）光纤通信几乎全部采用在 1.3μm 和 1.55μm 附近光谱区内的激光器。1.3μm 激光器之所以重要是因为在该波长上硅基光纤的群速色散很小。由式（3.5-20）定义的一阶群速色散参数 D 已在图 3.19 中画出，而且当λ=1.3μm 时为零,于是该波长上的光脉冲根据式（3.5-22）会产生最小的展宽。在 1.55μm 的波长区域内的硅基光纤的光吸收系数为最小值，这使其成为长距离连接的首选。采用 $Ga_{1-x}In_xAs_{1-y}P_y$ 有源层并处于上述波长区域[25]内的激光器已被制造出来。从图 15.15 中我们发现这种介于 0.9μm<λ<1.7μm 区域的激光器在晶格上与 InP 匹配，InP 具有较低的折射率，因而形成介质波导，InP 外延层成为四元 $Ga_{1-x}In_xAs_{1-y}P_y$ 有源层的限制层。在该系统中这种四元层所起的作用就如图 15.10 所示的 GaAs/GaAlAs 激光器内的 GaAs 所起的作用一样。一个典型的四元化合物激光器结构示意图 15.19。现代激光器系统采用厚度在 50Å～100Å 范围内的有源区。它们就是所谓的量子阱激光器。这些激光器具有较低的阈值电流以及与采用较“厚”（～1000Å）有源区的前几代激光器相比有更大的调制带宽。我们将在第 16 章里具体讨论这种激光器。近来的实验[26~29]已证实：光纤在 1.55μm 上可以进行距离为约 150km 的传输而无须使用中继器。

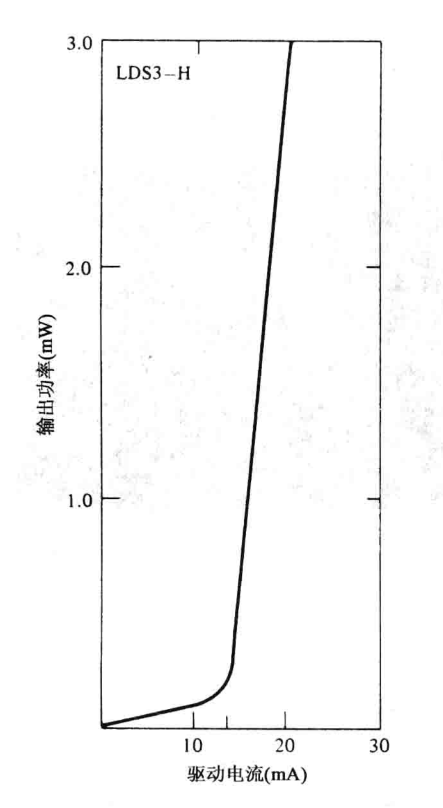


图 15.17　低阈值电流（～14 毫安）商用双异质结（DH）GaAs/GaAlAs 激光器的功率与电流关系图（引自文献[24]）

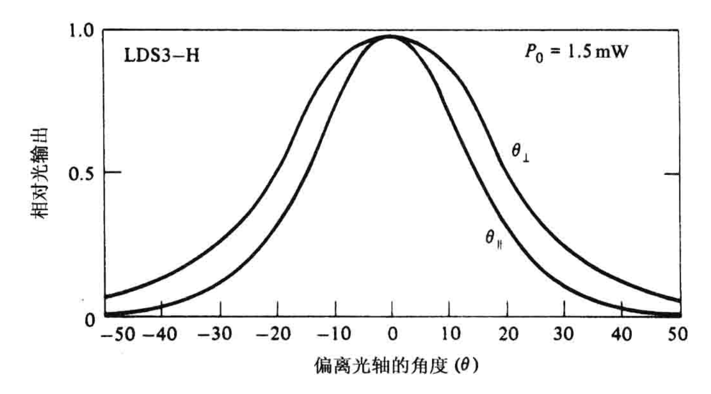


图 15.18　低阈值电流商用双异质结（DH）　GaAs/GaAlAs 激光器的远场强度的角分布图（引自文献[24]）

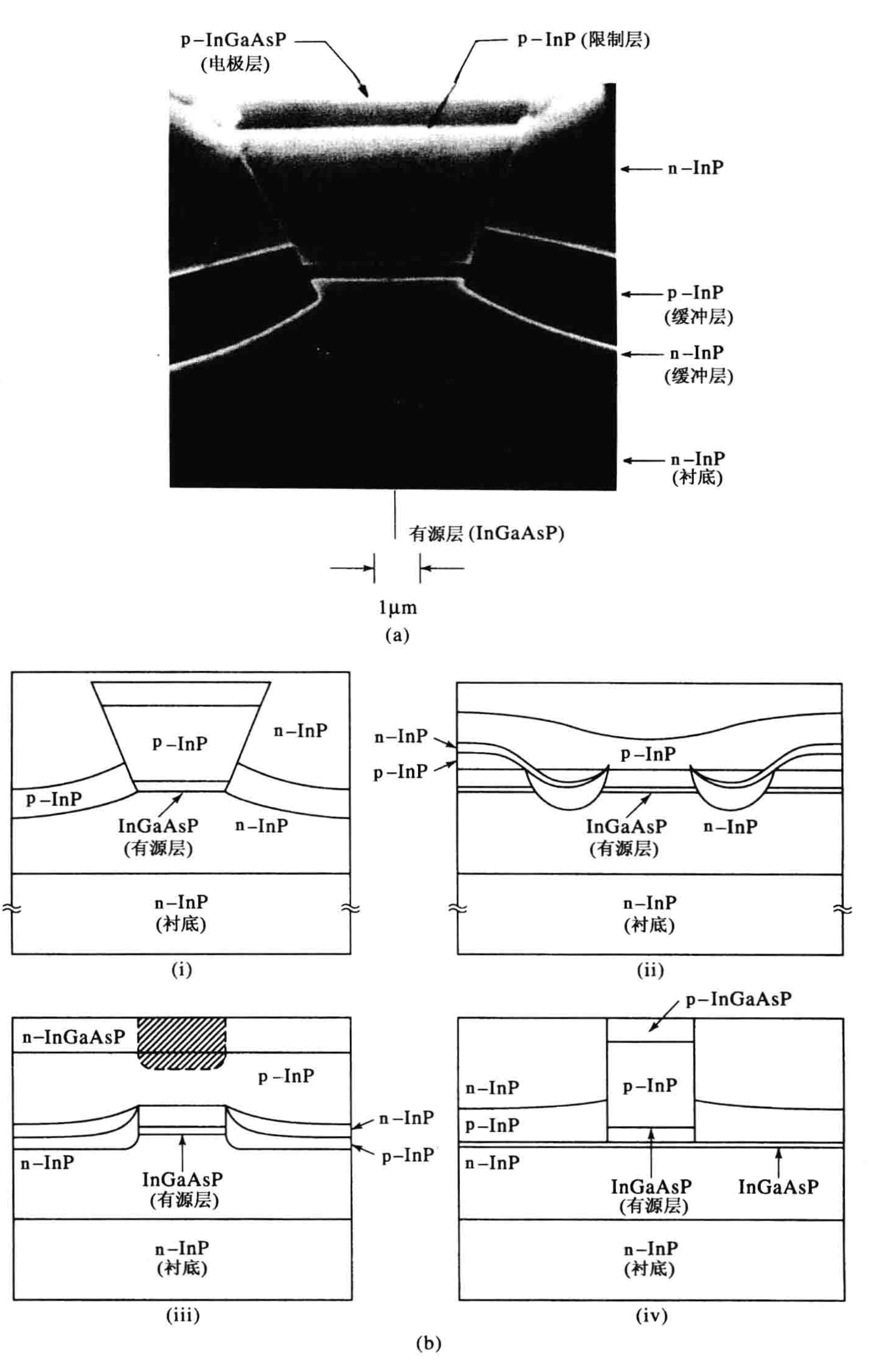


图 15.19　掩埋式有源区 InP/GaInAsP 激光二极管的典型结构。
(a)扫描电子显微图（SEM）[28,30]。(b)不同的结构图[27]

注入式激光器的功率输出

注入式激光器的饱和及功率输出的考虑与 5.7 节和 6.4 节中所讨论的普通激光器的饱和及功率输出基本相同。当注入电流超过阈值后，激光器的振荡强度也会随之上升，由此引起的受激辐射使反转载流子的寿命缩短，从而使反转的大小被钳位在其阈值上。令η_i为一个注入载流子在有源区内辐射复合率，就可将受激辐射所发射功率的写成如下表达式

$$P_e = \frac{(I - I_t)\eta_i}{e} h\nu \tag{15.4-1}$$

其中 I 是电流，I_t 是阈值电流。内量子效率η_i小于 1 的原因是穿过有源区 p-n 存在漏电流。部分功率 P_e 在激光共振腔内消耗掉了，而其余功率则通过一个端面反射镜耦合到腔外。按照式（15.3-4），这两部分的功率分别与有效内部损耗$\alpha \equiv \alpha_n \Gamma_n + \alpha_p \Gamma_p + \alpha_s$和反射镜损耗$-L^{-1}\ln R$成正比，其中$\alpha_s$是诸如散射损耗和基于杂质吸收的其他机制引起的衰减系数，α_n和α_p是由于在 n 和 p 区的载流子吸收损耗。于是可将输出功率表达为

$$P_0 = \frac{(I - I_t)\eta_i h\nu}{e} \frac{(1/L)\ln(1/R)}{\alpha + (1/L)\ln(1/R)} \tag{15.4-2}$$

外微分量子效率$\eta_{外}$定义为输出光子增长率（photons/s）与注入载流子增长率（carriers/s）之比

$$\eta_{外} = \frac{\mathrm{d}(P_0/h\nu)}{\mathrm{d}[(I - I_t)/e]} \tag{15.4-3}$$

由式（15.4-2）我们可得

$$\eta_{外}^{-1} = \eta_i^{-1}\left(\frac{\alpha L}{\ln(1/R)} + 1\right) \tag{15.4-4}$$

通过作出$\eta_{外}$随 L 变化的关系曲线，可以确定η_i的值，在 GaAs 中η_i为 0.9～1.0。

因为将电子转变为有用的输出光子的微分效率为$\eta_{外}$，所以降低电能转换为光能的主要损耗机理就是每个注入载流子所获能量 $eV_{应用}$和光子能量 $h\nu$ 之间的差异。该差异主要是由激光二极管的串联电阻引起的。因此激光器将电功率转化为光功率的效率

$$\eta = \frac{P_0}{IV_{应用}} = \eta_i \frac{I - I_t}{I} \frac{h\nu}{eV_{应用}} \frac{\ln(1/R)}{\alpha L + \ln(1/R)} \tag{15.4-5}$$

式中 I 是电流，$V_{应用}$是所加电压。在实际中，$eV_{应用} \sim 1.4E_g$，$h\nu \approx E_g$。300**K** 时可得$\eta \sim 30\%$。

15.5　半导体激光器的直流调制

由于半导体激光器的主要用途是作为光通信系统的光源，因此对高数据率信息的高速调制问题从技术的角度来说就显得格外重要。半导体激光器不同于其他外调制激光器（见第 9 章）的一个显著特点是它可以直接通过调节注入电流来达到调制的目的。从激光器单片式集成和调制电路（将在 15.7 节中讨论）的可能性角度来说，这就显得十分重要了。下面的讨论主要按照参考文献[31]的有关内容进行。

如果用 P 来表示一个半导体激光器有源区内的光子密度，用 N 来表示注入电子（和空穴）密度便可得公式

$$\frac{dN}{dt} = \frac{I}{Ve} - \frac{N}{\tau} - A(N - N_{透明})P$$

$$\frac{dP}{dt} = A(N - N_{透明})P\Gamma_a - \frac{P}{\tau_p} \tag{15.5-1}$$

式中 I 是总注入电流，V 是有源区体积，τ是自发复合寿命，τ_p 是受边界介质吸收、散射以及输出耦合而受限制的光子寿命。$A(N-N_{透明})P$ 是受激跃迁单位体积的净发生率。$N_{透明}$是达到式（15.2-17）所定义的透明条件所需的反转浓度，而常数 A 是瞬时生长系数，并且定义为与式（15.2-17）所确定的常量 B 有关：$A = Bc/n$，n 是折射率，c 是真空中的光速。Γ_a 是由式（15.3-3）定义的模式限制因子，在这里它能够确保发生受激跃迁的电子总数与发射光子的数目相同，而不是式（15.5-1）中的密度变量。由于只有很小一部分（$\sim 10^{-4}$）的自发辐射功率进入激光模式，所以自发辐射对光子密度的增加可以忽略不计。

令等式（15.5-1）的左边等于零，我们可得到稳态解 N_0 和 P_0

$$0 = \frac{I_0}{Ve} - \frac{N_0}{\tau} - A(N_0 - N_{透明})P_0$$

$$0 = A(N_0 - N_{透明})P_0\Gamma_a - \frac{P_0}{\tau_p} \tag{15.5-2}$$

式（15.5-2）可分别解得稳态电子浓度 N_0 和光子密度 P_0。

为研究注入电流，设定电流由直流和交流构成的情况

$$I = I_0 + i_1 e^{i\omega_m t} \tag{15.5-3}$$

式中 ω_m 是调制频率，I_0 和 i_1 是常数。定义小信号调制响应值 n_1 和 p_1

$$N = N_0 + n_1 e^{i\omega_m t} \qquad P = P_0 + p_1 e^{i\omega_m t} \tag{15.5-4}$$

式中 N_0 和 P_0 是式(15.5-2)的直流解，n_1 和 p_1 是常数。

利用式（15.5-3）、式（15.5-4）以及由式（15.5-2）、式（15.5-1）推导出来的 A（N_0–$N_{透明}$）= $(\tau_p\Gamma_a)^{-1}$ 可以得到小信号代数方程式

$$-i\omega_m n_1 = -\frac{i_1}{Ve} + \left(\frac{1}{\tau} + AP_0\right)n_1 + \frac{1}{\tau_p\Gamma_a}p_1$$

$$i\omega_m p_1 = -AP_0\Gamma_a n_1 \tag{15.5-5}$$

主要兴趣在于获得光子密度的调制响应值 $p_1(\omega_m)/i_1(\omega_m)$，因此由式（15.5-5）可得

$$p_1(\omega_m) = \frac{-(i_1/Ve)AP_0\Gamma_a}{\omega_m^2 - i\omega_m/\tau - i\omega_m AP_0 - AP_0/\tau_p} \tag{15.5-6}$$

图 15.19（b）说明了 $p_1(\omega_m)$的典型的测量值。响应曲线（归一化的）在低频段是较为平坦的，在“弛豫振荡频率” ω_R 处达到峰值然后陡然下降。通过将等式（15.5-6）中分母的值最小化可以得到峰值频率的表达式

$$\omega_R = \sqrt{\frac{AP_0}{\tau_p} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau} + AP_0\right)^2} \tag{15.5-7}$$

在一个腔长 $L = 300\mu m$ 的典型半导体激光器内，根据式（4.7-3）可得$\tau_p=(n/c)(\alpha-(1/L)\ln R)^{-1} \sim 10^{-12}$s，$\tau \sim 4\times10^{-9}$ s，还有 $AP_0 \sim 10^9\ s^{-1}$。这样就可得到相当准确的“弛豫振荡频率”

$$\omega_R = \sqrt{\frac{AP_0}{\tau_p}} \tag{15.5-8}$$

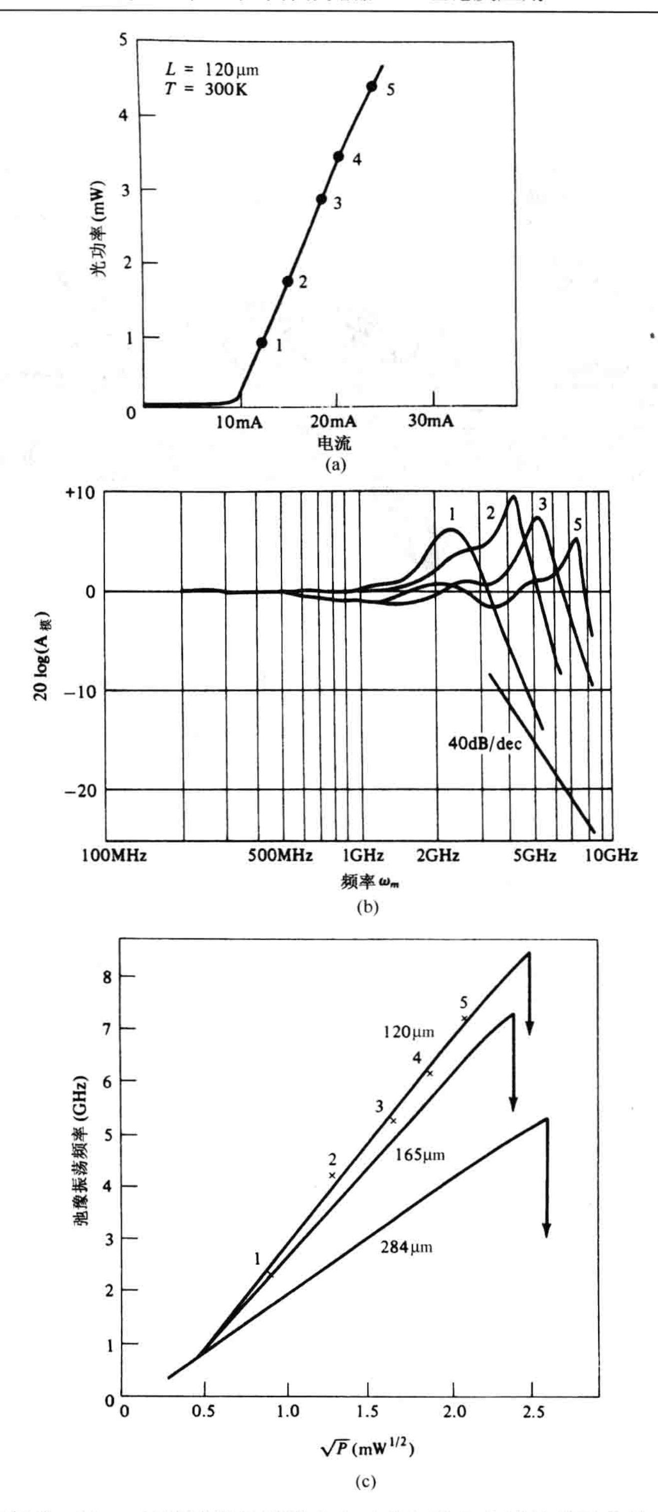


图 15.20　(a)腔长为 120μm 的连续激光器输出光功率与注入电流的关系曲线。(b)在图中各偏置点上激光器的调制特性。(c)测得的不同腔长的激光器的弛豫振荡共振频率与 $\sqrt{P}$ 的函数关系图，P 是连续光输出功率。方向朝下的箭头代表灾难性毁灭点（引自文献[31]）

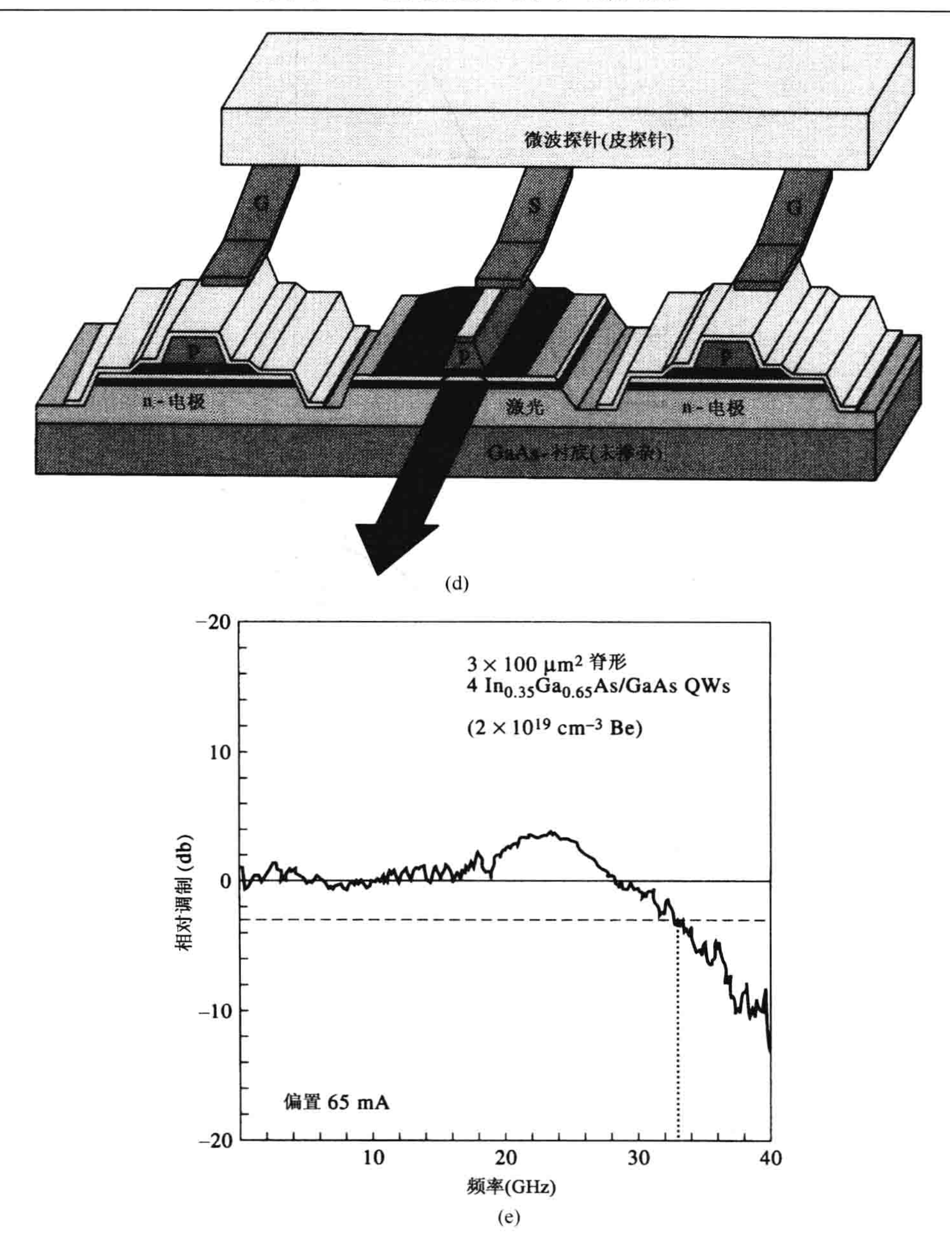


图 15.20（续）　(d)用于高速激光器微波调制的馈电图。(e)相应的频率响应值（引自文献[28]）

上面所得的结果很有用。这是因为它表明要增大 ω_R 进而增大调制响应值 $p_1(\omega_m)/i_1(\omega_m)$ 的有用的线性区，我们需要提高光增益系数 A，缩短光子寿命 τ_p 并且使激光器在尽可能高的内光子密度 P_0 上运行。图 15.20(c)显示了在不同腔长的激光器调制共振频率 ω_R 与输出功率的平方根 $\sqrt{P}$ 的线性关系。参考文献[31]中对 ω_R 最大化的最佳途径作了具体阐述。图 15.20(d)显示用于高频调制的微波电流反馈电极。图 15.20(e)显示了相应的频率响应值。

尽管有些复杂，但仍需进一步将式（15.5-8）直接表示

$$\omega_R = \sqrt{\frac{1 + A\tau_p \Gamma_a N_{透明}}{\tau\tau_p}(\frac{I_0}{I_{阈值}} - 1)} \tag{15.5-9}$$

例：GaAs/GaAlAs 激光器的调制带宽。

这里用式（15.5-8）来估算一个典型 GaAs/GaAlAs 激光器的有用的调制频率最高值 ω_R。假定一个典型激光器从一个有源区为 3μm×0.1μm 的面上放射出 5×10^{-3}W 的光功率。面反射率为 $R = 0.31$，折射率为 $n_0 = 3.5$。用下述关系式求 P_0

$$\frac{(1-R)P_0 ch\nu}{n_0} = \frac{功率}{面积}$$

可得激光腔内的光子密度 $P_0 = 1.21\times10^{15}$ photons/cm^3。常量 A 的典型值为 2×10^{-6} cm^3/s。[这可以从关系式 $A=Bc/n_0$ 中得到证实。其中 B 是式（15.2-17）的空间增益参数。]由式（4.7-3）可得到光子寿命 τ_p

$$\tau_p = \frac{n_0}{c}\left(\alpha - \frac{1}{L}\ln R\right)^{-1}$$

由 $L = 120$μm，$\alpha = 10$cm^{-1}，$R = 0.31$ 可得 $\tau_p \sim 1.08\times10^{-12}$s。将上述结果相结合可以得到

$$\nu_R \equiv \frac{\omega_R}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{AP_0}{\tau_p}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\times10^{-6}\times1.2\times10^{15}}{1.08\times10^{-12}}} = 7.53\times10^9\,\text{Hz}$$

该值处于图 15.20 所示实验数据的范围内，而该实验数据是基于一个与我们所举例子中的激光器有着相似特点的激光器而获得的。式（15.5-8）所表示的 ω_R 对光子密度（或功率输出）的平方根依赖关系可用图 15.20（c）中的数据来证明。

15.6　电流调制半导体激光器中的增益抑制和频率啁啾

在 15.5 节中我们解决了光功率输出（或者说是共振腔内的光子密度）的调制问题，调制是对流过激光器的电流进行调制来达到的。进一步的讨论使我们理解调制速率的有用范围。在本节中，我们讨论激光器中电流对载流子浓度的调制效应。该电流可表示为

$$I(t) = I_0 + i_1(\omega_m)\exp(i\omega_m t) \tag{15.6-1}$$

而与功率输出成正比的激光器内的光子密度为

$$P(t) = P_0 + p_1(\omega_m)\exp(i\omega_m t) \tag{15.6-2}$$

式中 I_0，P_0，i_1 和 p_1 是常数，ω_m 是调制频率。$i_1(\omega_m)$ 是电流调制的振幅，$p_1(\omega_m)$ 是光子密度调制的振幅。我们还可以将有源区内的载流子密度（反转粒子数）表达为

$$N(t) = N_0 + n_1(\omega_m)\exp(i\omega_m t) \tag{15.6-3}$$

理论上说，我们可将频率调制的响应值 $p_1(\omega_m)/i_1(\omega_m)$ 当做一个不随 ω_m 的变化的常量并且在阈值以上时，可以预期 $n_1(\omega_m)=0$。这表明了理想的增益钳位。但是正如我们所发现的，这两个假设都未能完全实现。事实上，如果我们用方程式（15.5-5）来求 $n_1(\omega_m)$，结果为

$$n_1(\omega_m) = -i\left(\frac{i_1}{Ve}\right)\frac{\omega_m}{\omega_m^2 - \dfrac{AP_0}{\tau_p} - i\omega_m\left(\dfrac{1}{\tau} + AP_0\right)} \tag{15.6-4}$$

式中τ是自发辐射寿命，τ_p是光子在腔内的寿命，A是正比于公式（15.2-17）中的常数B的常数。因此我们发现在动态条件下载流子密度进而还有增益并没有在阈值 N_0 上受到钳制而是具有了一个振荡成分，其振幅 $n_1(\omega_m)$已由式（15.6-4）给出。图 15.21 描述了它的一般特性。我们注意到在ω_R 时出现一个峰值而且由式（15.5-7）得到的ω_R 也是振幅调制响应值 $p_1(\omega_m)/i_1(\omega_m)$ 的共振频率。因为一个半导体激光器介质的折射率取决于载流子密度，所以对后者的调制也同时伴随着对折射率的调制，这导致了对输出光场的频率调制（FM）。虽然大多数时候不受欢迎，但是这种寄生性 FM 调制还是能够产生许多重要的结果。其中最为重要的就是引起了激光器场的光谱增宽从而正如 3.5 节中所述的那样，在色散（D≠0）光纤中导致随距离而增加的光脉冲扩散。

在开始分析寄生性频率调制之前，我们先来介绍两个物理新概念：（1）增益抑制作用，（2）幅相耦合作用。

增益抑制

光强越强，一个光波在反转分布的半导体激光器介质中的增益就越小。这部分地是由光增益饱和以及增益抑制造成的。第一个作用反映出随着光子密度 P 的增大，总载流子数密度——在式（15.5-1）中为 N——在降低。这种作用可由耦合速率方程（15.5-1）来解释。第二个减少增益的机制甚至在总密度 N 为恒定量的时候也会起作用并且反映出能够提高增益的，位于接近图 15.5 中 a 和 b 点区域内的共振载流子（电子和空穴）密度的减小。这既是由于如图 6.37 所示的，在第 6.10 节中讨论过的光谱区的“烧孔”，同时也是由光场有效电子温度的增高造成的。说到电子“温度”，是指在费米函数式（15.1-8）中的温度。在动态非热平衡条件下，该温度可能与晶格温度不一致。根据 15.1 和 15.2 节中的讨论，这种增高促使电子（和空穴）进入更高的能态并在此过程中降低了能够提高增益的共振载流子密度。这种作用具有时间常数$<10^{-12}$ s，并被表征为电子—电子和电子—声子碰撞，并且应用在调制在$\omega_m/2\pi < 3\times10^{10}$ Hz 的系统上，可被认为与光场保持瞬时响应。

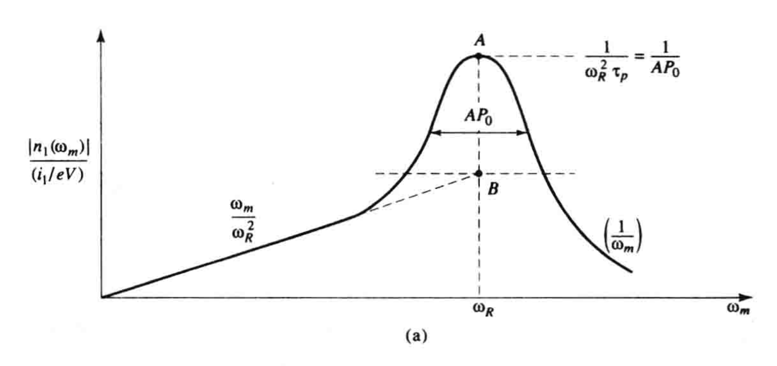
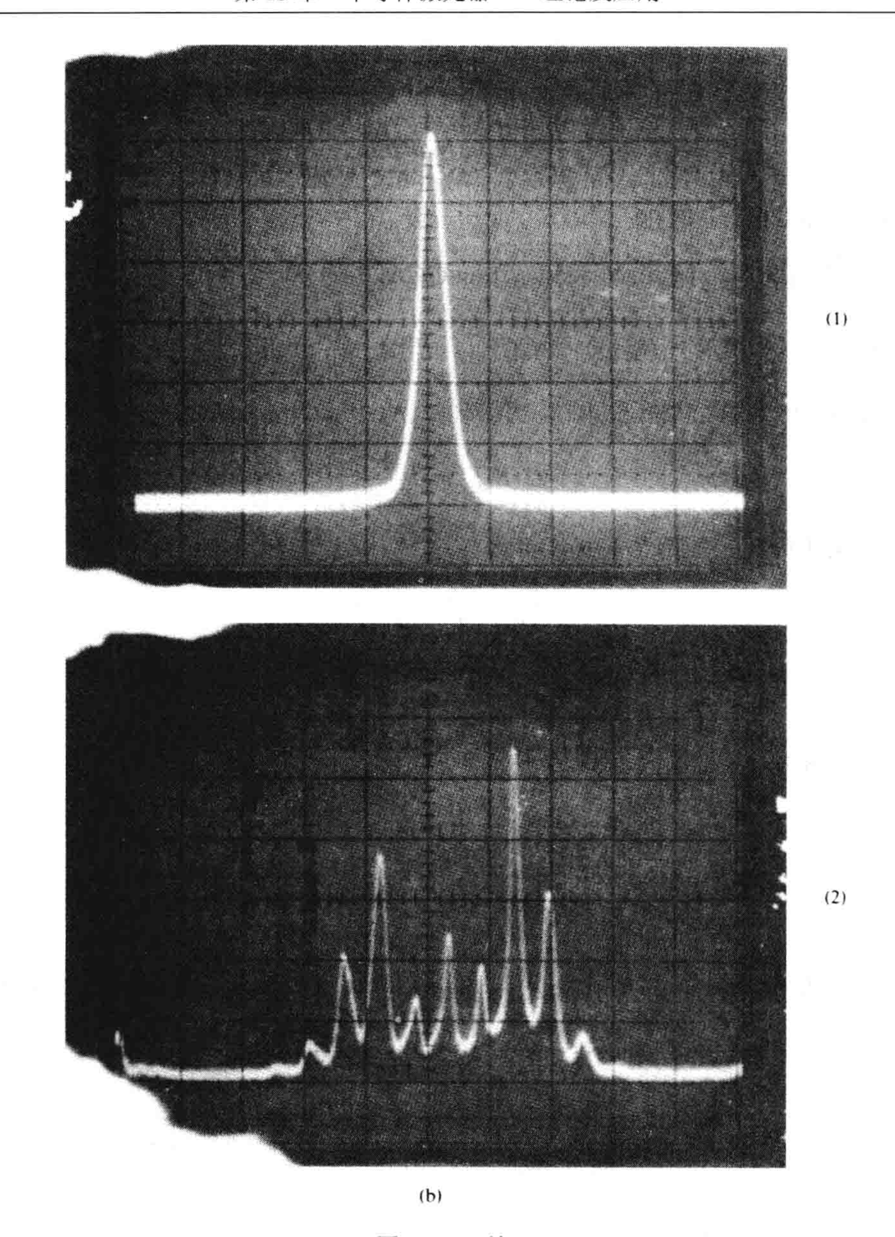


图 15.21　(a)载流子密度调制 n_1 与电流调制频率ω_m 的理论曲线；(b)(1)无电流调制的 GaInAsP（λ=1.31μm）DFB 激光器扫描法布里—珀罗光谱图；(2)当电流调制 f_m=550GHz 时，相同激光器的扫描光谱图，图中水平间隔=1GHz/div（由加州 ORTEL 公司 H.Blanvelt, P.C.Chen 和 N.Kwong 提供）



(1)

(2)

(b)

图 15.21（续）

我们基于第 15.5 节中的分析而作出的主要变更是将光增益常量表示为

$$G(N,P)=G(N)(1-\varepsilon P)\approx G(N_{阈值})+A(N-N_{阈值})-\varepsilon G(N_{阈值})P \qquad (15.6\text{-}5)$$

其中 N 是电子浓度，P 是光子密度，因数（$1-\varepsilon P$）代表增益抑制（基于光子密度）。常量ε叫做增益抑制因子。我们可将（15.6-5）看做一个关于阈值点 $N=N_{阈值}$，$P=0$ 的泰勒级数展开。ε的数值可以从理论上在某一给定系统中进行估计。但是该值更经常地是通过实验来获得[29]。

现在我们将速率方程（15.5-1）改写为

$$\frac{dN}{dt} = \frac{I}{Ve} - \frac{N}{\tau} - G(N, P)P$$

$$\frac{dP}{dt} = \Gamma_a G(N, P)P - \frac{P}{\tau_p} \tag{15.6-6}$$

在稳态下 $d/dt = 0$，可得到

$$0 = \frac{I_0}{Ve} - \frac{N_0}{\tau} - [G(N_{阈值}) + A(N_0 - N_{阈值}) - \varepsilon G(N_{阈值})P_0]P_0$$

$$0 = \Gamma_a[G(N_{阈值} + A(N_0 - N_{阈值}) - \varepsilon G(N_{阈值})P_0]P_0 - \frac{P_0}{\tau_p}$$

$G(N_{阈值})$的值可由第二个等式求得，取阈值（$N= N_{阈值}$，$P_0 = 0$）。

$$G(N_{阈值}) = \frac{1}{\Gamma_a \tau_p}$$

我们用这个结果来简化上面两个等式，可得

$$0 = \frac{I_0}{Ve} - \frac{N_0}{\tau} - \frac{P_0}{\Gamma_a \tau_p}$$

$$0 = A(N_0 - N_{阈值}) - \frac{\varepsilon P_0}{\Gamma_a \tau_p} \tag{15.6-7}$$

如在式（15.5-3）和式（15.5-4）中那样进行小信号展开，可得到

$$i\omega_m n_1 = \frac{i_1}{Ve} - \left(\frac{1}{\tau} + AP_0\right)n_1 - \frac{(1 - \varepsilon P_0)}{\tau_p \Gamma_a} p_1$$

$$i\omega_m p_1 = \Gamma_a AP_0 n_1 - \frac{\varepsilon P_0}{\tau_p} p_1 \tag{15.6-8}$$

我们注意到在$\varepsilon=0$ 情况下，可将上述等式归结为方程（15.5-5）。利用式（15.6-8）来求解$p_1(\omega_m)$可得

$$p_1(\omega_m) = \frac{-\Gamma_a AP_0\left(\dfrac{i_1}{Ve}\right)}{\omega_m^2 - i\omega_m\left(\dfrac{1}{\tau} + AP_0 + \dfrac{\varepsilon P_0}{\tau_p}\right) - \left(\dfrac{AP_0}{\tau_p} + \dfrac{\varepsilon P_0}{\tau \tau_p}\right)} \tag{15.6-9}$$

在如上述数值例中那样的典型情况下，有

$$P_0 = 1.2 \times 10^{21}\ \text{photons/m}^3$$

$$A = 2 \times 10^{-12}\ \text{m}^3/\text{s} \qquad \tau = 4 \times 10^{-9}\ \text{s}$$

$$\tau_p = 10^{-12}\ \text{s} \qquad \varepsilon = 10^{-23}\ \text{m}^3$$

这样便可得$\varepsilon P_0/\tau_p = 1.2\times 10^{10}\ \text{s}^{-1} \gg AP_0$ 。

利用不等式$\varepsilon P_0/\tau_p \gg AP_0$ ，和$\varepsilon/\tau_p \gg A$，发现调制响应峰值出现在

$$\omega_R \approx \sqrt{\frac{AP_0}{\tau_p} - \frac{\varepsilon^2 P_0^2}{2\tau_p^2}}$$

将此结果与式（15.5-8）进行对比可以看出：当$\varepsilon \neq 0$ 时，即将增益抑制考虑在内的时

候，调制共振频率ω_R并没有随P_0无限增大而是在以下的光子密度时达到最大值

$$(P_0)_{最大}=\frac{A\tau_p}{\varepsilon^2} \tag{15.6-10}$$

当$P_0=(P_0)_{最大}$时，得到ω_R的最大值为

$$(\omega_R)_{最大}=\frac{A}{\sqrt{2\varepsilon}} \tag{15.6-11}$$

应用式（15.6-9）后面给出的典型数据和 15.5 节所举数值例中的数据，可以估算出最大的光子密度

$$(P_0)_{最大}=\frac{A\tau_p}{\varepsilon^2}=\frac{2\times10^{-12}\times10^{-12}}{10^{-46}}=2\times10^{22}\ \text{photons/m}^3$$

这个结果与 15.5 节所举例子中的表达式中，每面约 80mW 的功率输出相一致。相应的共振调制频率最大值为

$$\left(\frac{\omega_R}{2\pi}\right)_{最大}\approx\left(\frac{1}{2\pi}\right)\frac{A}{\sqrt{2\varepsilon}}=\frac{2\times10^{-12}}{2\pi\sqrt{2\times10^{-23}}}=2.24\times10^{10}\,\text{Hz}$$

上面的结果指出，增益抑制作用在实际中给半导体激光器的电流调制所能够达到的调制带宽设置了一个上限。为了以更高的频率$\omega_m>\omega_R$进行调制，需要采用如第 9 章中所讨论过的外调制器。

幅相耦合

能够产生对载流子密度调制($n_1(\omega_m)\neq0$)的第二种作用式幅相耦合，它是指对激光器输入场的频率调制（“啁啾”）。通过求解式（15.6-8）可以获得载流子密度振幅涨落

$$n_1(\omega_m)=\frac{-\left(i\omega_m+\dfrac{\varepsilon P_0}{\tau_p}\right)\left(\dfrac{i_1}{Ve}\right)}{\omega_m^2-\left(\dfrac{AP_0}{\tau}+\dfrac{\varepsilon P_0}{\tau\tau_p}\right)-i\omega_m\left(\dfrac{1}{\tau}+AP_0+\dfrac{\varepsilon P_0}{\tau_p}\right)} \tag{15.6-12}$$

将式（15.6-12）与式（15.6-9）进行对比，可得

$$n_1(\omega_m)=\frac{\left(i\omega_m+\dfrac{\varepsilon P_0}{\tau_p}\right)}{\Gamma_a AP_0}p_1(\omega_m) \tag{15.6-13}$$

因为对于我们所假定的$\exp(i\omega_m t)$时间变量，有$i\omega_m=\mathrm{d}/\mathrm{d}t$，所以可利用式（15.6-13）得到关系式

$$\Delta N(t)=\frac{1}{\Gamma_a A}\left(\frac{1}{P_0}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}+\frac{\varepsilon}{\tau_p}\Delta P(t)\right) \tag{15.6-14}$$

式中$N(t)=N_0+\Delta N(t)$，$P(t)=P_0+\Delta P(t)$。式（15.6-14）适用于任意的光子密度调制，而不限于谐波性调制。

接下来的任务是找出载流子密度调制$\Delta N(t)$对激光器频率所产生的作用。正如第 5 章中讨论的，增益介质折射率是复数，可写为

$$n_0(t) = n_0'(t) - in_0''(t) \qquad (15.6\text{-}15)$$

式中虚部 n_0'' 涉及的增益（或损耗），时间依赖关系反映出折射率实部 n_0' 以及虚部 n_0'' 与由时间调制的载流子密度 $\Delta N(t)$ 之间的关系。

折射率 n_0 的虚数部分与激光器媒质的空间指数式增益常数相关，这是因为场的空间依赖关系

$$E(z) \propto E_0 \exp\left[-\frac{i\omega}{c}(n_0' - in_0'')z\right] = E_0 \exp\left(-\frac{i\omega n_0'}{c}z\right)\exp\left(-\frac{\omega n_0''}{c}z\right)$$

因为速率方程式（15.6-6）和式（15.6-8）位于时域内，所以需要将空间参数$-\omega n_0''/c$ 转换为时间参数。我们使用下列关系式

$$\frac{\mathrm{d}|E|}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial |E|}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \cong -\left(\frac{\omega n_0''}{c}\right)\frac{c}{n_0'}|E| = -\frac{\omega n_0''}{n_0'}|E|$$

式中 n_0'' 在增益介质中是负数。接下来式（15.6-5）的指数式增益常数 $G(N,P)$ 通过下述关系式与 n_0'' 相关

$$G = -\frac{2\omega n_0''}{n_0'} = -\frac{4\pi\nu n_0''}{n_0'} \qquad (15.6\text{-}16)$$

其中因子 2 基于这样一个事实，G 是光子密度（$\propto$光强度，即$|E|^2$）的时间生长常数。

从上面的方程，可以推导出

$$\frac{\partial n_0''}{\partial N} = -\frac{n_0'}{4\pi\nu}\frac{\partial G}{\partial N} = -\frac{n_0'}{4\pi\nu}A \qquad (15.6\text{-}17)$$

式中我们应用式（15.6-5）来替代$\partial G/\partial N = A$。根据式（15.6-7），载流子密度的调制$\Delta N(t)$引起了相应的微扰

$$\Delta n_0'' = -\frac{n_0'}{4\pi\nu}A\,\Delta N(t) \qquad (15.6\text{-}18)$$

下面的任务是获得实折射率微扰 $\Delta n_0'$ 对$\Delta N(t)$的依赖关系。现在 $\Delta n_0'$ 和 $\Delta n_0''$ 通过克拉默斯一克勒尼希关系（推导见附录 C）而相互联系。尽管如此，$\Delta n_0'$ 和 $\Delta n_0''$ 是通过相幅耦合常量的参数α[32,33]有效地相联系的

$$\alpha = \frac{\Delta n_0'}{\Delta n_0''} \qquad (15.6\text{-}19)$$

参数α（也称为海瑞（Henry）α–因子[33]）是半导体激光器介质中载流子密度 N_0 的函数，其典型值在 3 到 5 之间[32,34]。α很重要，不要与衰减系数混淆。同样的α因子还表示半导体激光器的线宽增强因子。

将式（15.6-19）和式（15.6-18）相结合后可得其结果

$$\Delta n_0' = -\frac{\alpha n_0' A}{4\pi\nu}\Delta N(t) \qquad (15.6\text{-}20)$$

因载流子密度调制而产生的微扰 $\Delta n_0'$ 引起了激光器频率的扰动$\Delta\nu$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\Delta n_0'}{n_0'}\Gamma_a = \frac{\alpha\Gamma_a A}{4\pi\nu}\Delta N(t) \qquad (15.6\text{-}21)$$

式（15.6-21）中的第一个等式直接由法布里—珀罗共振频率关系，即式（6.2-2）得出。我

们假设了由于载流子的注入引起的折射率的变化$\Delta n_0'$ 仅发生在有源区。限制因子$\Gamma_a \approx V_{有源}/V_{模}$可理解为有源介质对共振器进行部分填充的原因。利用上述最后一个等式来替换式（15.6-14）[32,35]中的$\Delta N(t)$可得有关激光器频率啁啾的公式

$$\Delta\nu(t) = \frac{\alpha}{4\pi}\left(\frac{1}{P_0}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} + \frac{\varepsilon}{\tau_p}\Delta P(t)\right) \qquad (15.6\text{-}22)$$

频率啁啾正比于幅耦合常参数α。涉及 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ 的部分叫做暂态啁啾，而与$\Delta P(t)$成正比的部分叫做绝热啁啾，后者涉及增益抑制参数ε并且总在低（$\leqslant 10^8$Hz）频率时占优势，而暂态啁啾则是在典型微波（$>10^9$Hz）频率上占优势。

啁啾激光器的场谱

在推导式（15.6-22）的过程中，发现通过电流调制而对半导体激光器的功率所进行的任何调制都会引起频率啁啾。下面将借助正弦功率调制来得到激光器输出光场的光谱，以便分析这种作用的量级大小，特别是光谱扩展量[36,37]。我们将激光器的光场表示为

$$E(t) = \left(E_0 + \frac{s}{2}E_0 \sin \omega_m t\right)\exp\{i[2\pi\nu_0 t + \phi(t)]\} \qquad (15.6\text{-}23)$$

式中 E_0 和 s 是常数，ω_m 是调制频率，$\phi(t)$ 是随时间变化的相位，ν_0 是平均光频率。无量纲的常数 s 是调制深度的测量值。对一个含时变化的相位的场，载流子频率$\nu(t) = \nu_0 + (1/2\pi)(\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t)$对应于 t 时刻每秒光学周期数。式（15.6-23）中的相位$\phi(t)$与式（15.6-22）中的频率啁啾$\Delta\nu(t)$之间的关系可由下述关系式表达

$$\phi(t) = 2\pi\int_0^t \Delta\nu(t')\,\mathrm{d}t' = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{P_0}P(t) + \frac{\varepsilon}{\tau_p}\int_0^t \Delta P(t')\,\mathrm{d}t'\right) \qquad (15.6\text{-}24)$$

如果$\phi(t)$为常数（当时α=0才会出现这种情况），光场 $E(t)$ 的光谱会包含一个频率为 ν_0 振幅为 E_0 的峰以及振幅为 $s/4$ 的两个边带。当$\phi(t)$不为常数时，就会出现另外的边带而且光谱展宽。在涉及高数据速率光纤通信的应用中，这种由啁啾引起的展宽值得特别关注。这是因为色散光纤内脉冲的瞬时展宽直接与光的谱宽和传播长度的乘积成正比，这已在 1.5 和 3.5 节中分析过。因此激光器内的谱宽所出现的任何增大都会限制在这种光纤中数据传输的速率。在这里所讨论的情况中，可将光子密度 $P(t)$表达为

$$P(t) \propto \langle |E(t)|^2\rangle = E_0^2\left(1 + \frac{s^2}{4}\right) + sE_0^2 \sin \omega_m t = P_0 + P_1 \sin \omega_m t \qquad (15.6\text{-}25)$$

式中角括号< >表示对几个光周期的求平均。用表达式（15.6-24）中第二个等式进行替换后可得

$$\phi(t) = \frac{\alpha}{2}\left[\underset{\text{暂态}}{\frac{P_1}{P_0}\sin\omega_m t} \quad \underset{\text{绝热}}{-\frac{\varepsilon P_1}{\omega_m \tau_p}\cos\omega_m t}\right]$$

式中我们忽略了与不重要的固定相移相对应的且不受时间约束的几项。在高调制频率如$\omega_m \gg \varepsilon P_0/\tau_p$（利用本节前面所举数例中的数据，它与$\omega_m/2\pi \gg 2\times 10^9$ Hz 相一致）时，方括弧内的第一项（“暂态”）占优势。这样便可将光相位表示为

$$\phi(t) = \frac{m_1\alpha}{2}\sin\omega_m t$$

$$m_1 \equiv \frac{P_1}{P_0} = \frac{s}{1+s^2/4} \approx s \qquad (15.6\text{-}26)$$

式中 s（和 m_1）$\ll 1$。式（15.6-23）中的总光场可变成

$$E(t) = \left(E_0 + \frac{m_1}{2}E_0\sin(\omega_m t)\right)\exp\left[i\left(\omega_0 t + \frac{m_1\alpha}{2}\sin(\omega_m t)\right)\right] \qquad (15.6\text{-}27)$$

这里我们取 $s \approx m_1$（$s \ll 1$）。

我们可利用贝塞耳函数的特性

$$e^{i\delta\sin x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\delta)e^{inx} \qquad (15.6\text{-}28)$$

将式（15.6-27）改写为

$$\frac{E(t)}{E_0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\delta)\exp[i(\omega_0 + n\omega_m)t] - i\frac{m}{4}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\delta)\exp\{i[\omega_0 + (n+1)\omega_m]t\}$$
$$+i\frac{m_1}{4}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\delta)\exp\{i[\omega_0 + (n-1)\omega_m]t\}$$

下列为一些边带的表达式

$$\text{在}\omega_{0,}\quad E_0\left[J_0(\delta) + i\frac{m}{2}J_1(\delta)\right]\exp(i\omega_0 t)$$
$$\text{在}\omega_0+\omega_m,\quad E_0\left[J_1(\delta) - i\frac{m}{4}J_0(\delta) + i\frac{m_1}{4}J_2(\delta)\right]\exp[i(\omega_0+\omega_m)t]$$
$$\text{在}\omega_0-\omega_{m,}\quad E_0\left[-J_1(\delta) + i\frac{m_1}{4}J_0(\delta) - i\frac{m_1}{4}J_2(\delta)\right]\exp[i(\omega_0-\omega_m)t] \qquad (15.6\text{-}29)$$
$$\text{在}\omega_0+2\omega_{m,}E_0\left[J_2(\delta) - i\frac{m_1}{4}J_1(\delta) + i\frac{m_1}{4}J_3(\delta)\right]\exp[i(\omega_0+2\omega_m)t]$$
$$\text{在}\omega_0-2\omega_m, E_0\left[J_2(\delta) - i\frac{m_1}{4}J_1(\delta) + i\frac{m_1}{4}J_3(\delta)\right]\exp[i(\omega_0-2\omega_m)t]$$

式中 $\delta = m_1\alpha/2$ 是光场的相位调制指数。位于 $\omega_0 \pm n\omega_m$ 边带的振幅在这种情况下有着相同的大小。这是由式（15.6-27）得出的结论。但它通常来说并不正确。这样在 m_1 和 δ 不为零时，光边带在 ω_0 上并不对称。习题 15.11 已涉及该问题。图 15.21（b）所示为一个电流被调制的激光器的输出场光谱的实验图。该光谱与一个绝热啁啾光谱相符合，并与下述的场相一致

$$E(t) = \left(E_0 + \frac{m_1}{2}E_0\sin(\omega_m t)\right)\exp[i(2\pi\nu_0 t + \delta\cos\omega_m t)] \qquad (15.6\text{-}30)$$

其中 $m_1 = 0.2$，$\delta = 3.3$。

在暂态情况下，我们发现[见式（15.6-27）]相位调制指数 δ 即相位偏移的大小等于 $m\alpha/2$ 而且它可通过与实验边带的分布的拟合而得以确定，因为强度调制指数 m_1 可由激光器强度的光谱分析直接确定，所以可用来扫描法布里—珀罗标准具获得的场光谱与可由对检测得到的光电流进行光谱分析而获得的强度谱结合起来以确定幅相耦合常数 α[32]。

15.7　集成光电子学

在其为数不多的与人类积极合作中，大自然赠予了基于 GaAs/GaAlAs 和 InP/GaInAsP 的Ⅲ-Ⅴ族半导体双份的礼物。它们是，正如上面已讨论过的，供半导体激光器所选用的材料。另外还有可能，特别是在 GaAs/GaAs 和 GaAs/GaAlAs 激光器中，将它们像硅用做构成电路的基本材料那样来使用它们。现在出现了一种全新的基于 GaAs/GaAlAs 的工艺[36]。这将带来在 GaAs 中大的电子迁移率而对应的高的转换速率优势。

在 1971 年文献[37]就已提出一种观点，即有可能将现代通信时代的两个主角——晶体管和激光器——在一个Ⅲ-Ⅴ族半导体内单片集成新的光电子电路。现在这项新技术正迈出其由实验室到实际应用的试验性的第一步。

基本的工作原理以及一个集成光电子器件的实例在图 15.22 中给出。图中为一个与图 15.16 相似的掩埋式双异质结 GaAs/GaAlAs 激光器在同一晶片上与一个场效应晶体管（FET）集成。FET 的输出电流（见图中箭头）提供电子注入到激光器的有源区内，可以用一个加在门电极上的偏置电压来控制电流进而调制激光器的功率输出。

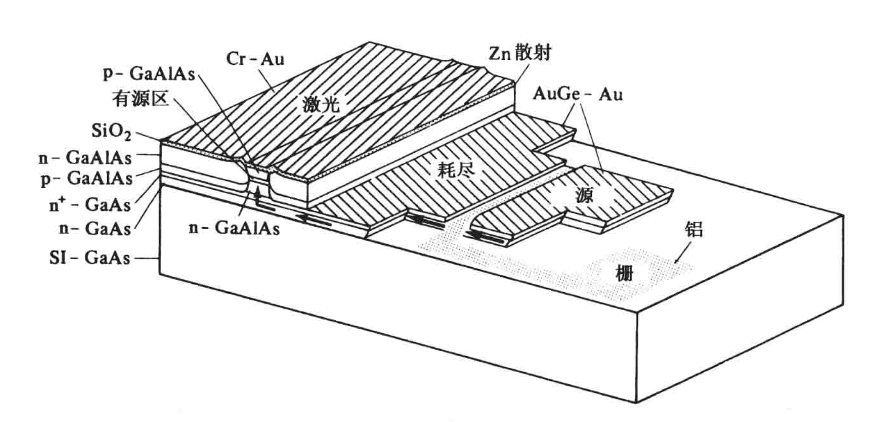


图 15.22　一个 GaAs n 型沟道场效应晶体管与一个掩埋式双异质结构 GaAs/GaAlAs 激光器单片集成示意图。采用门电压为的是控制激光器内的偏置电流。该电压能够在 >10GHz 的频率上对光进行振荡和调制（引自文献[38]）

图 15.23 所示为一个可利用的集成光电中继器模型的例子，其中包括一个检测器，一个 FET 电流前置放大器，一个 FET 激光驱动器和一个激光器。不断沿着集成光电子电路技术[40]的方向加速发展的主要原因在于与传统互连线路相关的寄生电抗的减少以及该项技术与集成电路技术的兼容性，这种兼容性使得有可能将有关集成电路的先进技术应用到这一类新器件中去。更多关于集成光电子电路的例子已在图 15.24 和图 15.25 中给出。

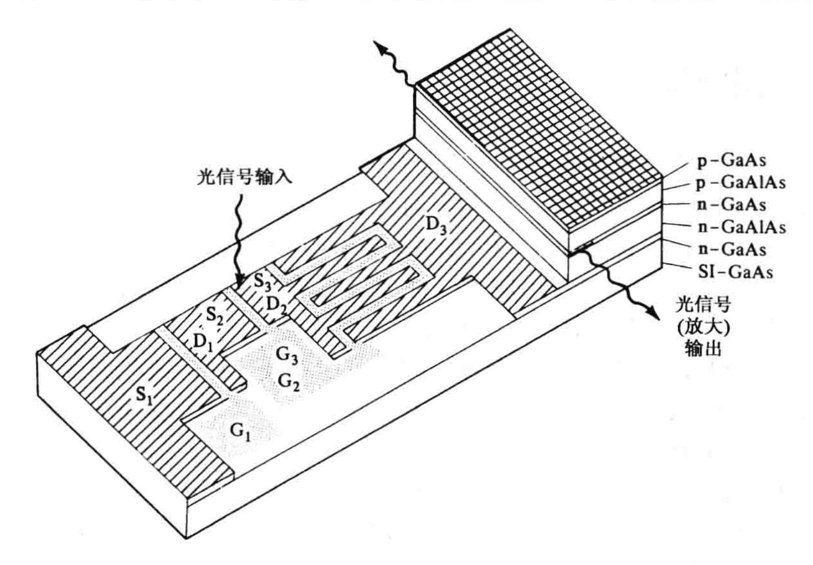


图 15.23　一个单片集成光电中继器，其中包括一个检测器、晶体管电流源、一个 FET 放大器和一个单晶 GaAs 衬底层上的激光器（引自文献[39]）

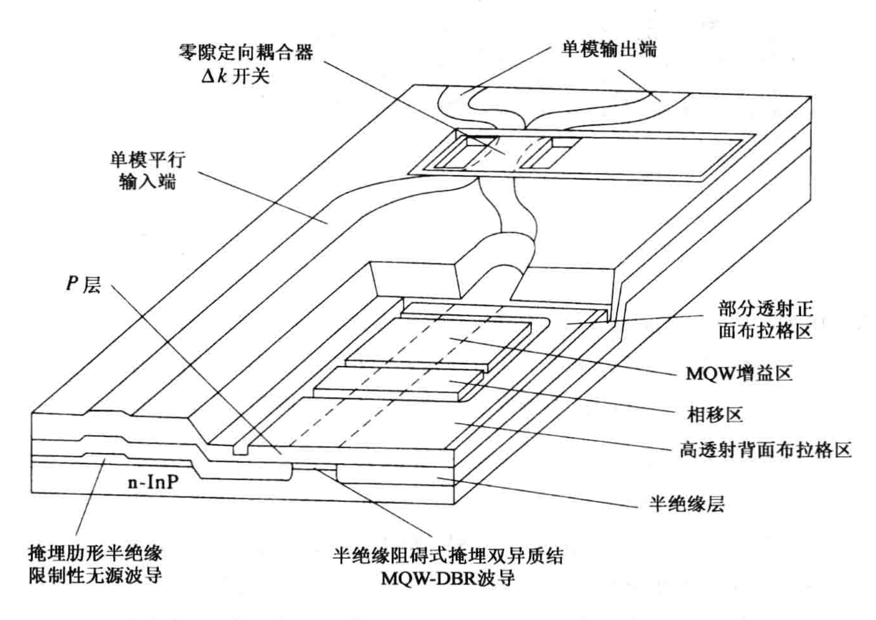


图 15.24　一个包括了采用多量子阱（MWQ）增益区、用于外部输入光波的无源波导和一个在输出端用来连接激光器输出场与外部输入的定向耦合开关的可调多区 InGaAsP/InP 1.55μm 激光器的单片电路（引自文献[41]）

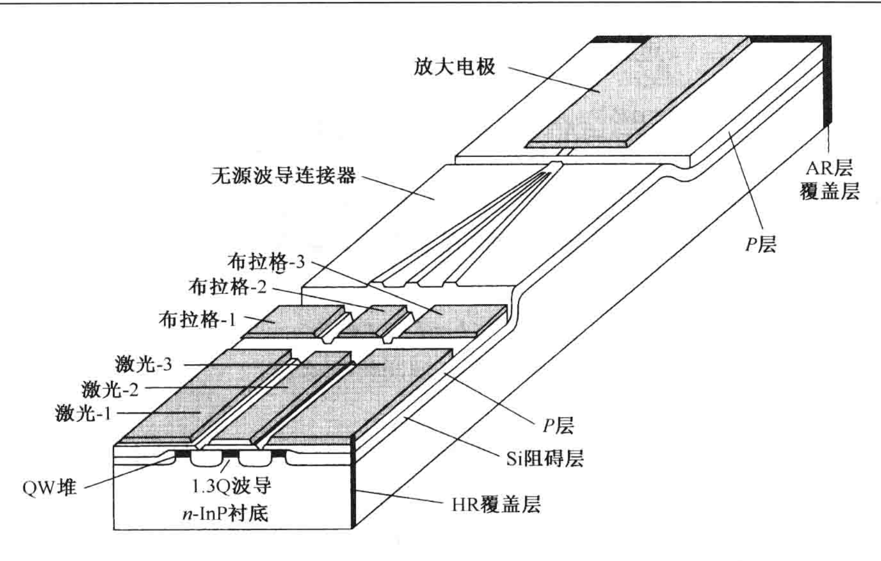


图 15.25　由三个各自调制波长略有不同的约 1.5μm InGaAsP/InP 分布反馈激光器组成的光电集成电路。这三种波长被反馈进一个单波导并在一个单级放大器内被放大（引自文献[42]）

习题

15.1　推导方程式（15.6-12）。

15.2　推导方程式（15.5-7）和（15.5-8）。

15.3　假定一光纤长度 L=10km，群速色散参数为 10ps/ns • km（见 3.4 节）。如果我们采用的是与 15.6 节所举的例子中的激光器有相似特征的半导体激光器，试计算通过该光纤的最大数据速率，单位 bits/s。为便于计算，假定数据速率 N bits/s 等同于电流调制频率 $\omega_m/2\pi = N$ 。

15.4　求将方程式（15.6-9）中的 $p_i(\omega_m)$最大化的频率ω_R，并利用所给近似值推导式（15.6-11）。

15.5　求值并绘图：

一个处于粒子数反转 GaAs 晶体在下列情况下的增益$\gamma(\omega)$

$$N_{电子} = N_{空穴} = 3\times10^{18}\text{cm}^{-3}$$

$$m_c = 0.07m_{电子}$$

$$m_h = 0.4m_{电子}$$

$$T = 0\text{K}$$

$$E_g = 1.45\text{eV}$$

$$T_2 = \infty$$

（a）对当温度上升时对$\gamma(\omega)$的变化作定性的评估；

（b）有限 T_2 对$\gamma(\omega)$有什么影响？

15.6　请考虑在速率方程式（15.5-1）中加入一个非线性增益项 bP 对调制响应值 $p_1(\omega_m)/i_1(\omega_m)$所产生的影响

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=\frac{I}{eV}-\frac{N}{\tau}-A(1-bP)(N-N_{透明})P$$
$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=A(1-bP)(N-N_{透明})P\Gamma_a-\frac{P}{\tau_p}$$

其中 $bP \ll 1$。试证明所产生的主要作用为在ω_R上的共振峰值的阻尼。

15.7　试求解一个半导体激光器内的载流子密度调制 $N=N_0+N_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_m t}$，该激光器的电流调制在

$$I=I_0+I_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_m t} \tag{15.P-1}$$
$$\omega_m=调制频率\ll\omega_{光} \tag{15.P-2}$$

（见 15.5 节。）

15.8　假定 $\varepsilon=\varepsilon_0-aN$，$a$ 为一个常数并且半导体激光器的瞬时频率按照

$$\frac{\Delta\nu}{\nu}=-\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \tag{15.P-3}$$

请找出因电流调制形成的激光器光场表示式，该场的（相位）调制系数是多少？

15.9　利用图 15.7 中的数据，计算使一个半导体激光器的有源介质达到透明条件所需的总电流是多少？假定有源介质的体积为 300×2×0.2（μm^3），复合寿命为τ=3×10^{-9}s。

15.10　如果习题 15.9 中有源区的厚度降低为 100Å，我们能够从一个半导体激光器中获得足够的增益抵消分布性损耗常量α=20cm^{-1}和 R=0.9 吗？达到透明条件的电流是什么？达到阈值的电流是什么？这里假定模式高度垂直于 $t=4000$Å 的界面而且

$$\Gamma_a \sim \frac{d(有源区)}{t(模式高度)}$$

15.11　绘制一个光波同时振幅调制（AM）和频率调制（FM）而产生的光谱图：

$$E(t)=\left(E_0+\frac{m_1}{2}E_0\sin(\omega_m t)\right)\exp\{i[\omega_0 t+\delta\sin(\omega_m t+\alpha)]\}$$

取$\alpha=0$，π/6，π/4，π/2。

参考文献

1. Basov, N. G., O. N. Krokhin, and Y. M. Popov, Production of negative temperature states in *p-n* junctions of degenerate semiconductors, *Sov. Phys. JETP* **40**:1320 (1961).
2. Hall, R. N., G. E. Fenner, J. D. Kingsley, T. J. Soltys, and R. O. Carlson, Coherent light emission from GaAs junctions. *Phys. Rev. Lett.* **9**:366 (1962).
3. Nathan, M. I., W. P. Dumke, G. Burns, F. H. Dills, and G. Lasher, Stimulated emission of radiation from GaAs *p-n* junctions. *Appl. Phys. Lett.* **1**:62 (1962).
4. Yariv, A., and R. C. C. Leite, Dielectric waveguide mode of light propagation in *p-n* junctions. *Appl. Phys. Lett.* **2**:55 (1963).
5. Anderson, W. W., Mode confinement injunction lasers. *IEEE J. Quantum Electron.* **1**:228 (1965).
6. Kittel, C., *Introduction to Solid State Physics*, 5th ed. Wiley, New York, 1982.
7. Yariv, A., *Introduction to the Theory and Applications of Quantum Mechanics*. Wiley, New York, 1982.
8. Bernard, M. G., and G. Duraffourg, Laser conditions in semiconductors. *Phys. Status Solidi*

1:699 (1961).

9. Vahala, K., L. C. Chiu, S. Margalit, and A. Yariv, On the linewidth enhancement factor *a* in semiconductor injection lasers. *Appl. Phys. Lett.* **42**:631 (1983).
10. Stern, F., Semiconductor lasers: theory. In: *Laser Handbook*, F. T. Arecchi and E. O. Schultz Du Bois (eds.). North Holland, Amsterdam, 1972.
11. Kressel, H., and J. K. Butler, *Semiconductor Lasers and Heterojunction LEDS*. Academic Press, New York, 1977.
12. Yariv, A., *Quantum Electronics*, 2nd ed. Wiley, New York, 1975, p. 219.
13. Casey, H. C., and M. B. Panish, *Heterostructure Lasers*. Academic Press, New York, 1978.
14. Dupuis, R. D., and P. D. Dapkus, *Appl. Phys. Lett.* **31**:466 (1977).
15. Cho, A. Y., and J. R. Arthur, in *Progress in Solid State Physics*, Vol. 10, J. O. McCaldin and G. Somoraj (eds.). Pergamon Press, Elmsford, NY, p. 157.
16. Tsang, W. T. and A. Y. Cho, Growth of GaAs/GaAlAs by molecular beam epitaxy. *Appl. Phys. Lett.* **30**:293 (1977).
17. Hayashi, J., M. B. Panish, and P. W. Foy, A low-threshold room-temperature injection laser. *IEEE J. Quantum Electron.* **5**:211 (1969).
18. Kressel, H., and H. Nelson, Close confinement gallium arsenide *p-n* junction laser with reduced optical loss at room temperature. *RCA Rev.* **30**:106 (1969).
19. Alferov, Zh. I., et al., *Sov. Phys. Semicond.* **4**:1573 (1971).
20. Botez, D., and G. J. Herskowitz, Components for optical communication systems: a review. *Proc. IEEE* **68** (1980).
21. Chinone, N., H. Nakashima, I. Ikushima, and R. Ito, Semiconductor lasers with a thin active layer (≪0.1 IJ-m) for optical communication. *Appl. Opt.* **17**:311 (1978).
22. Tsukada, T., GaAs-$Ga_{1-x}Al_xAs$ buried heterostructure injection lasers. *J. Appl. Phys.* **45**:4899 (1974).
23. Derry, P., et al., Ultra low threshold graded-index separate confinement single quantum well buried heterostructure (Al, Ga) as lasers with high reflectivity coatings. *Appl. Phys. Lett.* **50**:1773 (1987).
24. Ortel Corp., Alhambra, CA. Product Data Sheets.
25. Hsieh, J. J., J. A. Rossi, and J. P. Donnelly, Room temperature CW operation of GaInAsP/InP double heterostructure diode lasers emitting at 1.1 μm. *Appl. Phys. Lett.* **28**:709 (1976).
26. Suematsu, Y., Long wavelength optical fiber communication. *Proc. IEEE* **71**:692 (1983).
27. A comprehensive book dealing with long-wavelength lasers is G. P. Agrawal and N. K. Dutta, *Long Wavelength Semiconductor Lasers*, Van Nostrand, New York, 1986.
28. Ralston, J. D., S. Weisser, K. Eisele, R. E. Sah, E. C. Larkins, J. Rosenzweig, J. Fleissner, and K. Bender, Low-bias-current direct modulation up to 33 GHz in InGaAs/AlGaAs pseudomorphic MQW ridge-waveguide lasers. *IEEE Photonics Technol.* **6**:1076 (1994).
29. Coldren, L. A., and S. W. Corzine, *Diode Lasers and Photonic Integrated Circuits*. Wiley, New York, 1995, p. 195.
30. Hirao, M., S. Tsuji, K. Mizushi, A. Doi, and M. Nakamura, *J. Opt. Commun.* **1**:10 (1980).
31. Lau, K. T., N. Bar-Chaim, I. Ury, and A. Yariv, Direct amplitude modulation of semiconductor GaAs lasers up to X-band frequencies. *Appl. Phys. Lett.* **43**:11 (1983).
32. Harder, C., K. Vahala, and A. Yariv, Measurement of the linewidth enhancement factor *a* of semiconductor lasers, *Appl. Phys. Lett.* **42**:428 (1983).
33. Henry, C. H., Line broadening of semiconductor lasers in coherence amplification and quantum effects. In: Semiconductor Lasers, Y. Yamamoto (ed.). Wiley-Interscience, New York, 1991, Chapter 2.
34. Vahala, K., L. C. Chiu, S. Margalit, and A. Yariv, On the linewidth factor *a* in semiconductor injection lasers. *Appl. Phys. Lett.* **42**:631 (April 1983).
35. Koch, T., and J. Bowers, Nature of wavelength chirping in directly modulated semiconductor lasers. *Electron Lett.* **20**:1038 (1984).

36. See, for example, J. P., Bailbe, A. Marty, P. H. Hiep, and G. E. Rey, Design and fabrication of high speed GaAlAs/GaAs heterojunction transistors. *IEEE Trans. Electron. Dev.* **ED-27**:1160 (1980).
37. Yariv, A., Active integrated optics. In: *Fundamental and Applied Laser Physics*, Proc. ESFAHAN Symposium, Aug. 29, 1971, M. S. Feld, A. Javan, and N. Kurnit (eds.). Wiley, New York, 1972.
38. Ury, I., K. Y. Lau, N. Bar-Chaim, and A. Yariv, Very high frequency GaAlAs laser-field effect transistor monolithic integrated circuit. *Appl. Phys. Lett.* **41**:126 (1982).
39. Yust, M., et al., A monolithically integrated optical repeater. *Appl. Phys. Lett.* **10**:795 (1979).
40. Bar-Chaim, N., I. Ury, and A. Yariv, Integrated optoelectronics. *IEEE Spectrum* **May**:38 (1982).
41. Hernandez-Gil, F., T. L. Koch, U. Koren, R. P. Gnall, and C. A. Burrus, Tunable MQW-DBR laser with a monolithically integrated InGaAsP/InP directional coupler switch. Paper PD 17, *Conference on Laser Engineering and Optics* (*CLEO*), (1989).
42. Koren, U., et al., Wavelength division multiplexing light source with integrated quantum well tunable lasers and optical amplifiers. *Appl. Phys. Lett.* **54**:2056 (May 1989).

第 16 章　先进半导体激光器

16.0　引言

本章将讨论一些不同类型的半导体激光器，包括量子阱（QW）激光器、分布反馈式（DFB）激光器和垂直腔面发射激光器（VCSELs）。假定学生已具备初等量子力学的基本知识。量子阱激光器[1]除了具有源层厚度外，这种激光器在许多方面都与图 15.11 中所示的普通双异质结激光器相似。在量子阱激光器内有源层厚度约为 50 – 100Å，而在普通激光器内该厚度约为 1 000Å。这种特点导致了这两种激光器在性能上有着显著的差异。有源区变薄带来的好处是显而易见的：它引起了与变薄的厚度成正比的阈值电流的减小。这种减小可直接从图 15.7 中看出。在有源区内使整个区域达到透明条件所需的载流子密度约为 10^{18}cm^{-3}。为了达到透明条件，必须将有源区内导带（价带）中电子（空穴）的总数 $N_{透明}$维持在约 $V_a\times10^{18}$。其中 V_a（单位为 cm^3）为有源区的体积。用来维持这一数目的注入电流近似地为

$$I_{透明} \sim \frac{e\times10^{18}}{\tau} \qquad (16.0\text{-}1)$$

而且该电流与有源区的体积成正比。因此有源区的变薄使得 V_a 和 $I_{透明}$成比例地减小。在一个设计合理的激光器中，自由载流子，散射以及端面镜（输出）所引起的损耗都很小，以使达到阈值所需要的，高于透明值的电流增量与 $I_{透明}$相比很小。于是 V_a 值的减小所引起的透明电流的减小导致低的阈值电流[2~6]。

量子阱有源区也分别在分布反馈激光器和垂直腔表面发射激光器中被用做放大介质。这两类重要的半导体激光器将在本章中分别论述。

16.1　量子阱内的载流子（高级选题）

真空中的量子阱半导体介质的增益与体材料半导体激光器的增益本质上的不同与这两种介质的态密度有关。体材料半导体的态密度在 15.1 节中已做讨论并由方程式（15.1-7）给出。在式（15.2-9）中已用它来推导出该种介质的增益$\gamma(\omega_0)$的表达式。在本节中，我们将利用量子阱的态密度函数来重复这一过程。这是本书需要涉及量子力学内容的为数不多的一处。没学习过量子力学相关内容但具备足够电磁学知识的学生可以简单地将电子看做德布罗意波。它符合薛定谔方程而不是麦克斯韦方程。该方程式的连续行波解具有$\psi_m(x,\ z) = u_m(\boldsymbol{r})\exp(-iE_m t/\hbar)$的形式，其中$\hbar$可用普朗克常量除以 2π得到，$E_m$ 为电子在态 m 上的量子化能量，$u_m(\boldsymbol{r})$是本征函数。

如图 16.1 所示，考虑量子阱的导带内的电子的运动。量子阱有一个 GaAs 薄层（大约 100 Å）夹在两层 $Ga_{1-x}Al_xAs$ 之间。整个结构具有单一的晶格。因为 $Ga_{1-x}Al_xAs$ 的带隙比 GaAs 的大，在 GaAs 和 $Ga_{1-x}Al_xAs$ 界面存在势垒。在势阱中的电子能够自由地（其有效质量为 m_c）沿 x 和 y 方向移动，但由于 GaAs 和 GaAlAs 界面存在势垒在 z 方向受到限制（通

常是沿结面方向）。GaAs/$Ga_{1-x}Al_xAs$ 系统的势垒ΔE_c已在 15.3 节中给出，$\Delta E_c \sim 0.75$eV。

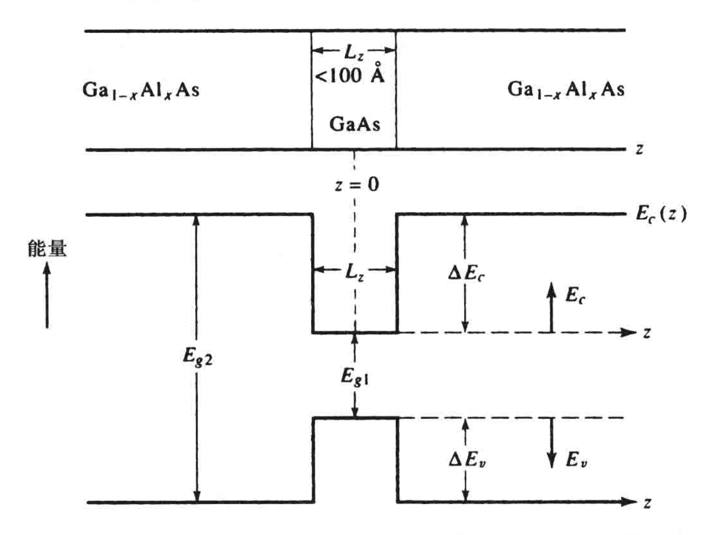


图 16.1　GaAlAs/GaAs/GaAlAs 量子阱的层状结构和能带图

为简单起见，可令ΔE_c 为无穷大。（对势垒高度≥100 Å，*Al* 的摩尔分数 $x \geq 0.3$ 来说，这是个较为准确的近似值。）在该势阱中电子的波函数 $u(\boldsymbol{r})$符合不含时的薛定谔方程[7]。

$$V(z)u(\boldsymbol{r}) - \frac{\hbar^2}{2m_c}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(\boldsymbol{r}) = Eu(\boldsymbol{r}) \tag{16.1-1}$$

式中 E 为电子能量，$V(z) = E_c(z)$是将电子限制在 z 方向上的势能函数。我们计算在图 16.1 中 GaAs 有源区内位于导带底部的一个电子的能量。因为量子势阱 $V(z)$仅是 z 的函数，所以将本征函数 $u(\boldsymbol{r})$分离变量变为乘积形式

$$u(\boldsymbol{r}) = \psi_k(\boldsymbol{r}_\perp)u(z) = u_{k_\perp}(\boldsymbol{r}_\perp)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{r}_\perp}u(z) \tag{16.1-2}$$

其中 $u_{k_\perp}(\boldsymbol{r}_\perp)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\perp\cdot r_\perp}$ 是 xy 平面内电子运动的布洛赫函数，$u_{k_\perp}(\boldsymbol{r}_\perp)$ 具有与晶格相同的周期，$\boldsymbol{r}_\perp$ 表示平面内的坐标，$\boldsymbol{k}_\perp$ 是一个任意的常量代表 xy 平面内布洛赫波矢，$u(z)$是描述 z 方向运动的波函数。注意到在 xy 平面内电子波函数是布洛赫函数，在 xy 平面内媒质是“均匀”的（即没有势垒）。将式（16.1-2）代入式（16.1-1），可得到

$$\begin{gathered}
-\frac{\hbar^2}{2m_c}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u_{k_\perp}(\boldsymbol{r}_\perp)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{r}_\perp} = \frac{\hbar^2 k_\perp^2}{2m_c}u_{k_\perp}(\boldsymbol{r}_\perp)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{r}_\perp} \\
\left(V(z) - \frac{\hbar^2}{2m_c}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u(z) = \left(E - \frac{\hbar^2 k_\perp^2}{2m_c}\right)u(z) = E_z u(z)
\end{gathered} \tag{16.1-3}$$

式中 E_z 是待确定的分立常数。将波函数代入式（16.1-2），电子能量可写为

$$E = \frac{\hbar^2 k_\perp^2}{2m_c} + E_z \tag{16.1-4}$$

式中第一项可看做沿 xy 方向导带中电子运动的动能，而 E_z 是沿 z 方向电子运动的能量。作简化，令导带底的电子能量为零。对于无限深势阱，$u(z)$在 $z = \pm L_z/2$ 时必须为零。设定阱区内 $V(z)$=0，由式（16.1-3）波函数 $u(z)$是简单正弦函数。

$$u_l(z)=\begin{cases}\cos l\dfrac{\pi}{L_z}z & l=1,3,5,\cdots\\ \sin l\dfrac{\pi}{L_z}z & l=2,4,6,\cdots\end{cases} \tag{16.1-5}$$

式中 L_z 是势阱宽度。将式（16.1-5）代入式（16.1-3）后可以推导出

$$E_c(\boldsymbol{k}_\perp,l)=\frac{\hbar^2k_\perp^2}{2m_c}+E_z=\frac{\hbar^2k_\perp^2}{2m_c}+l^2\frac{\hbar^2\pi^2}{2m_cL_z^2}\equiv\frac{\hbar^2k_\perp^2}{2m_c}+E_{lc} \tag{16.1-6}$$

式中 E_z 表示为

$$E_z\equiv E_{lc}=l^2\frac{\hbar^2\pi^2}{2m_cL_z^2}=l^2E_{1c}\quad l=1,2,3,\cdots \tag{16.1-7}$$

下面用下标 c 表示导带。对于无限深势阱，所有的波函数被限制在阱内。换句话说，无论能量高低，电子被限制在势阱内。类似地可得到关于价带中电子的一组波函数和能量的方程。在式（16.1-6）中，E_{lc} 是最低态的能量（l=1）。最低态（基态）具有对称波函数，与势阱的对称相对应。我们已令导带底为能量零点。值得注意的是式（16.1-5）仅是近似结果。近似条件是简化了 z 方向电子运动，严格地求解中，$u(z)$也应是布洛赫函数，与 z 方向的晶格周期对应。

用 $m_c\to m_v$ 可得到价带中的空穴的类似的结论。我们还记得在电子能级图中所测得的空穴能量 E_v 是向下增大的。这样便可得到

$$E_v(\boldsymbol{k}_\perp,l)=\frac{\hbar^2k_\perp^2}{2m_v}+l^2\frac{\hbar^2\pi^2}{2m_vL_z^2}=\frac{\hbar^2k_\perp^2}{2m_v}+E_{lv}\quad l=1,2,3,\cdots \tag{16.1-8}$$

该等式是由价带顶部（向下）测定的。那么完整的波函数，对导带中的电子

$$\psi_c(\boldsymbol{r})=\sqrt{\frac{2}{L_z}}\,\psi_{k_\perp c}(\boldsymbol{r}_\perp)CS\left(l\frac{\pi}{L_z}z\right) \tag{16.1-9}$$

对价带中的空穴

$$\psi_v(\boldsymbol{r})=\sqrt{\frac{2}{L_z}}\,\psi_{k_\perp v}(\boldsymbol{r}_\perp)CS\left(l\frac{\pi}{L_z}z\right) \tag{16.1-10}$$

根据式（16.1-4），定义 $CS(x)\equiv\cos(x)$或 $\sin(x)$，$\psi_{k_\perp c}(\boldsymbol{r}_\perp)$ 和 $\psi_{k_\perp v}(\boldsymbol{r}_\perp)$ 是在 xy 平面内电子运动的布洛赫波函数。最低态的电子和空穴的波函数为

$$\psi_c(\boldsymbol{r})_{\text{基态}}=\sqrt{\frac{2}{L_z}}\cos\left(\frac{\pi}{L_z}z\right)\psi_{k_\perp c}(\boldsymbol{r}_\perp) \tag{16.1-11}$$

$$\psi_v(\boldsymbol{r})_{\text{基态}}=\sqrt{\frac{2}{L_z}}\cos\left(\frac{\pi}{L_z}z\right)\psi_{k_\perp v}(\boldsymbol{r}_\perp) \tag{16.1-12}$$

它们连同紧邻的高能级如图 16.2 所示。在一个实际的半导体量子阱中，势阱（见图 15.11）的高度ΔE_c 是有限的。有限的势阱仍可使能态被限制，只要势阱高度ΔE_c 足够大（通常至少大于 E_{1c}）。有限深势阱中被限制的能态波函数在阱内是正弦函数，在阱外是呈指数式衰减的函数。被限制的能态数与势阱高度ΔE_c 有关。注意到很有趣的是电子函数 $u(z)$ 与对称平面波导被限制的 TE 模相似。事实上，为了求解有限深势阱的公式（16.1-3）的数学步骤与第 3 章中

所用求解介质波导中遵守与薛定谔方程相似的方程式（3.1-4）的 TE 模的数学步骤相似。事实上，为了确定受限制的本征模的数量及其本征值我们采用了与图 3.2 中相同的步骤和方法。

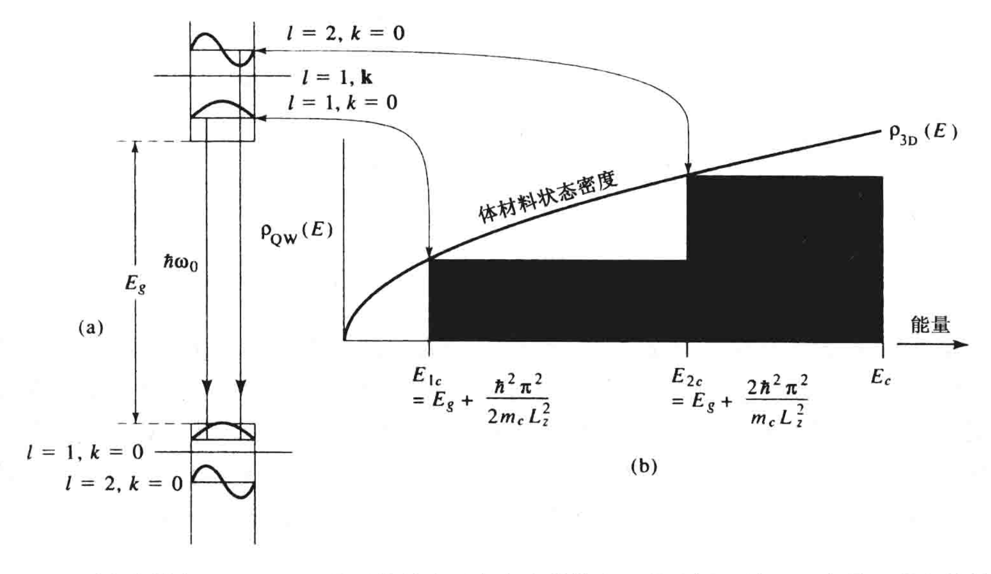


图 16.2　(a)无穷势阱中 $l=1$，$l=2$ 量子化的电子和空穴的状态及其本征函数。(b)在量子阱和体材料半导体内电子态体密度$(1/AL_z)/[\mathrm{d}N(E)/\mathrm{d}E]$的（单位面积（A）单位能量间隔中的状态数除以有源层的厚度 z）图（由加州帕萨迪纳的加利福尼亚技术学院的 M • 密特尔斯塔恩先生（M. Mittelstein）提供）

态密度

这里考虑的情形与第 15.1 节中的相类似。由于电子在 x 和 y 方向上是“自由”的，因而我们可以假设电子受限于一个矩形 L_xL_y（L_x和 L_y 都大于 L_z）内，从而进行二维量子化。如同在方程式（15.1-3）中的那样，这引起了 $\boldsymbol{k}$ 矢量分量的量子化。

$$k_x = n\frac{\pi}{L_x} \qquad n=1,\quad 2,\quad \cdots, \qquad k_y = m\frac{\pi}{L_y} \qquad m=1,\quad 2,\quad \cdots \tag{16.1-13}$$

因此在 $\boldsymbol{k}_\perp$ 空间，每一个本征态的面积都为 $A_{态} = \pi^2/L_xL_y \equiv \pi^2/A_\perp$ 。从现在起我们忽略下标记做 $k \equiv k_\perp$。比某一特定 k 值小的横向值 k' 的状态数可按照式（16.1-13）由计算正格点 (m,n) 数而得到。用面积$\pi k^2/4$ 除以 $A_{态}$（因子 1/4 是因为按照式（16.1-13）仅计算了正格点）后得到

$$N(k) = \frac{k^2A_\perp}{2\pi} \tag{16.1-14}$$

式中 $A_\perp = L_xL_y$ 是 xy 平面内量子阱的面积，因子 2 表示每个电子的两个自旋取向。这就是比 k 值小的横向波数对应的电子的总的状态数。

k 与 $k+\mathrm{d}k$ 之间的量子态数目为

$$\rho(k)\mathrm{d}k = \frac{\mathrm{d}N(k)}{\mathrm{d}k}\mathrm{d}k = A_\perp \frac{k}{\pi}\mathrm{d}k \tag{16.1-15}$$

该公式对于导带或价带来说都适用。总能量在 E 和 $E+\mathrm{d}E$ 之间的量子态的总数目为

$$\frac{\mathrm{d}N(E)}{\mathrm{d}E}\mathrm{d}E = \frac{\mathrm{d}N(k)}{\mathrm{d}k}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}E}\mathrm{d}E = A_{\perp}\frac{k}{\pi}\mathrm{d}k \tag{16.1-16}$$

单位面积单位能量间隔的态数目

$$\frac{1}{A_{\perp}}\frac{\mathrm{d}N(E)}{\mathrm{d}E} = \frac{k}{\pi}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}E} \tag{16.1-17}$$

根据式（16.1-6）令$\boldsymbol{k}_{\perp} \to \boldsymbol{k}$，$\ell = 1$，这里所作的讨论仅限于导带，在最低态$\ell$=1 上的电子能量和$\boldsymbol{k}$值的关系为

$$k = \sqrt{\frac{2m_c}{\hbar^2}}(E - E_{1c})^{1/2} \tag{16.1-18}$$

将式（16.1-17）中的 k 值用式（16.1-17）代入，这样便可以得到（单位能量单位面积内）二维态密度

$$\rho_{\mathrm{QW}}(E) \equiv \frac{1}{A_{\perp}}\frac{\mathrm{d}N(E)}{\mathrm{d}E} = \frac{m_c}{\pi\hbar^2} \tag{16.1-19}$$

请注意这里指的是电子态的密度。电子的实际密度取决于将在下一节中讨论的这些态按照费米-狄拉克分布函数的占据情况。电子在 xy 平面内自由运动而在 z 方向在势阱中受到限制，这种情形下的态密度是常数。重用 $m_c \to m_v$ 得到一个与式（16.1-19）类似的表达式适用于价带。在推导式（16.1-19）的过程中，我们只考虑了一个具有固定量子数ℓ的横矢量子态$u(z)$（见式 16.1-19）。但是例如在 $E > E_{2c}$ 时，给定总能量为 E 的一个电子可以存在于$\ell = 1$ 或$\ell = 2$ 的态中。这样在 $E = E_{2c}$ 态上的态密度增大一倍；在 $E = E_{3c}$ 态上的态密度增至原来的三倍，以此类推。于是便形成了阶梯型的态函数密度。因此在式（16.1-6）中每一个能级 $E_{\ell c}$ 上总的态密度增大了 $m_c/\pi\hbar^2$，用数学公式表达如下

$$\rho_{\mathrm{QW}}(E) = \sum_{n=1}^{\text{所有态}}\frac{m_c}{\pi\hbar^2}H(E - E_{nc}) \tag{16.1-20}$$

式中 $H(x)$为海维塞德（Heaviside）函数。当 $x > 0$ 时，$H(x)$等于 1；当 $x < 0$ 时，$H(x)$为零。

图 16.2 所示为阶梯型态密度中的前两个阶梯。在图中，我们将量子阱介质内的态体密度标示为ρ_{QW}/L_z 以便将其与普通半导体体材料介质内的态密度进行比较。在这种情况下，可直接证得图中所示的量子阱（QW）的体态密度与每一个阶梯上的体密度值$\rho_{3D}(E)$相等。

选择定则

考虑一个由导带的填满状态向价带的空状态进行的电子放大跃迁。导带内的状ℓ=1 态具有最多的电子数。（费米定理方程（15.1-8）说明了电子占据数是如何随能量的降低而减弱的。）相同的论证表明在价带态ℓ=1 中存在最大数目的空穴。接下来，就数目而言，最大的光增益将从由导带中的ℓ=1 态向价带中ℓ=1 态的跃迁中产生。根据量子力学的基本原理，两个量子态间的跃迁概率（初态为 u_i，末态为 u_f）是

$$R_{f\leftarrow i} \propto \int u_f^*(\boldsymbol{r})e\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E}u_i(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \tag{16.1-21}$$

式中 $\boldsymbol{E}$ 是光波的电场矢量，$\boldsymbol{r}$ 是电子的位矢。

增益常数也与有关跃迁概率 $R_{f\leftarrow i}$ 成正比。根据式（16.1-11）和式（16.1-12），最低能级的电子和空穴的波函数间的跃迁概率为

$$R_{f\leftarrow i}\propto\int \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{-L_z/2}^{L_z/2} e\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E}\cos^2\frac{\pi z}{L_z}\mathrm{d}z \tag{16.1-22}$$

而且由于

$$\int_{-L_z/2}^{L_z/2} z\cos^2\frac{\pi z}{L_z}\mathrm{d}z=0 \tag{16.1-23}$$

允许的跃迁仅发生在光场 $\boldsymbol{E}$ 在 xy 平面内是偏振的。因此光矢量 $\boldsymbol{E}$ 一定处在量子阱的面（xy 平面）上。一个沿 z 方向偏振的场并没有激发两个最低能级间的跃迁，因而这两个态未产生增益（或损耗）。

16.2　量子阱激光器的增益

为获得被（完全地）限制在一个量子阱介质[8]内的一列光波的增益表达式，我们将采取与在 15.2 节中讨论体材料半导体介质时采用过的相同的步骤。在频率 $\hbar\omega_0$ 上的放大性跃迁如图 16.2 所示。位于上端的电子态与下端的空穴态（价带中未被电子占据的态）有着相同的 ℓ 和 $\boldsymbol{k}$ 值（见 16.1 节中有关选择定则的讨论），这样可得跃迁能量为

$$\begin{aligned}\hbar\omega&=E_c-E_v=E_g+E_c(\boldsymbol{k},l)+E_v(\boldsymbol{k},l)\\&=E_g+\left(\frac{1}{m_c}+\frac{1}{m_v}\right)\frac{\hbar^2}{2}\left(k^2+l^2\frac{\pi^2}{L_z^2}\right)\\&=E_g+\frac{\hbar^2}{2m_r}\left(k^2+l^2\frac{\pi^2}{L_z^2}\right)\end{aligned} \tag{16.2-1}$$

式中 m_r 是折合质量

$$m_r=\frac{m_cm_v}{m_c+m_v} \tag{16.2-2}$$

式中 $\ell=1,2,\cdots$就像在式（16.1-5）中变量为 z 的本征函数 $u_\ell(z)$中的量子数。下面再从式（15.2-4）出发，但是现在与式（15.2-7）对应，用等价的量子阱内载流子的体积密度 $\rho_{\mathrm{QW}}(\boldsymbol{k})/L_z$ 来代替式（15.2-7）中的 $\rho(k)/V$

$$N_1(m^{-3})\rightarrow\frac{\rho_{\mathrm{QW}}(\boldsymbol{k})}{L_z}\mathrm{d}kf_v(E_v)[1-f_c(E_c)]=\frac{k}{\pi L_z}(f_v-f_vf_c]\mathrm{d}k$$

$$N_2(m^{-3})\rightarrow\frac{\rho_{\mathrm{QW}}(\boldsymbol{k})}{L_z}\mathrm{d}kf_c(E_c)[1-f_v(E_v)]=\frac{k}{\pi L_z}(f_c-f_cf_v]\mathrm{d}k$$

式中 $\rho_{\mathrm{QW}}(\boldsymbol{k})$由式（16.1-19）给出，且不随 $\boldsymbol{k}$ 的变化而变化。因此，可得到位于 k 与 $k+\mathrm{d}k$ 之间的载流子的有效反转粒子数密度

$$N_2-N_1\rightarrow\frac{k\,\mathrm{d}k}{\pi L_z}[f_c(E_c)-f_v(E_v)] \tag{16.2-3}$$

用 ρ_{QW} 除以 L_z 为的是利用与式（15.2-4）中 N_1 和 N_2 的定义相符的反转粒子数的体密度求出增益常数。E_c 和 E_v 分别为跃迁中载流子的上能级和下能级。利用式（15.2-4）和式（16.2-3）可将如 $\ell=1$ 的单个子带中 dk 内的电子而产生的增益表示为

$$\mathrm{d}\gamma(\omega_0)=\frac{k\,\mathrm{d}k}{\pi L_z}[f_c(E_c)-f_v(E_v)]\frac{\lambda_0^2}{4n^2\tau}\left(\frac{T_2}{\pi[1+(\omega-\omega_0)^2T_2^2]}\right) \tag{16.2-4}$$

其中 T_2 为电子的相干碰撞时间，τ为电子—空穴复合寿命且设为常数。我们发现能够很容易地将变量 k 转换为跃迁频率ω（见式 16.2-1）。由式（16.2-1）可得

$$\mathrm{d}k = \frac{m_r}{\hbar k}\mathrm{d}\omega$$

这样式（16.2-4）可变为

$$\gamma_{l=1}(\omega_0) = \frac{m_r \lambda_0^2}{4\pi\hbar L_z n^2 \tau}\int_0^{\infty}[f_c(\hbar\omega) - f_v(\hbar\omega)]\frac{T_2 \mathrm{d}\omega}{\pi[1+(\omega-\omega_0)^2 T_2^2]} \tag{16.2-5}$$

其中 ω_0 是光波频率，根据传统理论：$f_c(\hbar\omega)$为导带电子的跃迁上能级 E_c 的费米函数；$f_v(\hbar\,□)$为价带电子的跃迁下能级的费米函数。为了将其他所有子带（ℓ=2，3，…）中的贡献包括在内，可利用式（16.1-20）进行如下替换

$$\frac{m_r}{\pi\hbar^2} \rightarrow \frac{m_r}{\pi\hbar^2}\sum_{l=1}^{\infty} H(\omega - \omega_l) \tag{16.2-6}$$

式中 $\hbar\omega_\ell$ 为导带内 ℓ 子带的底部与价带内 ℓ 子带之间的能级差。

$$\hbar\omega_l = E_g + l^2 \frac{\hbar^2\pi^2}{2m_r L_z^2} \tag{16.2-7}$$

为了得到方程式（16.2-5）的解析解，假定相位相干“碰撞”时间 T_2 足够长，从而得到

$$\frac{T_2}{\pi[1+(\omega-\omega_0)^2 T_2^2]} \rightarrow \delta(\omega-\omega_0) \tag{16.2-8}$$

利用式（16.2-8）可将式（16.2-5）简化为

$$\gamma(\omega_0) = \frac{m_r \lambda_0^2}{4\pi\hbar L_z n^2 \tau}[f_c(\hbar\omega_0) - f_v(\hbar\omega_0)]\sum_{l=1}^{\infty} H(\hbar\omega_0 - \hbar\omega_l) \tag{16.2-9}$$

方程式（16.2-5）和式（16.2-9）构成了关键结果。它们包含了量子阱介质中关于增益的基本的物理原理。首先考虑增益与费米函数 f_c、f_v之间的关系。泵浦电流的增大引起了有源区内注入载流子密度的增大进而又导致了准费米能级 E_{Fc} 和 E_{Fv} 的增大。这产生了一个更大的ω_0的区域，其增益条件（公式 15.2-14）

$$f_c(\hbar\omega_0) - f_v(\hbar\omega_0) > 0 \tag{16.2-10}$$

得以满足。图 16.3 描述了上述情形。实心曲线(a)、(b)和(c)显示了一个典型的 GaAs 量子阱激光器在三个连续增大的电流密度上的模式增益。模式增益等于公式（16.2-5）中的介质增益γ（ω_0）与光场限制因子$\Gamma_a \sim L_z/d$ 的乘积，d 是光波模式的有效宽度。虚线代表在无限大电流密度($f_v(\hbar\omega_0)$ =0，$f_c(\hbar\omega_0)$ = 1)时的增益。因此在这种情况下，根据式（16.2-9），增益与态密度函数成正比

$$\rho_{\mathrm{QW}}(\hbar\omega_0) = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{m_r}{\pi\hbar^2}H(\hbar\omega_0 - \hbar\omega_l) \tag{16.2-11}$$

根据理想的阶梯形态密度模型，当电流增大时，经历了透明然后达到增益的第一个频率为ω_0

$$\hbar\omega_0 = E_g + E_{1c} + E_{1v} = E_g + \frac{\hbar^2\pi^2}{2m_r L_z^2} \tag{16.2-12}$$

其中$\hbar\omega_0$为导带$\ell=1(k=0)$的态与价带$\ell=1(k=0)$的态之间的能级差。反转因子$f_c(\hbar\omega_0)-f_v(\hbar\omega_0)$在这一频率上要比在其他大频率上都要大。随着电流的增大同时也伴随着导（价）带内的电子（空穴）密度的增大，准费米能级（E_{Fc}，E_{Fv}）不断深入到各自的带中。这时，在由式（16.2-12）得到的值与$\omega_0=(E_g+E_{Fc}+E_{Fv})$之间存在一个频率范围，该范围内的频率能满足增益条件式（16.2-10）。在更高的泵浦状态下，$\ell=2$ 子带［见图 16.3(b)]连带$\ell=1$ 子带的贡献使增益最大值变为原来的两倍即 $2\gamma(\omega_0)$。图 16.3 中的曲线（d）表示一个普通双异质结激光器的增益变化。我们注意到：相同的电流的增量在单量子阱（SQW）情形中会引起更大的增益增量；在低电流时，单量子阱情形的增益趋于饱和值γ_0；产生增益的光谱区宽度在单量子阱激光器中要比在双异质结（DH）激光器中大得多。

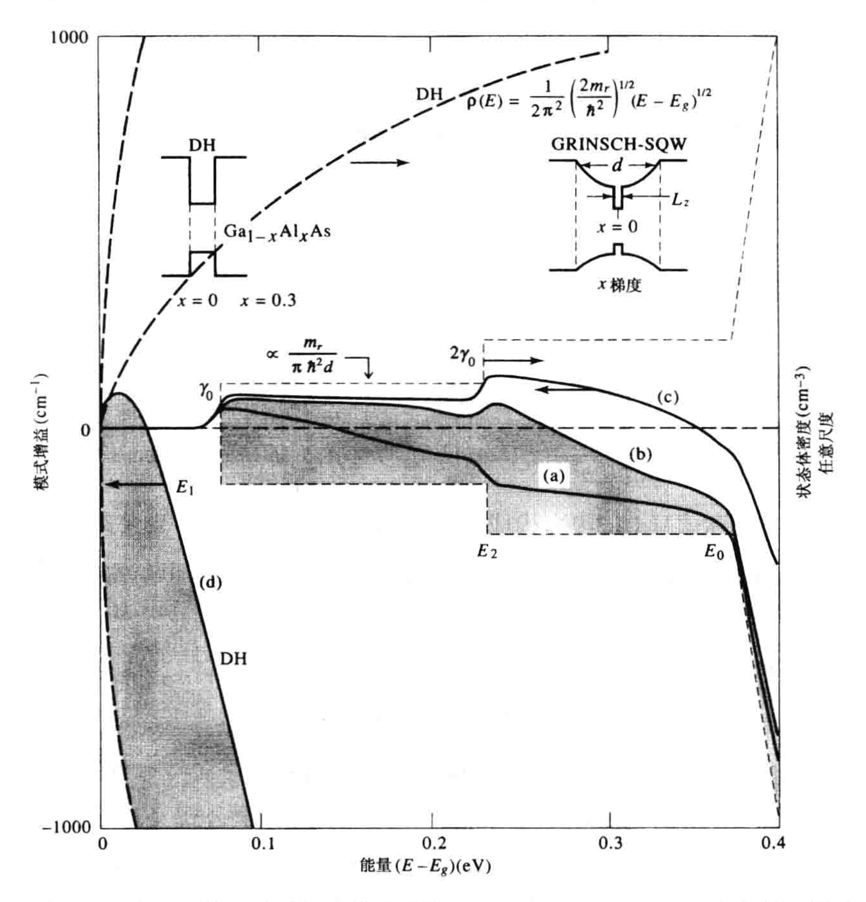


图 16.3　梯度折射率、分离限制性双异质结单量子阱激光器（GRINSCH-SQW）和普通双异质结（DH）激光器的增益（图中实心曲线）和联合态密度函数（图中虚线）曲线图。增益曲线（a），（b）和（c）对应连续增大的注入电流密度，曲线（d）用于表示与量子阱激光器曲线（a）有着相同电流密度的双异质结构（DH）激光器。为将量子阱激光器的态密度与体材料（DH）激光器的态密度进行比较，我们用光波限制距离的宽度 $w=4L_z$ 除以前者。这除了使它们的维数相同外，还使得两个曲线都与模式增益的（可获得的）最大值成正比（由加州技术学院的 D. Mehuys 先生提供）

求得的增益$\gamma(\omega_0)$表达式（16.2-9）适用于量子阱介质。一列对应于被完全地限制在量子

阱内的波的增益，如果量子阱厚度为典型的 50 Å< L_z< 100 Å，同时模式宽度（高度）为典型的 d～1000 Å，那么模式与模式相关的实际增益可以由公式（15.3-2）和式（15.3-3）给出

$$g_{模式} = \gamma \Gamma_a \approx \gamma \frac{L_z}{d} \tag{16.2-13}$$

当利用表达式（16.2-9）来求γ 时，我们发现在特定的载流子面密度时模式增益不受量子阱厚度 L_z 的影响而与模式宽度（高度）d 成反比。

多量子阱激光器

由于量子阱的厚度与模式宽度（高度）（典型的为 $L_z/d = 2 \times 10^{-2}$）相比较小，所以在实际中可以采用不止一个量子阱作为有源区。首先假设，总的电子反转数被平均分在各个量子阱内，而总的模式增益为各量子阱中模式增益之和。下面我们分析多量子阱激光器的优点，如图 16.4 所示，每个阱内的增益会因载流子密度以及电流增加而产生饱和现象，这是由于态密度所具有的平顶特性造成的；采用多量子阱，使每个阱能工作在其线性增益—电流区域内，因而会在给定的注入载流子总密度上获得最大的模式增益。这种作用也产生了一个较大的微分增益 $A \equiv \partial g/\partial N$，如在 15.5 节中所述的那样，从而形成一个更大的激光器调制带宽。图 16.5 显示了这一过程。我们看到特定激光器内最适宜的量子阱数目取决于在振荡时与激光器损耗相等所需的模式增益。根据图中所示，有效损耗常数为 $d_{有效} = \alpha - (1/L)\ln R$（$\alpha$ = 损耗常量，R 为镜面反射率），比方说 10 cm^{-1}，单（N=1）量子阱激光器具有最低的阈值电流。

指数式（模式）增益常数作为光子能量或者波长的函数的理论曲线如图 16.4 所示。参数为注入电流密度。有趣的是随着电流的增大，在较低光子能量上，增益趋于稳定，而且由于量子阱 $\ell = 2$ 的态上的载流子数，在电流更强时出现了第二个峰值。

图 16.6 所示为单个量子阱 GaAs/GaAlAs 激光器的层状结构。80 Å 宽的量子阱被梯度折射率区域所包围。这一梯度折射率（和梯度能量间隙）区域的生长是通过（如图所示的）将铝浓度逐渐由 0%变化到 60%来完成的。梯度区域起到了一个介质波导的作用同时又作为矢量子阱注入电子和空穴（图中未显示）的漏斗。

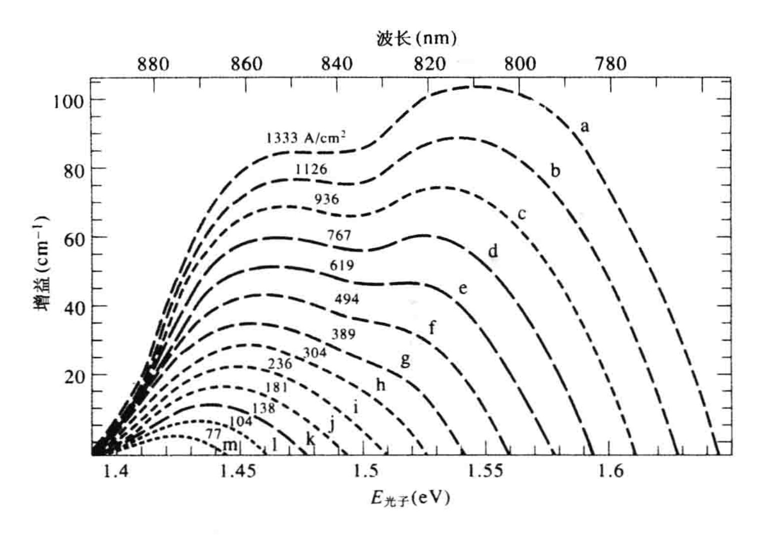


图 16.4　量子阱激光器的指数式（模式）增益常数与波长的理论关系曲线
（由加州技术学院的迈考尔· 密特尔斯塔恩先生（M. Mittelstein）提供）

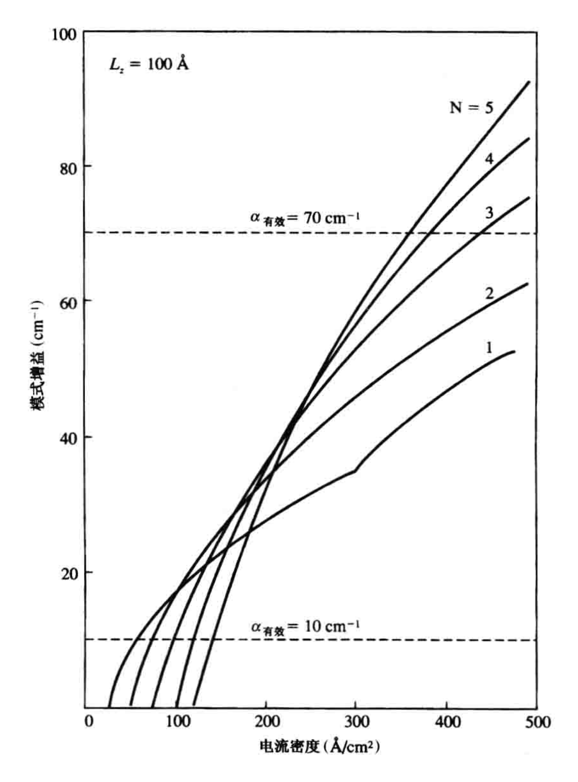


图 16.5　模式增益 $g_{模式}$ $(=\gamma\Gamma)$ 与注入电流的函数关系图，量子阱数 N 为参量（引自参考文献[8]）

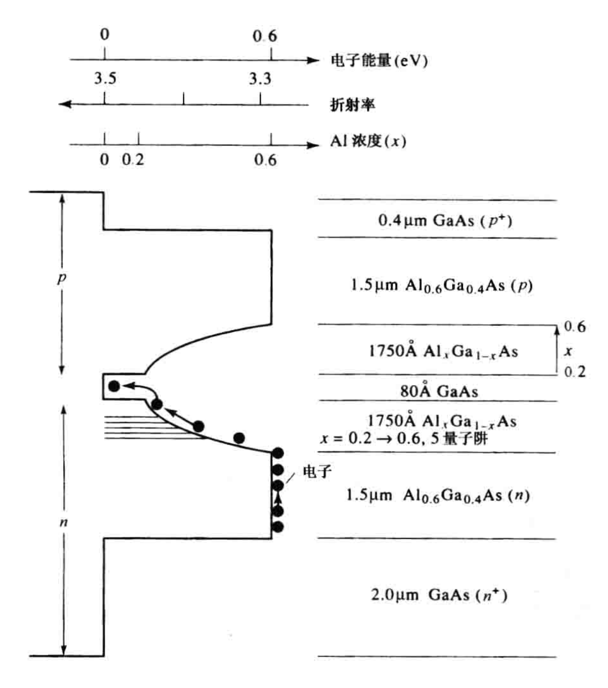


图 16.6　单量子阱、梯度折射率、分离限制性异质结激光器（GRINSCH）的导带边缘及掺杂的示意图（由加州技术学院的 H. Chen 先生提供）

16.3　分布反馈激光器

所有的激光振荡器都采用光反馈。这里反馈指的是确保通过某一个特定点的光场的一部分能够不断回到该点的一种方法。如果延迟等于光周期的整数倍，那么在有增益的情况下就会产生一个持续不变、自洽的振荡模式。在该模式中，任何时候受到原子激励的场都会相干且同相地加在那些早先已发射出去的场上。在本书至今已讨论过的激光共振腔内，反馈是由两个相对的反射器（法布里－珀罗激光器）构成的。反馈也可以在一列波的折叠式光路（如环形共振器）内产生。在分布反馈（DFB）激光器[9~11]中，由前向波的反射反馈为后向波（反之亦然），上述过程不仅在端面反射器上而且在整个共振腔内产生。这种耦合是由介质的折射率或其光增益的空间周期性调制引起的。这种激光器与普通的法布里—珀罗激光器相比因其波长的稳定性而具有很大的优越性。该稳定性的形成是基于这样一个事实：激光器模式易在某一频率上振荡以使折射率的空间周期Λ等于媒质（波导）中的波长二分之一的某一（通常较小）整数倍(ℓ)。

$$\Lambda = l\frac{\lambda_g}{2} \qquad l=1,\quad 2,\quad 3,\quad \cdots \tag{16.3-1}$$

而

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda}{n_{有效}} \tag{16.3-2}$$

式中β为波导内光场的传播常数，λ是真空中的波长，$n_{有效}$是波导中传播的模式的有效折射率。这种确保由周期性微扰的不同单位晶格上的反射同相地叠加的条件（16.3-1）叫做布拉格条件。这在形式上与晶体周期点阵的 X 射线衍射现象相类似。周期性介质波导的光学性质早在 12.5 节讨论过。布拉格条件式（16.3-1）等价于式（12.5-15）中$\Delta\beta=0$。式（16.3-1）使激光器的设计人员通过选择Λ以使激光器能够在预定的任意波长上产生振荡，其前提是放大介质能够在该波长上产生足够的增益。这一特性对用于光纤通信的半导体激光器来说特别重要。这种激光器通常需要工作在预定波长的狭窄区域，使由（群速度）色散引起的脉冲扩散最小化或者避免与位于同一光纤内但是波长不同的其他激光束产生串扰。在密集波分复用（DWDM）光网络中，不同激光器的频率间隔约为 100GHz。在这样的系统中，激光器的频率必须稳定，漂移量要小于几个 GHz。

分布反馈（DFB）激光器已在 12.6 节中简要讨论过。这里我们的进一步探讨先从推导相关的耦合模方程开始。DFB 激光器的本质在于一个空间周期性的增益波导。令z为波导传播轴方向；波导中的场有前向波（沿$+z$方向）和后向波（沿$-z$方向）组成。场可表示为

$$\boldsymbol{E}(z) = A(z)\boldsymbol{E}_0(x, y)\exp[i(\omega t - \beta z)] + B(z)\boldsymbol{E}_0(x, y)\exp[i(\omega t + \beta z)] \tag{16.3-3}$$

其中ω是频率，β是模式的传播常数，$A(z)$和$B(z)$是模式的振幅。这里我们假设前向波和后向波具有相同的空间模式$\boldsymbol{E}_0(x,y)$（通常是基模）。模式振幅与z的相关性反映出光波间的耦合。周期性介质波导已在第 12 章中讨论过。第 12 章中的结果可应用来讨论分布反馈激光器。在耦合方程中加上增益项，按照式（12.5-13）可得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A = -i\kappa B(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\Delta\beta z} + \gamma A$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}B = i\kappa^* A(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\Delta\beta z} - \gamma B \qquad (16.3\text{-}4)$$

式中 γ 是模式增益系数的振幅，相位失配量 $2\Delta\beta$ 可表示为

$$2\Delta\beta = 2\beta - \ell\frac{2\pi}{\Lambda} = 2n_{有效}\frac{2\pi}{\lambda} - \ell\frac{2\pi}{\Lambda} \equiv 2(\beta - \beta_0) \qquad (16.3\text{-}5)$$

耦合常数 κ 可表示为

$$\kappa = \frac{\omega}{4}\int \boldsymbol{E}_0^*(x, y)\cdot \varepsilon_\ell(x, y)\boldsymbol{E}_0(x, y)\,\mathrm{d}x \qquad (16.3\text{-}6)$$

式中 $\varepsilon_l(x, y)$ 是周期介质微扰的第 l 个傅里叶分量。一般的，耦合常数 κ 是复数。耦合常数的相位与原点（z=0）位置的选取有关。对于如图 12.22 所示的波纹周期波导，图中的原点的选择可使耦合常数 κ 为纯虚数，表示在式（12.5-11）和式（12.5-12）。当耦合常数 κ 趋于零，模式振幅为

$$A(z) = A(0)\mathrm{e}^{\gamma z}$$
$$B(z) = B(0)\mathrm{e}^{-\gamma z} \qquad (16.3\text{-}7)$$

这与增益介质中模式的线性放大一致。当 κ 为有限值，耦合方程可由新定义的 $A'(z)$ 和 $B'(z)$ 表示为

$$A(z) = A'(z)\mathrm{e}^{\gamma z}$$
$$B(z) = B'(z)\mathrm{e}^{-\gamma z} \qquad (16.3\text{-}8)$$

结果为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A' = -i\kappa B'(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2(\Delta\beta + i\gamma)z}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}B' = i\kappa^* A'(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2(\Delta\beta + i\gamma)z} \qquad (16.3\text{-}9)$$

用 $2(\Delta\beta + i\gamma)$ 替换 $\Delta\beta$，式（16.3-9）的形式类似于公式（12.5-13）。替换后，可以用公式（12.5-20）直接写出在周期介质波导中前向波 $A(z)=A'(z)e^{\gamma z}$（入射波）和后向波 $B(z)=B'(z)\mathrm{e}^{-\gamma z}$（反射波）的模式复振幅的解。假设单束模式振幅为 $A(0)$ 的光从左边（z=0）入射，后向波的边界条件为 $B(L)=0$。这样条件下模式振幅的可写为

$$A(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Delta\beta)z}\frac{S\cosh S(L-z) + i(\Delta\beta + i\gamma)\sinh S(L-z)}{S\cosh SL + i(\Delta\beta + i\gamma)\sinh SL}A(0)$$
$$B(z) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Delta\beta)z}\frac{-i\kappa^*\sinh S(L-z)}{S\cosh SL + i(\Delta\beta + i\gamma)\sinh SL}A(0) \qquad (16.3\text{-}10)$$

式中 S 和 $\Delta\beta$ 由下面的公式给出

$$S^2 = \kappa^*\kappa - (\Delta\beta + i\gamma)^2 = |\kappa|^2 + (\gamma - i\,\Delta\beta)^2 \qquad (16.3\text{-}11)$$

$$\Delta\beta = \beta(\omega) - \ell\frac{\pi}{\Lambda} \equiv [\beta(\omega) - \beta_0] \qquad (16.3\text{-}12)$$

这里，S 为复数这个事实，就决定了无源周期性波导行为式（12.5-20）与具有增益的周期性波导式（16.3-10）行为之间存在的定性差别。为说明这种差别，考虑满足下述条件

$$S\cosh SL + i(\Delta\beta + i\gamma)\sinh SL = 0 \tag{16.3-13}$$

时的情况。由式（16.3-10）可见，此时反射系率 $B(0)/A(0)$ 与透射率 $A(L)/A(0)$ 将变为无穷大。该器件起振荡器的作用，因为即使没有输入场[$A(0)=0$]，它仍然给出了有限的输出场 $B(0)$ 和 $A(L)$。因此式（16.3-13）成为分布反馈激光器的振荡条件。对于 $\gamma = 0$ 的情况，由式（12.5-20）可以看出，$|B(0)/A(0)| < 1$ 和 $|A(L)/A(0)| < 1$，这相当于没有内部增益的无源器件。当存在频率 ω_0 使 $\beta(\omega_0)=\beta_0$，那么 $\Delta\beta=[\beta(\omega_0)-\beta_0]=0$。这就是熟知的布拉格频率。按照式（16.3-5），布拉格频率可写为 $\omega_0=\pi c/(\Lambda n_{有效})$。当频率非常接近布拉格频率 ω_0（$\Delta\beta\cong 0$）且有足够高的增益常数 γ 使得式（16.3-10）几乎得以满足，则波导起了一个高增益放大器的作用。放大的功率既可产生于一个带有如下场增益的反射形式

$$\frac{B(0)}{A(0)} = \frac{-i\kappa^* \sinh SL}{S\cosh SL + i(\Delta\beta + i\gamma)\sinh SL} \tag{16.3-14}$$

也可产生于一个有如下增益的透射形式

$$\frac{A(L)}{A(0)} = e^{i\Delta\beta L}\frac{S}{S\cosh SL + i(\Delta\beta + i\gamma)\sinh SL} \tag{16.3-15}$$

高增益情况下的入射场和反射场的特性如图 16.7 所示。应该注意到这种情况与图 12.18 所示的无源（无增益）情况之间的定性差异。

图 16.8 画出了反射功率增益 $|B(0)/A(0)|^2$ 和透射功率增益 $|A(L)/A(0)|^2$ 随 $\Delta\beta$ 和 γ 变化的函数关系。其中每个图中含有四个无穷大增益的奇点，在这些点上满足振荡条件式（16.3-13），这就是激光器的四个纵模，也存在更高阶模但图中并未画出。

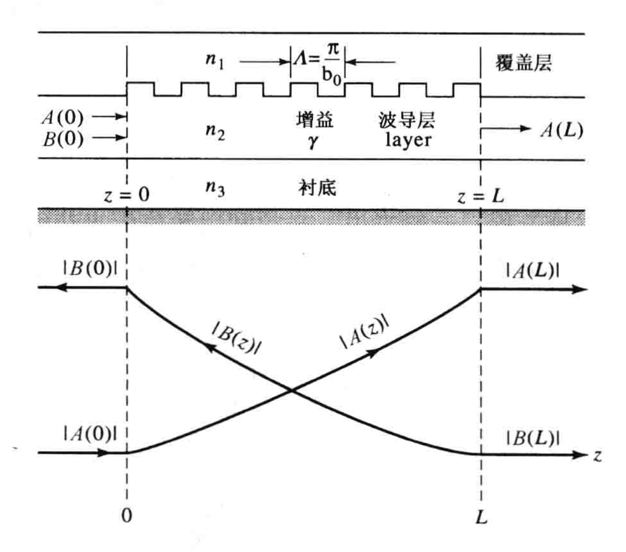


图 16.7　在有增益的周期性波导中的入射场和反射场

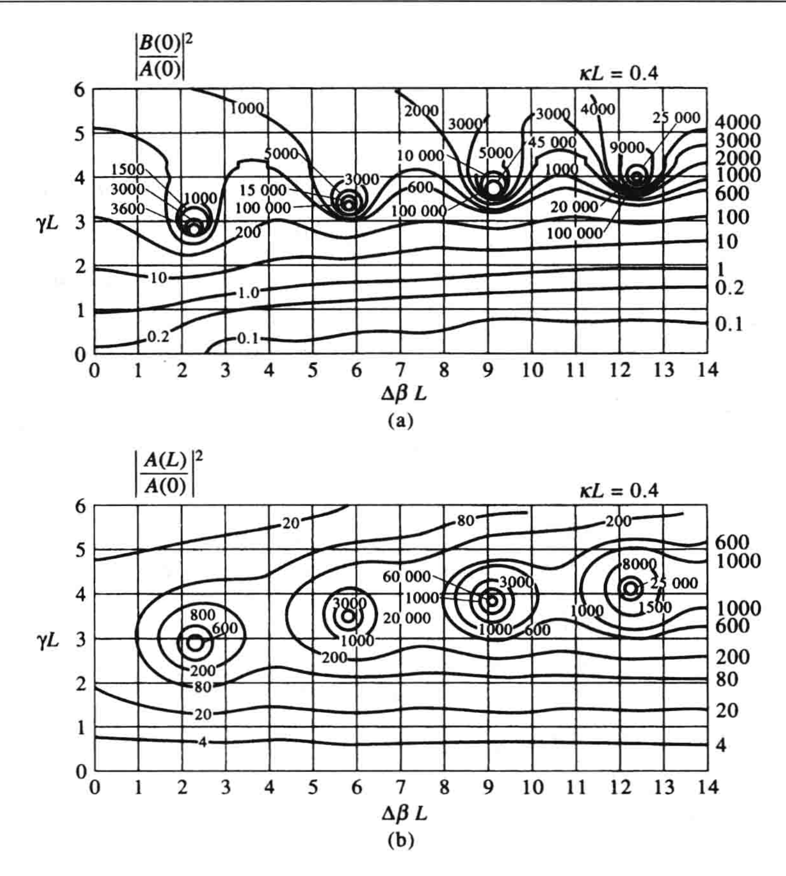


图 16.8　（a）在$\Delta\beta L-\gamma L$平面内的反射增益的等高线。$\Delta\beta$由式（16.3-12）定义并与频率$\omega_0\equiv\pi c/\Lambda n$的偏差成正比。由于在$\Delta\beta$上对称，所以只画出了一半（$\Delta\beta>0$）曲线。（b）透射增益的等高线（由 H. W. Yen 先生提供）

振荡条件

振荡条件式（16.3-13）可以写成

$$S+i(\Delta\beta+i\gamma)\tanh SL=0 \tag{16.3-16}$$

这是复变量$(\Delta\beta+i\gamma)$的超越方程。一般来说，必须利用数值解来获得振荡所需的$\Delta\beta$和γ的阈值[12]。尽管如此，在一些极限情况下，可以求得近似解。对于高增益$\gamma\gg\kappa$的情况下，由$S^2=\left|\kappa\right|^2+(\gamma-i\Delta\beta)^2$我们可得

$$S\approx(\gamma-i\,\Delta\beta)\left(1+\frac{|\kappa|^2}{2(\gamma-i\,\Delta\beta)^2}\right)\quad \gamma\gg|\kappa| \tag{16.3-17}$$

采用近似，振荡条件式（16.3-16）可变为

$$1-\tanh SL=-\frac{|\kappa|^2}{2(\gamma-i\,\Delta\beta)^2} \tag{16.3-18}$$

既然$\gamma\gg\left|\kappa\right|$，$\tanh SL$接近 1，所以可近似给出

$$\tanh SL\approx 1-2\mathrm{e}^{-2SL} \tag{16.3-19}$$

振荡条件式（16.3-16）则变为

$$\frac{4(\gamma - i\,\Delta\beta)^2}{|\kappa|^2}\,\mathrm{e}^{-2SL} = -1 \tag{16.3-20}$$

使式（16.3-20）两边的相位相等，可得

$$-2\tan^{-1}\frac{\Delta\beta}{\gamma} + 2\Delta\beta\,L - \frac{\Delta\beta\,L|\kappa|^2}{\gamma^2 + (\Delta\beta)^2} = (2m+1)\pi \tag{16.3-21}$$

式中 m 是整数。

对接近布拉格频率 ω_0（即当 $\Delta\beta = 0$ 时的频率）的振荡，当 $\gamma \gg |\Delta\beta|, |\kappa|$，这种极限情况下，振荡模的频率由下式决定

$$(\Delta\beta_m)L \cong \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \quad m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots \tag{16.3-22}$$

而且因为$\Delta\beta \equiv \beta - \beta_0 \approx (\omega - \omega_0)n_{有效}/c$，则

$$\omega_m = \omega_0 + (m + \frac{1}{2})\frac{\pi c}{n_{有效}L} \tag{16.3-23}$$

应注意，在准确的布拉格频率ω_0 处并不产生振荡。模式的频率间隔为

$$\omega_{m+1} - \omega_m \approx \frac{\pi c}{n_{有效}L} \tag{16.3-24}$$

该间隔近似地与一个长度为 L 的两块反射镜构成的共振腔相同。

令式（16.3-20）两边的振幅相等，可求得增益阈值γ_m 的表达式。这就导出下式

$$\frac{\mathrm{e}^{2\gamma_m L}}{\gamma_m^2 + (\Delta\beta)_m^2} = \frac{4}{|\kappa|^2} \tag{16.3-25}$$

上式表明，增益阈值γ_m 会随模式数 m 的增加而增大（即按式（16.3-22），$\Delta\beta_m$ 增加）。这也从数值增益曲线（图 16.8）来看，也是很明显的。由式（16.3-25）得出的一个重要特性是，$|\omega - \omega_0|$或者$|\Delta\beta|$的值相同的模式的阈值增益也是相同的。因此阈值最低的两个模式分别位于ω_0 的两边。DFB 激光器的这种特点通常并不受欢迎。本节最后一部分将论述 DFB 激光器单模运行的方法。高速率（数据速率）光纤通信要求光源工作在单一频率上以减小随着距离而增加的光脉冲的展宽，这种现象是群速度色散造成的。半导体 DFB 激光器内的周期性微扰可以通过以一个波纹界面的形式在激光器结构里设置一个光栅来实现。这需要在适当的阶段中断晶体的生长，用一个由干涉方法而产生的光学模板通过湿化学刻蚀法在最高层上刻出光栅来。在波纹表面生长一层不同的折射率的材料或者能够产生光吸收的层，可以达到理想的空间调制。

图 16.9 为一个采用 GaAs/GaAlAs 结构的分布反馈激光器的示意图。波导层和产生增益的层（有源层）都是 p 型 GaAs 层。反馈是通过 p 型 $Ga_{0.93}Al_{0.07}As$ 和 p 型 $Ga_{0.7}Al_{0.3}As$ 之间的波纹界面形成的，主折射率的不连续性导致导波的形成。图 16.12 给出了一个周期性增益光栅的例子。该例子中的激光器采用四元 $Ga_{1-x}In_xAs_{1-y}P_y$ 作为其有源区，InP 作为其高能量间隙和低折射率限制层。其反馈可以通过生长一个额外吸收的，即低能隙层并用一个模板刻出一些周期性排列的吸收岛来产生。

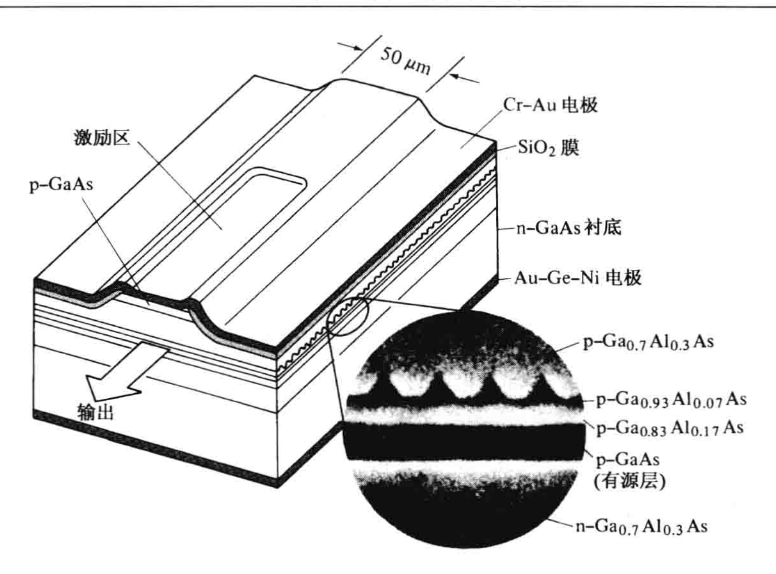


图 16.9　一个具有波纹状界面的 GaAs/GaAlAs 连续注入式激光器。插图部分为该层状结构的扫描电子显微镜照片。其反馈位于第三级（$\ell=3$）并由周期为$\Lambda = 3\lambda_g/2 = 0.345\mu m$ 的光栅形成。（0.2μm）p 型 $Ga_{0.83}Al_{0.17}As$ 薄层产生一个势垒将注入电子限制在有源（p 型 GaAs）层从而增大了增益（引自参考文献[11]）

由式（16.3-25）以及图 16.8 预期的阈值增益随纵向模式指数 m 的增大而增加，在分布反馈激光器内的高阶模中可以明显地看出。

根据式（16.3-23）和式（16.3-25），两个最低阈值的模式，分别对应 $m = 0$ 和 $m = -1$，它们对称地处在能隙外布拉格频率ω_0的两边（也可见图 12.29）。

为了弄清图 16.7 中带有空间周期性折射率的基本的 DFB 激光器并不在布拉格频率上产生振荡的原因，考虑图 16.10（a）中的情形。为方便起见，选择如图所示的原点 $z = 0$。令一列在 $z=0$ 面上由左方（$z<0$）入射波的反射系数为 r_2，从右方入射波的反射系数为 r_1。根据式（16.3-14），反射率 r_2 由下式得出

$$r_2 = \frac{-i\kappa^* \sinh SL_1}{S\cosh SL_1 + i(\Delta\beta + i\gamma)\sinh SL_1} \tag{16.3-26}$$

式中

$$S = \sqrt{\kappa^2 + (\gamma - i\Delta\beta)^2}$$

$$\Delta\beta = \frac{\omega}{c}n_{有效} - \ell\frac{\pi}{\Lambda} = (\omega - \omega_0)\frac{n_{有效}}{c} \tag{16.3-27}$$

式中κ是耦合常数，γ 是模式振幅增益系数，L_1 是周期波导中原点以右（$0 < z$）的部分。早在前面已提到，复数形式的耦合常数κ的相位与原点的选取有关。如图 16.10 所示的原点的选取导致耦合常数是实数（即 $\kappa^* = \kappa$）。向左边“看”，反射系数 r_1 可通过解边界条件为 $A(-L_2)=0$ 和 $z = 0$ 处输入 $B(0)$ 为有限值的耦合方程而得到。这种情形下，反射系数定义为 $A(0)/B(0)$。利用公式（12.7-4），用 $2(\Delta\beta + i\gamma)$ 替换 $\Delta\beta$，仍有 $A(-L_2)=0$，可得

$$r_1 = \frac{-i\kappa \sinh SL_2}{S\cosh SL_2 + i(\Delta\beta + i\gamma)\sinh SL_2} \tag{16.3-28}$$

在布拉格频率（光子能隙的中心）ω_0，$\Delta\beta = 0$，这两个模式振幅反射系数为

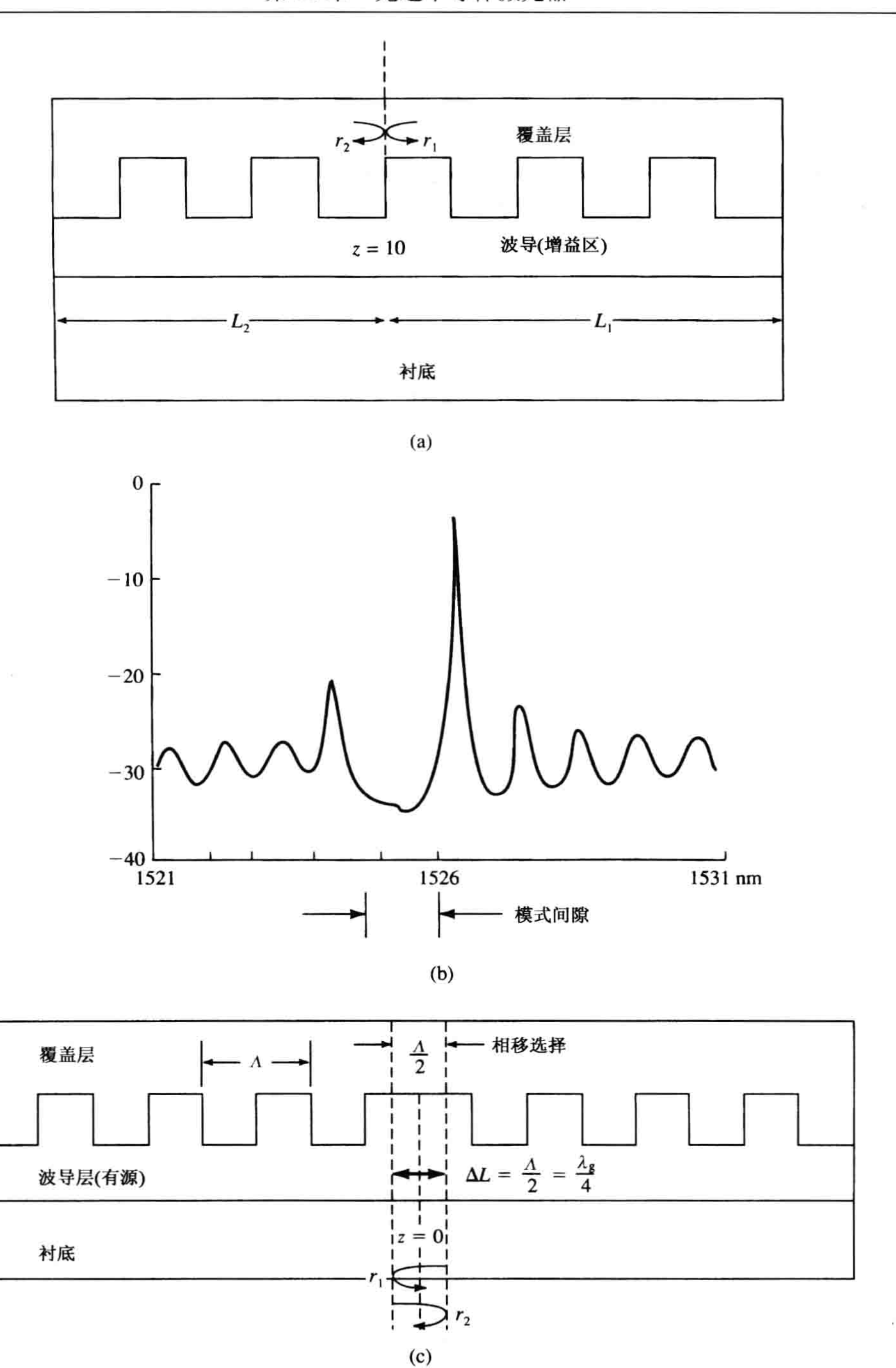
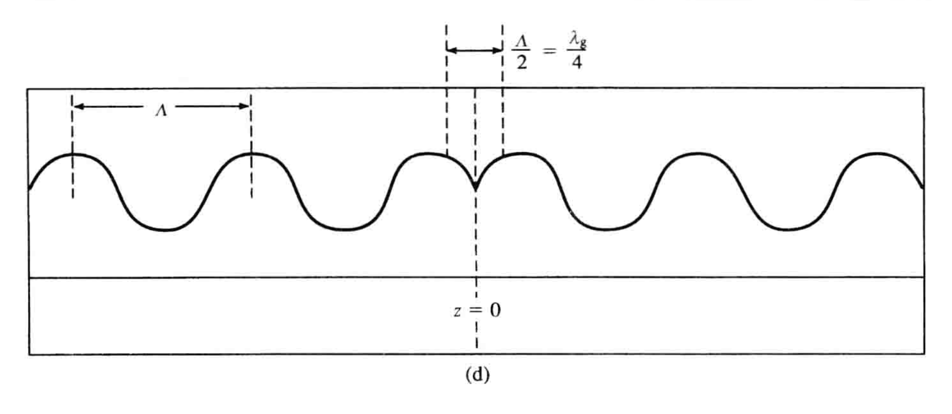
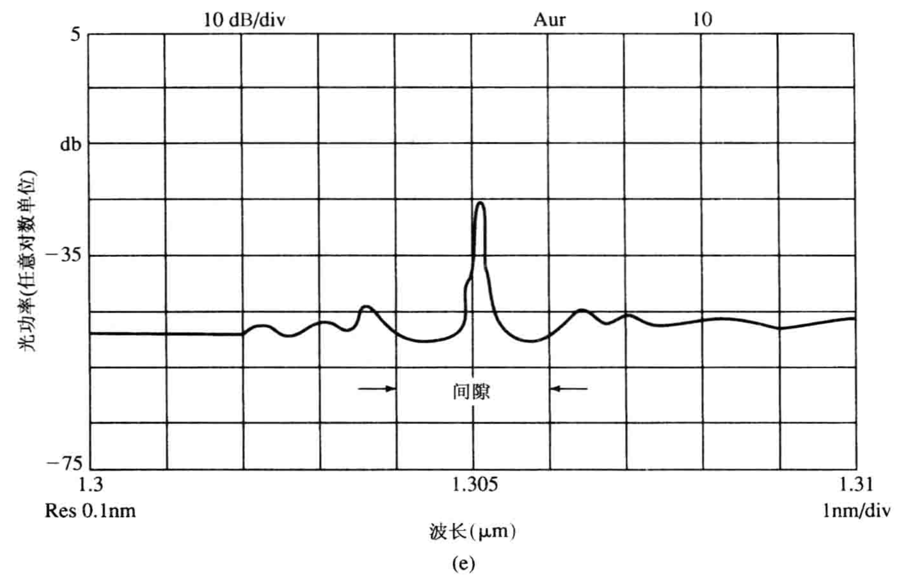


图 16.10　一个用来推导方程式（16.3-14）和式（16.3-15）的周期性波导模型。（a）一个周期性（DFB）GaInAsP 波导激光器。原点 z=0 位于短划线处。（b）低于阈值且在阈值附近、有模式间隙的 DFB 激光器的自发辐射光谱。（c）一个带有相移的 DFB 激光器。（d）一个“四分之一波长相移”（λ/4）的 DFB 激光器。（e）低于阈值的λ/4-相移 DFB 激光器的自辐射光谱（由 ORTEL 公司的 P. C. Chen 先生提供）



(d)



(e)

图 16.10（续）

$$r_1 = \frac{-i\kappa \sinh SL_2}{S\cosh SL_2 - \gamma \sinh SL_2}$$
$$r_2 = \frac{-i\kappa^* \sinh SL_1}{S\cosh SL_1 - \gamma \sinh SL_1} \tag{16.3-29}$$

其乘积为

$$r_1 r_2 = \frac{-\kappa^*\kappa \sinh SL_1 \sinh SL_2}{(S\cosh SL_2 - \gamma \sinh SL_2)(S\cosh SL_1 - \gamma \sinh SL_1)} \tag{16.3-30}$$

这个结果与原点（z=0）的选取无关。验看式（16.3-30）发现分母是正的实数，S 和 γ 都是实数。

这样在布拉格频率（$\Delta B = 0$）处，$r_1 r_2$ =负数。另外，激光器的振荡条件为

$$r_1(\omega) r_2(\omega) = 1 \tag{16.3-31}$$

根据上面的论述，周期性折射率 DFB 激光器不能在$\Delta\beta$=0 的布拉格频率ω_0 上产生振荡。振荡条件式（16.3-31）已在第 6 章讨论过。这是一个较为复杂的说法，即在稳态上，其振荡

条件相当于要求一列向右发射的波在一次往返后以相同的振幅和相位（以 $m2\pi$为模）返回。事实上，如果分别用式（16.3-26）和式（16.3-28）中给出的 r_1 和 r_2 的表达式代入，条件式（16.3-31）与式（16.3-16）一致（见习题 16.7）。

因此振荡只能在如图 16.8 所示的对称分布的频率上进行。根据式（16.3-23），最接近布拉格频率且增益要求最低的的两个振荡频率可表示为

$$\omega = \omega_0 \pm \frac{\pi c}{2n_{有效}L} \tag{16.3-32}$$

根据式（16.3-25）和图 16.8，在这两个频率上振荡的阈值增益是相等的，因此在实际运行时它们具有相同的振荡可能性。这种情形在实际使用时是不受欢迎的，因为它会引起波长的不稳定性和光谱加宽。这对于例如长距离的高数据速率光纤通信来说是不能满足要求的。因为在这种情形中，由多波长振荡引起的光谱宽度的增宽已在第 3 章讨论过，由群速度色散引起的脉冲展宽将限制数据传输速率。

图 16.10（b）的光谱中显示了这两种振荡波长，即位于“间隙”两边的两个波峰。

图 16.10（c）和 16.10（d）描述了迫使 DFB 激光器在模间隙单个频率上振荡的广为使用的方法[13]。在激光器的中心插入了一个长度为$\lambda_g/4$ 的额外部分（λ_g 为导波波长，$\lambda_g = \lambda / n_{有效}$）。由中间平面分别面向左边和右边的模式振幅反射系数 r_1 和 r_2 现在可由其原来的值[即与图 16.10（a）中对应值]再乘以 $\exp[-i(\pi/2)]$后得到，这是由于在$\lambda_g/4$ 部分内产生了增加的传输延迟。在$\omega = \omega_0\,(\Delta\beta = 0)$时，$r_1$ 变为 $r_1\exp[-i(\pi/2)]$而 r_2 变为 $r_2\exp[-i(\pi/2)]$。这两个反射系数 $r_1' r_2'$ 的乘积现在变为正数$-r_1 r_2$。这样就有可能在ω_0 上产生振荡。图 16.10（e）描述了这种情况。

增益耦合分布反馈激光器

在另外一种分布反馈激光器中，周期性调制的不是折射率的而是介质增益或损耗[14]。为了分析这种情况，我们来回想一下，可以将介质的介电常数ε 作为复数以表示增益或损耗。很容易证明（见习题 16.6）ε 可以表示为

$$\varepsilon = \varepsilon_0 n^2 \left(1 + i\frac{2\gamma}{k_0 n}\right) \tag{16.3-33}$$

式中 $k_0 = 2\pi/\lambda = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_0}$，$n$ 是折射率，而且$\gamma \ll k_0$为场振幅的指数式增益常数。在一个损耗介质内，$\gamma<0$。

在 n 和γ都有周期性的情况下，有如下表达式

$$n(z) = n_0 + n_1 \cos\frac{2\pi}{\Lambda}z$$
$$\gamma(z) = \gamma_0 + \gamma_1 \cos\frac{2\pi}{\Lambda}z \tag{16.3-34}$$

式中 n_0，n_1，γ_0 和 γ_1 是常数，Λ 是周期性调制的周期。在仅限于 $n_1 \ll n_0$ 且 $\gamma_1 \ll \gamma_0$ 的情况下，按照式（16.3-33）我们有

$$\omega^2\mu\varepsilon(z) = \left[k_0^2 n_0^2 + i2k_0 n_0\gamma_0 + 4k_0 n_0\left(\frac{\pi n_1}{\lambda} + i\frac{\gamma_1}{2}\right)\cos\frac{2\pi}{\Lambda}z\right] \tag{16.3-35}$$

或等价为

$$n(z)=n_0+i\frac{\gamma_0}{k_0}+\left(n_1+i\frac{\gamma_1}{k_0}\right)\cos\frac{2\pi}{\Lambda}z \tag{16.3-36}$$

耦合模方程式（16.3-4）是基于实周期介质微扰得出的。当出现如式（16.3-36）所示的周期性增一条纸，耦合模方程可用相同的方式推出（见 12.4 节）。可给出

$$\begin{aligned}A(z)&=A(0)\mathrm{e}^{\gamma z}\\ B(z)&=B(0)\mathrm{e}^{-\gamma z}\end{aligned} \tag{16.3-37}$$

式中耦合常数可表示为

$$\kappa=\frac{\pi}{\lambda}\left(n_1+i\frac{\gamma_1}{k_0}\right)=\frac{\pi n_1}{\lambda}+i\frac{\gamma_1}{2} \tag{16.3-38}$$

当$\gamma_0=\gamma_1=0$时，耦合模方程（16.3-37）可简化为式（12.4-46）。我们可将式（16.3-38）看做式（12.4-63）的推广式。此情形下，方程的解可表示为

$$\begin{aligned}r_1&=\frac{-i\kappa\sinh SL_2}{S\cosh SL_2+i(\Delta\beta+i\gamma_0)\sinh SL_2}\\ r_2&=\frac{-i\kappa\sinh SL_1}{S\cosh SL_1+i(\Delta\beta+i\gamma_0)\sinh SL_1}\end{aligned} \tag{16.3-39}$$

式中

$$S=\sqrt{\kappa^2+(\gamma_0-i\,\Delta\beta)^2}=\sqrt{\left(\frac{\pi n_1}{\lambda}+i\frac{\gamma_1}{2}\right)^2+(\gamma_0-i\,\Delta\beta)^2} \tag{16.3-40}$$

现在考虑纯增益调制（即$\gamma_1\neq0$且$n_1=0$）的特殊情形。在布拉格频率ω_0处$\Delta\beta=0$，这两个反射系数变为

$$\begin{aligned}r_1&=\frac{-i\kappa\sinh SL_2}{S\cosh SL_2-\gamma_0\sinh SL_2}\\ r_2&=\frac{-i\kappa\sinh SL_1}{S\cosh SL_1-\gamma_0\sinh SL_1}\end{aligned}\quad(\omega=\omega_0) \tag{16.3-41}$$

式中κ为纯虚数，$\kappa=i\gamma_1/2$；S变为正实数，$S=\sqrt{\gamma_0^2+(\gamma_1/2)^2}$。验看反射系数式（16.3-41），式中的分母为正。由此r_1r_2的乘积在频率ω_0处变为正数。这时激光器就可以在准确的布拉格频率ω_0上产生振荡了。如果画出$|r^2|$随$\Delta\beta$变化的关系曲线来表示这种情况（纯增益调制），就可以得到如图 16.11（a）所示的结果。为了进行对比，我们在图 16.11（b）中给出了在折射率调制情况下的$|r^2|$随$\Delta\beta$变化的关系曲线，图中显示了关于ω_0对称的两个振荡模。图 16.11（c）所示为一个耦合增益激光器的实验振荡光谱。它说明了对更高阶模式的强烈抑制作用。

一个商用的耦合增益 DFB 激光器的横截面如图 16.12 所示。其增益的周期性调制是通过一个靠近有源区的吸收层的光刻皱纹实现的[14]。为此目的，该层与外延生长的激光器结构结合在一起。外延生长的其他层将周期性损耗层“掩埋”了起来。

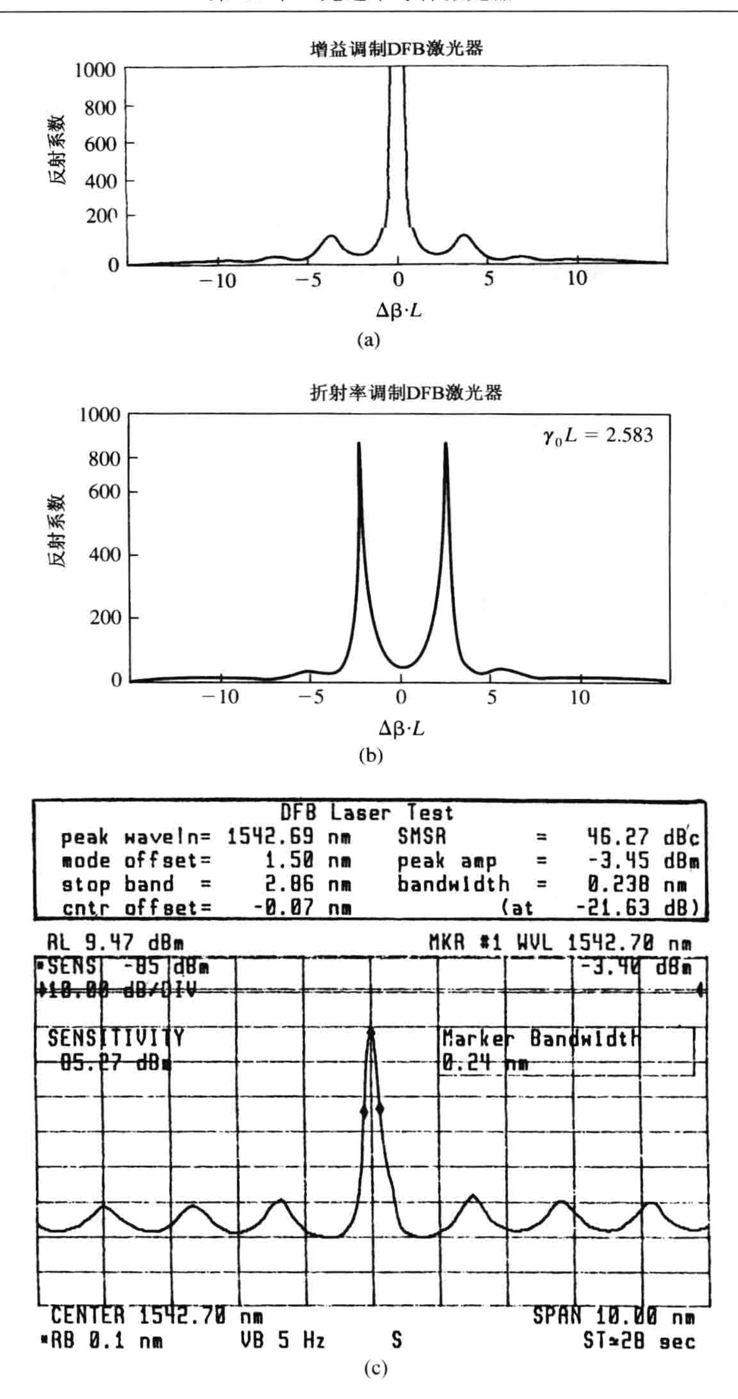


图 16.11　(a)具有增益为$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 \sin(2\pi/\Lambda)z$ 波导的反射系数$|E_r(0)/E_i(0)|^2$的理论曲线。(b)具有增益 $\gamma = \gamma_0$，$n = n_0 + n_1 \sin(2\pi/\Lambda)z$ 的折射率调制波导的反射系数$|E_r(0)/E_i(0)|^2$的理论曲线。(c)带有增益耦合，λ=1.5427μm 的 GaInAsP 分布式反馈激光器的测量振荡光谱。在布拉格波长上存在单个的振荡模式。与基模的输出功率相比，高阶的模式由于存在一个>45 dB（即> 32000）的因子其输出功率已被降低。((a)和(b)由加利福尼亚技术研究所的 M. Mc Adam 先生提供，(c)由 ORTEL 公司的 P. C Chen 博士提供）

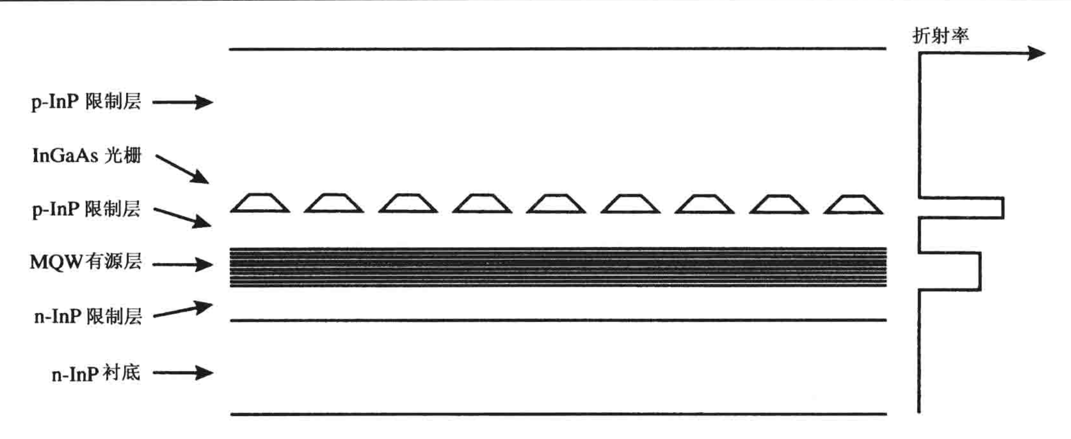


图 16.12　周期性损耗层，即能量间隙小于 $\hbar\omega_{振荡}$ 的层在一个半导体 DFB 激光器内产生了周期性增益耦合（由 ORTEL 公司的 P. C. Chen 博士提供）

16.4 垂直腔表面发射半导体激光器

垂直腔表面发射半导体激光器（VCSELs）与其他普通半导体激光器的不同之处在于光束以直角投射到有源区而不是平行于有源区平面[15]。我们知道有源层通常是厚度仅为几百纳米的薄层，图 16.13 是一个典型的 VCSEL 结构。VCSEL 由两个布拉格反射器夹着一层有源层而构成。在垂直方向的激光光腔由这两个布拉格反射器组成。顶端和底端的反射器分别由不同的 x 和 y 组分的 $GaIn_xAl_yAs_{1-x-y}$ 半导体材料交替构成。邻近"层"之间折射率上的差异引起了在布拉格频率ω_0 的邻近区域的强反射（>99%）。对于理想的反射镜，这些薄层通常由四分之一波长层交替构成。每一层的厚度为 $\lambda/4n$，其中 n 为每一层的折射率。镜面层沿着激光器中其他层外延生长而成。激光器的偏置电流依次通过镜面层重掺杂，从而减少了串联电阻。增益由位于最大的驻波模式附近的少数的，一般为 1 到 4，量子阱产生并使进入振荡场的受激辐射率达到最大。跨在有源区两侧的区域，②和③的总长度的典型值 $L=\lambda'$，λ' 为介质内的波长（$\lambda'=\lambda/n$，其中 n 是折射率）。在接近λ=1μm 时 L=0.3μm。典型的模式直径为 3～10μm 的范围内，包含 15 个$\lambda/4$ 层的典型布拉格堆的厚度为 2μm。

图 16.14 所示为一个垂直腔激光器内的场分布图。我们注意到在布拉格镜内光波的振幅呈指数性衰减。这与方程式（12.4-49）、图 12.18 相一致，图中描述了在位于"禁止"频率间隙[12]中的光频率在周期性介质内光波的很快衰减。

因为在放大性介质内的传播距离 L_z 较短（近似为每量子阱 100 Å），每通过一个阱获得的增益都很小，但布拉格镜极高的反射系数（>99%）以及在区域②和③内极低的损耗使得激光器的振荡成为可能。图 16.14 显示了主要层厚度的相对比例。

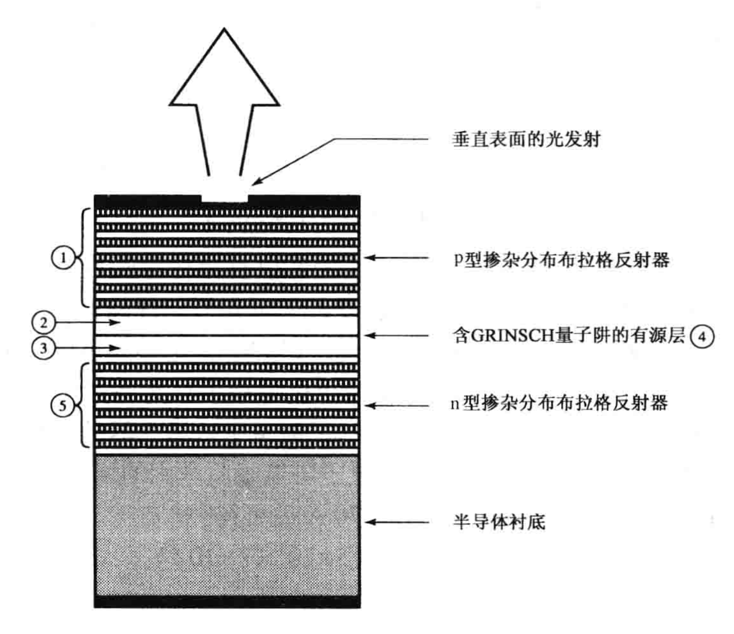


图 16.13　一个基于 GaInAlAs 合金材料的垂直腔表面发射半导体激光器横截面的示意图

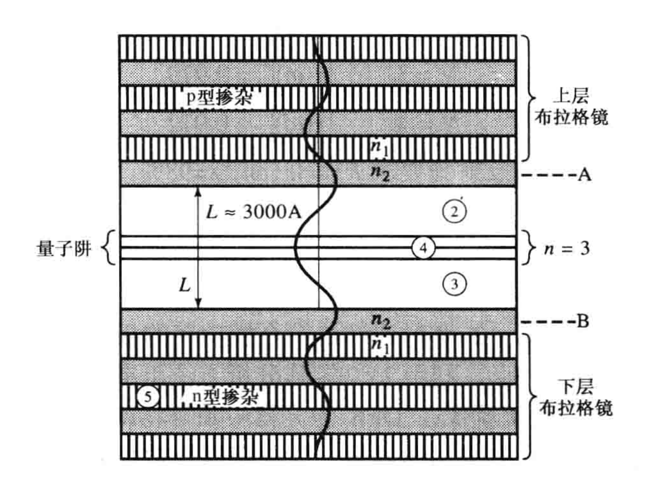


图 16.14　具有三个量子阱长度 $L=\lambda/n$ 的垂直腔激光器内激光模式的场分布。注意在布拉格反射镜内光场的包络很快地衰减以及位于两镜之间的振幅为常数的驻波

垂直腔激光器的振荡条件

可以将 VCSEL 的振荡条件表示如下

$$r_1(\omega)r_2(\omega)\exp\left(2\sum_{m=1}^{N}\gamma_m(\omega)L_z - i2\frac{\omega}{c}nL\right) = 1 \qquad (16.4\text{-}1)$$

式中 r_1（ω）和 r_2（ω）是布拉格反射镜的振幅反射系数，γ_m 是第 m 个量子阱的振幅增益系数，N 是量子阱的个数，L_z 是每个量子阱的宽度，L 是光腔长度（即两个布拉格反射镜的间距），n 是沿光程光腔中介质的平均折射率。式（16.4-1）与式（6.1-12）中所描述的法布里激光器的振荡条件所一致。式（16.4-1）表明一列波在经过一次往返后重新回到其任意的起始

平面上时，该波的振幅相同，而且相位的改变为 2π的整数倍，即同相。指数中的因子 2 对应于光腔中的一次往返。

假定每一个量子阱同等地使增益增大，使得 $\sum_{m=1}^{N}\gamma_m(\omega)L_z \equiv N\gamma(\omega)L_z$。我们也令两个布拉格发射镜相同 $r_1(\omega)=r_2(\omega)=r(\omega)$。将上述假设代入式（16.4-1），可得

$$|r(\omega)|^2=\exp(-2N\gamma(\omega)L_z) \tag{16.4-2}$$

这是满足振荡所需的反射镜的反射率。因为光波以直角传播到量子阱的平面上，所以增益 γ 不是式（16.2-13）的模式增益 $g_{模式}$ 而是一个量子阱介质的体增益 γ。我们注意到，根据式（16.2-9）乘积 $\gamma(\omega)L_z$ 不随 L_z 的变化而变化。（这当 L_z 足够的小以致由量子阱内的受激状态（$\ell>1$，见式（16.1-6））所产生的增益增量可以忽略不计时是完全正确的。在实际中，该情况可以在 $L_z<70$ Å 时的室温下实现。根据边发射量子阱激光器的实验数据，可以确定对于 $L_z=70$ Å 来说，由具有最大反转数的 $\ell=1$ 量子阱能级所产生的增益最大值为 $\gamma(\omega_0)=5\times10^3\ \text{cm}^{-1}$。在式（16.4-2）中利用该值并取 $L_z=70$ Å 后可得

$$\left|r(\omega)\right|^2=\exp[-2N\times5\times10^3\times7\times10^{-7}]$$

则振荡所需的反射率为

$$N=1,\quad \left|r(\omega)\right|^2=0.993$$
$$N=2,\quad \left|r(\omega)\right|^2=0.986$$
$$N=3,\quad \left|r(\omega)\right|^2=0.979$$
$$N=4,\quad \left|r(\omega)\right|^2=0.972$$

式中 N 是量子阱数目而布拉格反射镜要求 $R(\equiv|r(\omega)|^2)=98\%$。下面我们将讨论 VCSELs 中的反射镜的光学性质。

布拉格镜

有关布拉格镜的分析是第 12 章讨论过的耦合模功率的极好的例子。当反射镜由折射率不同的两层材料交替构成的情形，利用 2×2 矩阵分析方法可准确地推出反射镜的反射率（见 12.2 节）。折射率的周期性微扰就像在 DFB 激光器中那样将两列向相反方向传播的波耦合起来。用耦合模方程式（12.4-46）来描述耦合。为获得耦合常数 κ，将布拉格反射镜的介电常数写为

$$\varepsilon(x,y,z)=\varepsilon_0 n^2(x,y,z)=\tfrac{1}{2}(n_1^2+n_2^2)\varepsilon_0+\tfrac{1}{2}(n_2^2-n_1^2)\varepsilon_0 f(z) \tag{16.4-3}$$

式中 n_1，n_2 是两个交替层的折射率，$f(z)$ 是单位振幅的周期性方波函数，定义为

$$f(z)=\begin{cases}1, & 0<z<\Lambda/2\\ -1, & \Lambda/2<z<\Lambda\end{cases} \tag{16.4-4}$$

单位振幅的周期性方波函数可写为傅里叶级数

$$f(z)=\sum_{\ell} a_\ell \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ell\frac{2\pi}{\Lambda}z},\quad a_\ell=i\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\ell}}{\ell\pi}=i\frac{1-\cos(\ell\pi)}{\ell\pi} \tag{16.4-5}$$

我们将式（16.4-3）中的第二项看做介电常数的微扰 $\Delta\varepsilon$

$$\Delta\varepsilon(x, y, z) = \sum_{\ell \neq 0} \varepsilon_\ell(x, y) \exp\left(-i\ell \frac{2\pi}{\Lambda} z\right) \tag{16.4-6}$$

介电常数的微扰的傅里叶系列展开式中第 ℓ 项可写为

$$\varepsilon_\ell = i\varepsilon_0 \frac{1 - \cos(\ell\pi)}{\ell\pi} \frac{1}{2}(n_1^2 - n_2^2) \tag{16.4-7}$$

基于 12.4 节的讨论，按照式（12.4-27）和式（12.4-29），耦合常数可写为

$$\kappa = \frac{\omega^2\mu}{2\bar{n}k_0}\varepsilon_\ell = i\frac{\omega^2\mu\varepsilon_0}{4\bar{n}k_0}\frac{1 - \cos(\ell\pi)}{\ell\pi}(n_2^2 - n_1^2) \tag{16.4-8}$$

式中 $k_0 = \omega / c$，$\bar{n} = \sqrt{n_1^2 + n_2^2} / \sqrt{2}$ 是布拉格镜的平均折射率。当 $\ell = 1$ 时可得

$$\kappa = i\frac{\sqrt{2}}{\lambda}\frac{(n_2^2 - n_1^2)}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \tag{16.4-9}$$

当 $n_1 \approx n_2$ 时，耦合常数可写为

$$\kappa = i\frac{2\Delta n}{\lambda} \tag{16.4-10}$$

式中 $\Delta n = n_2 - n_1$ 是相邻层的折射率差。按照式（12.4-52）在布拉格频率处反射镜的反射率可表示为

$$R(\omega_0) = |r(\omega_0)|^2 = \tanh^2|\kappa L_m| \tag{16.4-11}$$

式中 L_m 是布拉格镜中交替的薄层的总厚度。

为了获取典型的布拉格镜的反射系数的数量级，将设计一个工作在中心波长 λ_0= 0.875 μm 的布拉格镜。基本单元包括一组外延生长的 $Ga_{0.8}Al_{0.2}As$ 和 AlAs 层。折射率差为 $\Delta n = n_{Ga_{0.8}Al_{0.2}As} - n_{AlAs} = 0.55$。平均折射率为 $n = 3.3$。因为一个基本单元的厚度为 $\lambda_0 /2n$，所以周期数为 N_m 的布拉格镜的长度为 $L = N_m\lambda_0 /2n$。在 $N_m = 15$ 的情况下，结果为

$$R(\omega_0) = |r(\omega_0)|^2 = \tanh^2\left(N_m \frac{\Delta n}{n}\right) = \tanh^2\left(\frac{15\times 0.55}{3.3}\right) = 0.973$$

根据式（16.4-2）后的讨论该值能够满足四个以上的反转（$N\geqslant 4$）量子阱的垂直腔激光器的振荡条件。

当频率接近布拉格频率，按照式（12.4-53），可得出振幅反射系数为

$$r(\omega) = \frac{-i\kappa^* \sinh sL}{s\cosh sL + i\,\Delta\beta \sinh sL} \tag{16.4-12}$$

其中

$$2\Delta\beta = 2\beta - \ell\frac{2\pi}{\Lambda} = 2\bar{n}\,\frac{2\pi}{\lambda} - \ell\frac{2\pi}{\Lambda} \equiv 2(\beta - \beta_0) \tag{16.4-13}$$

$$s^2 = \kappa^*\kappa - (\Delta\beta)^2 \tag{16.4-14}$$

图 16.15（a）所示为基于式（16.4-12）的反射系数 $|r(\omega)|^2$ 以及上述例子中实验参数的示意图。图 16.15（b）所示为有着相同参数的布拉格镜的反射系数实验曲线。复反射系数 $r(\omega) = |r(\omega)| \exp(-i\phi(\omega))$ 的相移 $\phi(\omega)$ 如图 16.15（c）所示。假设 $\Delta n < 0$，布拉格频率处的振幅反射系数 $r(\omega_0)$ 是实数且为正（$\phi(\omega_0) = 0$）。如果要更多地了解有关布拉格镜以及分层介质内光波传播的知识，读者可以参考 12.2 节和参考文献[12]。

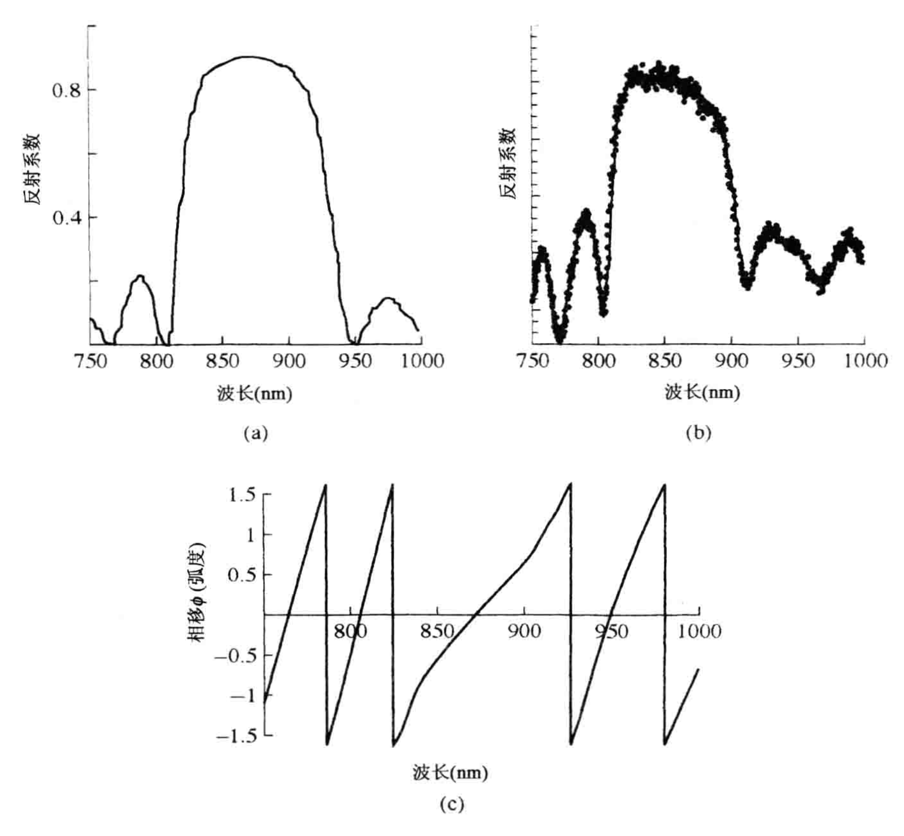


图 16.15　一个具有 15 个周期 $Al_{0.2}Ga_{0.8}As/AlAs$ 分布布拉格反射镜的(a)计算和(b)测量所得的反射系数分布曲线。(c)（见图 12.27 和 12.6 节中的讨论）（由加利福尼亚技术研究所的 J. Obrien 先生提供）

振荡频率

式（16.4-1）的相位部分是用来得出有关表面发射布拉格镜激光器振荡频率的。为简便起见，假设相同的两个布拉格镜，存在 $r_1(\omega)=r_2(\omega)=|r(\omega)|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(\omega)}$。相位条件为

$$2\phi(\omega)+2\frac{\omega}{c}nL=2m\pi \quad m=1,2,\cdots \tag{16.4-15}$$

分别将邻近的相应 m 和 $m+1$ 的两个振荡频率表示为 ω_m 和 ω_{m+1} 可得

$$\begin{aligned}\phi(\omega_m)+\frac{\omega_m}{c}nL&=m\pi\\ \phi(\omega_{m+1})+\frac{\omega_{m+1}}{c}nL&=(m+1)\pi\end{aligned} \tag{16.4-16}$$

于是有

$$\left(\phi(\omega_{m+1})-\phi(\omega_m)+\frac{\omega_{m+1}-\omega_m}{c}nL\right)=\pi \tag{16.4-17}$$

相位 $\phi(\omega)$ 在紧邻布拉格频率处近似为频率的线性函数，并可写为

$$\phi(\omega)\cong\tau(\omega-\omega_0)+\phi_0 \tag{16.4-18}$$

其中ϕ_0是常数，τ是布拉格频率处反射引起的群时延（见 12.6 节）。按照式（12.6-10），群时延τ可表示为

$$\tau = \frac{\tanh|\kappa|L_m}{|\kappa|L_m}\tau_0 \approx \frac{1}{|\kappa|L_m}\tau_0 = \frac{n}{|\kappa|c} \tag{16.4-19}$$

其中假设了$|\kappa|L_m \gg 1$以至于$\tanh|\kappa|L_m \approx 1$；$\tau_0 = \mathrm{d}(\beta L_m)/\mathrm{d}\omega = nL_m/c$是不存在周期性折射率调制时光束穿过布拉格镜间的介质（长度为L_m）而对应的群时延。

应用式（16.4-18）和式（16.4-19），式（16.4-17）可变为

$$2\pi\Delta\nu = (\omega_{m+1} - \omega_m) = \frac{\pi c}{n(L + 1/|\kappa|)} \tag{16.4-20a}$$

模间频率间隔，可等价表示为

$$\Delta\nu = (\nu_{m+1} - \nu_m) = \frac{c}{2nL(1 + 1/|\kappa|L)} \tag{16.4-20b}$$

布拉格频率处布拉格镜共振腔的有效长度不是反射镜间距L而是

$$L_{有效} = L + \frac{1}{|\kappa|} \tag{16.4-21}$$

式中的$1/|\kappa|$部分表示，如图 16.14 所示，振荡激光器场穿透进布拉格镜并逐渐消失。因为分析中假定是两个布拉格镜，所以进入单个反射镜的布拉格穿透距离为$1/2|\kappa|$。

回想起由式（12.5-28）给定的周期性布拉格镜内（布拉格频率ω_0上的）场的表达式为

$$\exp(-i\beta' z) = \exp\left(-i\frac{\pi}{\Lambda}z\right)\exp(-|\kappa|z) \tag{16.4-22}$$

其强度为

$$I(z) = I(0)\exp(-2|\kappa|z) \tag{16.4-23}$$

该式与有效穿透距离约$1/2|\kappa|$相一致，以便与式（16.4-21）中的$1/|\kappa|$的值可比。

例：模间频率间隔。

为了获得式（16.4-20a）所示的模间频率间隔，我们来考虑图 16.14 中描述的激光器。布拉格镜的数据与在式（16.4-11）后所举例子中使用的数据相同。基本的参数如下：

$$\lambda = 1\,\mu\text{m}，\quad L = \lambda = 1\,\mu\text{m}$$

$$|\kappa| = \frac{2\Delta n}{\lambda} = \frac{2\times 0.55}{1} = 1.1\mu\text{m}^{-1}$$

$$L_{有效} = L + \frac{1}{|\kappa|} = (1+0.91)\mu\text{m} = 1.91\mu\text{m}$$

$$2\pi\Delta\nu = (\omega_{m+1} - \omega_m) = \frac{\pi}{n(L + 1/|\kappa|)}$$

（请注意穿透深度 0.91 μm 要大于镜内间距 L。）

$$\Delta\nu \equiv \frac{\omega_{m+1} - \omega_m}{2\pi} = \frac{c}{2nL_{有效}} = \frac{3\times 10^{10}}{2\times 3.3\times 1.91\times 10^{-4}} = 2.38\times 10^{13}\,\text{Hz} = 793\text{cm}^{-1}$$

按照式（12.5-24）布拉格镜（光子带隙）的高反射区域可得出

$$(\Delta\nu)_{\text{Bragg}}=\frac{(\Delta\omega)_{\text{带隙}}}{2\pi}=\frac{|\kappa|c}{\pi n}=\frac{1.1\times10^{4}\left(\text{cm}^{-1}\right)\times3\times10^{10}}{\pi\times3.3}=3.47\times10^{13}\,\text{Hz}$$

该数字与模间间隔 $\Delta\nu=2.38\times10^{13}$Hz 相当。这样每次只有一个模式经历高反射并且满足振荡条件。这在大多数情况下会引起单模振荡，这与更为传统的解理面反射镜和 L=300 μm 边缘发射半导体激光器相反。模间间距也相应地更小。

我们将图 16.16 的表面发射激光器的一个二维阵列的照片作为本节的总结。

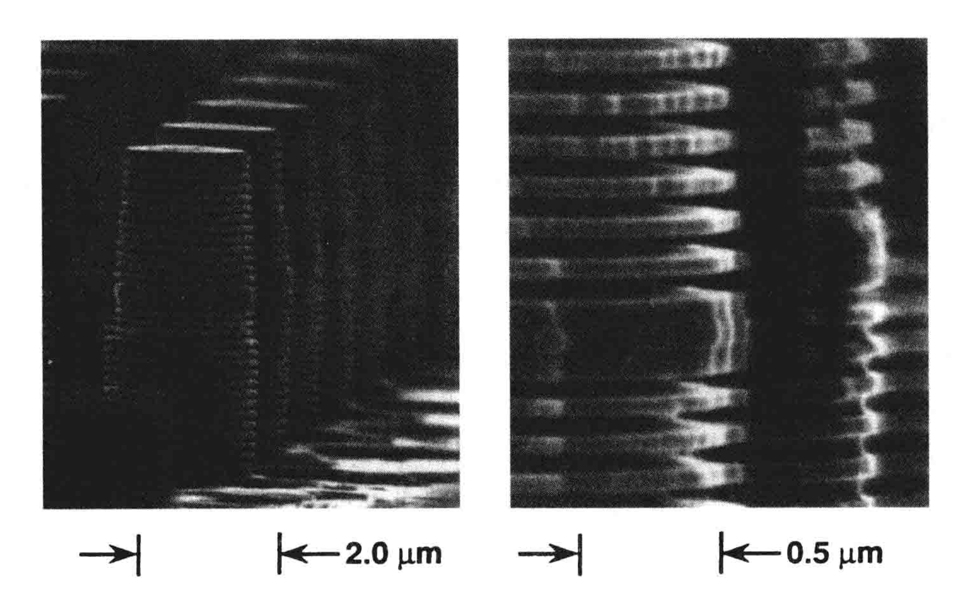


图 16.16　一个二维阵列的垂直腔表面发射激光器的扫描电子显微照片。由部分择优腐蚀 AlAs 层得到交替 GaAs 和 AlAs 层的多层结构（由美国科学杂志和加利福尼亚技术研究所的 A. Scherer 先生提供）

习题

16.1　在单方势阱条件下求解一维薛定谔方程式（16.1-3），其中

$$V(z)=\begin{cases}-V_0, & -L/2<z<L/2\\ 0, & \text{其他地方}\end{cases}$$

16.2　假定测量一个量子阱激光器的长度 L 时，通过增大 R 来保持微分量子效率 $\eta_{外}$ 不变：

（a）试推导 R（镜反射系数）与 L 的关系；

（b）试证明 $I_{阈值}$ 与 L 成正比。

16.3　试定性证明对于给定的 m_c 和注入电流来说，当 $m_v=m_c$ 时可获得增益最大值。

16.4　试估算 DFB 激光器的耦合常数 κ，该激光器的自发辐射光谱由图 16.10（e）给出。

16.5

（a）利用计算机程序画出周期性增益波导反射系数[见方程（16.3-14）]随 $\Delta\beta L$ 的函数关

系的量级图。假定$\kappa L = 0.4$。令γL为参数绘出$\gamma L = 2$，2.9，3.5 和 3.8 相应的曲线。

（b）如图 16.12 中那样画出$\gamma L - \Delta\beta L$平面内的增益等高线。

16.6

（a）试推导损耗周期性调制的 DFB 激光器的耦合模方程。根据麦克斯韦方程，空间周期损耗可通过取波导的介电常数为

$$\varepsilon'(r) = \varepsilon(r)\left[1 - i\frac{\sigma(r)}{\omega\varepsilon(r)}\right]$$

且$\sigma(\boldsymbol{r}) = \sigma_0 + \sigma_1(x)\cos\frac{2\pi}{\Lambda}z$来得到，其中$\sigma(\boldsymbol{r})$为介质电导率。

（b）将该情况下的耦合系数κ与折射率调制的耦合系数进行比较（见式（12.5-14））。

（c）试估算在损耗调制波导情况下κ的大小，其中有效折射率为$n_{有效}=3.5$，$\Lambda=0.22\mu m$，$\lambda \sim 1.55\ \mu m$。损耗层的吸收系数为$\alpha = 300\ cm^{-1}$，厚度为 1000 Å。它位于导引层的中心。假定波导模式大部分限制在内层中（$n = 3.51$）。

16.7　从式（16.3-26）和式（16.3-28）

$$r_2 = \frac{-i\kappa^* \sinh SL_1}{S\cosh SL_1 + i(\Delta\beta + i\gamma)\sinh SL_1} \text{ 和 } r_1 = \frac{-i\kappa^* \sinh SL_2}{S\cosh SL_2 + i(\Delta\beta + i\gamma)\sinh SL_2}$$

验证

$$r_1 r_2 = \frac{-\kappa^*\kappa \sinh SL_1 \sinh SL_2}{S[\cosh SL + i(\Delta\beta + i\gamma)\sinh SL] - \kappa^*\kappa \sinh SL_1 \sinh SL_2}$$

式中$L = L_1 + L_2$是周期波导的总长度。注意当$S\cosh SL + i(\Delta\beta + i\gamma)\sinh SL = 0$时$r_1 r_2 = 1$。

16.8

验证习题 16.7 中的$r_1 r_2$的相位ϕ。这个相位是 DFB 激光器中"往返位相偏移量"。在振荡状态这个相移量必须是 0 或是2π的整数倍。并证明当极限$\gamma \to 0$，在光子带隙中的频率处，相移ϕ落在$(0, 2\pi)$。换句话说，带隙中$0 < \phi < 2\pi$。因此，DFB 激光器的振荡不会发生在光子带隙中（见图 12.29 和 16.8 节）。

参考文献

1. van der Ziel, J. P., R. Dingle, R. C. Miller, W. Wiegmann, and W. A. Nordland, Jr., Laser oscillation from quantum states in very thin GaAs-A$1_{0.2}$Ga$_{0.8}$sAs multi-layer structures. *Appl. Phys. Lett.* **26**:463 (1975). See also R. D. Dupuis and P. D. Dapkus, *IEEE J. Quantum Electron.* **QE-16**:170 (1980).
2. Mittelstein, M., *Theory and Experiments on Unstable Resonators and Quantum Well GaAssGaA1As Lasers*. Ph.D. thesis in Applied Physics, California Institute of Technology, Pasadena, CA, 1989, p. 54.
3. Tsang, W. T., Extremely low threshold (AlGa)As modified multi-quantum well heterostructure laser grown by MBE. *Appl. Phys. Lett.* **39**:786 (1981).
4. Mehuys, D., *Linear, Nonlinear and Tunable Guided Wave Modes for High Power (GaAl)As Semiconductor Lasers*. Ph.D. thesis, California Institute of Technology, Pasadena, CA, June 1989.
5. Derry, P., et al., Ultra low threshold graded-index separate confinement single quantum well buried heterostructure (Al, Ga) as lasers with high reflectivity coatings. *Appl. Phys. Lett.*

50:1773 (1987).

6. Eng, L. E., et al., Submilliampere threshold current pseudomorphic InGaAs/AlGaAs buried heterostructure quantum well lasers grown by molecular beam epitaxy. *Appl. Phys. Lett.* **55**:1378 (Oct. 1989).
7. Dingle, R., W. Wiegmann, and C. H. Henry, Quantum states of confined carriers in very thin $Al_xGat_{1-x}As$-GaAs-$Al_xGA_{1-x}As$ heterostructures. *Phys. Rev. Lett.* **33**:827 (1974). Also see G. Bastard and J. A. Brum, Electronic states in semiconductor heterostructures. *IEEE J. Quantum Electron.* **QE-22**:1625 (1986).
8. Arakawa, Y., and A. Yariv, Theory of gain, modulation response and spectral linewidth in A1GaAs quantum-well lasers. *IEEE J. Quantum Electron.* **QE-21**:1666 (1985).
9. Kogelnik, H., and C. V. Shank, Coupled wave theory of distributed feedback lasers. *J. Appl. Phys.* **43**:2328 (1972).
10. Nakamura, M., A. Yariv, H. W. Yen, S. Somekh, and H. L. Garvin, Optically pumped GaAs surface laser with corrugation feedback. *Appl. Phys. Lett.* **22**:515 (1973).
11. Aiki, K., M. Nakmura, J. Umeda, A. Yariv, A. Katzir, and H. W. Yen, GaAs–GaAlAs distributed feedback laser with separate optical and carrier confinement. *Appl. Phys. Lett.* **27**:145 (1975).
12. Yariv, A., and P. Yeh, *Optical Waves in Crystals*. Wiley-Interscience, New York, 1984.
13. Haus, H. A., and C. V. Shank, Antisymmetric taper of distributed feedback lasers. *IEEE J. Quantum Electron.* **QE-12**:532 (1976).
14. Nakano, Y., Y. Luo, and K. Tada, Facet reflection independent, single longitudinal mode oscillation in a GaAlAs/GaAs distributed feedback laser equipped with a gain-coupling mechanism. *Appl. Phys. Lett.* **55**:16 (1989).
15. Iga, K., S. Ishikawa, S. Ohkouchi, and T. Nishimura, Room-temperature pulsed oscillation of GaAlAs/GaAs surface emitting injection laser. *Appl. Phys. Lett.* **45**:348 (1984).
16. Jewell, J. L., J. P. Harbison, A. Scherer, Y. H. Lee, and L. T. Florez, Vertical cavity surface emitting lasers. *IEEE J. Quantum Electron.* **27**:1332 (1991).
17. Jewell, J. L., J. P. Harbison, and A. Scherer, Microlasers. *Sci. Am.* p. **86** (November 1991).

第 17 章　光放大器

17.0　引言

线性放大器是任何点到点的通信系统中的必要元器件。在光网络中，存在许多损耗机制，包括插入损耗、分支损耗和在硅光纤中的传输衰减。线性光放大器应用于光域中恢复光信号的功率水平。光纤连接中[1~3]的光放大器在超长距离的光纤传输系统和有大量用户的局域系统中已被确认有许多应用。在广播传输系统中，对光损耗的传统的补偿方式不但花费相当大而且在中继器中电子再生需要笨重的结构和复杂的过程。再生过程包括光电转换、电放大、重新定时、脉冲整形和电光转换。在密集波分复用（DWDM）光网络中，在单根光纤中有许多频率通路。传统的补偿方式需要对所有波段的分立信号进行再生，再将所有波段耦合。这是一种非常昂贵的途径，特别是 DWDM 光网络。光放大器能够在光域中同时对所有波段的信号放大功率水平，相应的方式适用于所有调制方式，且提供足够大的增益带宽积。这样删减了在中继器中光电和电光转换所需的费用，提供了一种在光网络中提高带宽的简便和经济的方法。光放大器存在的理由是光放大器能使光功率保持在有效的高水平，同时将由于信号的散粒噪声和接收器噪声所造成的信噪比（SNR）的下降趋势减小到微不足道的程度。

根据光放大器在广网络中的应用，光放大器通常可分为以下几类：

1．辅助放大器。许多激光器，特别是可调谐的，被设计成在稳态下低光功率输出。这些激光器必须附加一个光放大器提高光功率。

2．在线放大器。由于传输、分支或陷阱损耗使得信号功率降低，在线放大器可以使信号的功率水平在单个光纤通道中放大。良好的增益平滑度在许多放大器中都是级联的。

3．前置放大器。在探测器中为提高信噪比，前置放大器用在接收器前放大微弱的信号。高增益和低损耗的特性是必备条件。

在本章中，我们讨论各种光放大器，包括半导体光放大器（SOA）、掺铒光纤放大器（EDFA）和拉曼光放大器。我们也将讨论在光放大器中引入的被放大的自发辐射噪声[4,5]和光纤连接中的光放大器的信噪比的重要性质。

17.1　半导体光放大器

在上两章，我们讨论了各种半导体激光器。半导体光放大器（SOA）与基于法布里－珀罗共振腔的激光二极管具有相同的制备工艺。在第 15 章和 16 章讨论过，上述激光器由位于共振腔（法布里－珀罗类型）内的放大媒质组成。放大（或增益）的获得是由于电子注入到半导体中形成粒子数反转。为了仅仅提供放大作用，必须有效防止自激振荡（激射）。通过使用抗反射（AR）涂层和改变芯片表面解理角度来删减光腔反射从而防止自激振荡。图 17.1 表示半导体光放大器的示意图。

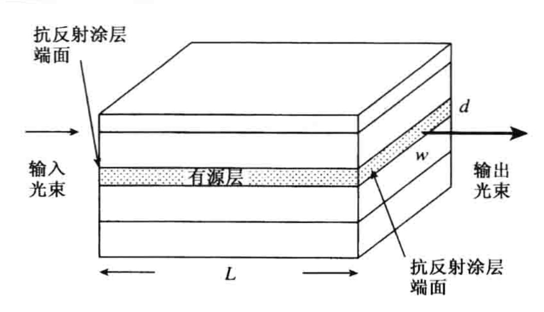


图 17.1　半导体光放大器（SOA）的示意图，有源层厚度为 d，宽度为 w，长度为 L。端面涂敷抗反射层以防止自激振荡

SOA 最大的优势是在很窄（小于约 400μm）的半导体芯片上可能获得很大的增益（>20dB）。相对掺铒光纤放大器（EDFA），SOA 最大的缺点是载流子复合寿命短。在 SOA 中，复合寿命短会造成通信通道中的串音。另外，SOA 端面的剩余反射需用光隔离器。即使是很小的反射（$R<10^{-5}$）也会造成发送端激光器的不稳定和额外的噪声。尽管如此，一些显著的结果已证实了 SOA 的优势。与光泵浦的 EDFA 不同，SOA 是通过电流注入的电泵浦。下面节参考了参考文献[6~8]。

按照端面反射镜的剩余反射率的大小，SOA 可分为两大类：共振或法布里－珀罗放大器（FPAs）和行波放大器（TWAs）。共振光放大器的端面反射率低于激光器，因此不可能发生自激振荡。尽管如此，端面反射足以提供光在有源区中的多次反射，这样增强了共振腔的作用并且在增益谱中出现了一系列尖峰，对应于放大器的法布里－珀罗共振纵模。在增益谱中尖峰附近，增益非常大。采用反射率大约为 10^{-2} 的抗反射层制成的共振型 SOA 在每个尖峰附近典型的特征参量增益为 10～20dB、有效带宽为 2～10GHz。TWA 的端面敷层的反射率小于 10^{-4}（见图 17.2），其增益为几个 dB、带宽大于 5THz（如在 $\lambda=1550$nm 窗口 $\Delta\lambda=40$nm）。

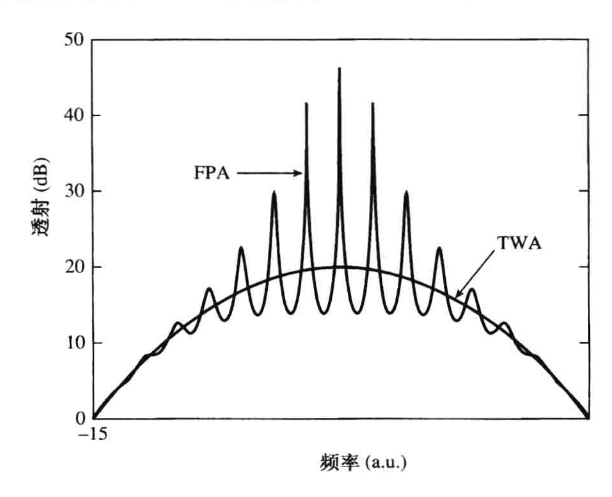


图 17.2　半导体光放大器的透射谱，$R=0.01$，单程峰值强度增益为 20dB（$G_{峰}=100$）。平滑的曲线对应于 $R=0$ 的极限情形

SOA 的基本结构包括一个有源层，其两端面涂敷抗反射层。假设理想的端面反射率为 R，根据第 4 章的讨论，这样的有源法布里－珀罗腔的透射率可表示为

$$T = \frac{(1-R)^2 G}{(1-GR)^2 + 4GR\sin^2(2\pi n_{有效} L/\lambda)} \tag{17.1-1}$$

式中 R 为端面反射率，G 是导膜的单程强度增益，$n_{有效}$ 是导膜的有效折射率，L 是腔长，λ 是波长。当端面反射率趋于 0，透射率就成了单程强度增益 G。当存在端面反射率（$R \neq 0$），透射谱就会偏离单程增益谱，因为在腔内出现了倍增反射。图 17.2 给出了 SOA 的透射谱。途中透射谱有一系列共振峰组成，对应的透射率远大于单程增益。共振峰出现在腔长是半波长的整数倍的位置上（即 $L = m(\lambda/2n_{有效}), m = 1,2,3,\cdots$）。透射率的最大和最小值表示为

$$T_{最大} = \frac{(1-R)^2 G}{(1-GR)^2} \tag{17.1-2}$$

$$T_{最小} = \frac{(1-R)^2 G}{(1+GR)^2} \tag{17.1-3}$$

放大器以 FPA 还是以 TWA 的方式工作取决于一次往返振幅值 GR。对于 TWAs，增益值小于 1dB，相应的 GR 值小于 0.058（见习题 17.1）。当单程增益达到 30dB（$G = 1000$），即意味着相应的端面反射率小于 5.8×10^{-5}，这是不易实现的。尽管如此，对某一特定的波长，很多抗反射层能够使端面在限定的频谱范围内存在的反射率。总的来说，半导体光放大器在增益谱的不同频谱部分既可工作于共振放大器（FPA）状态，也可工作于行波放大器（TWA）状态。图 17.3 给出了不同端面反射率下的半导体光放大器（SOA）的透射谱。

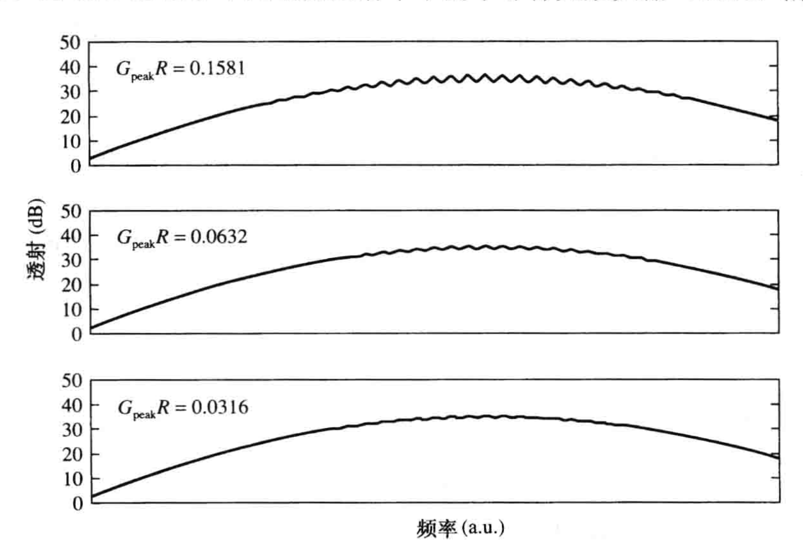


图 17.3　端面反射率 R 不同的半导体放大器的增益谱。当 GR 小于 0.058 增益谱中细波纹抖动量小于 1dB，G 是单程强度增益

对于 SOA，早期发展中的困难在于实现低的端面反射率和低的插入损耗。存在端面反射率，还会使 SOA 存在偏振相关性的问题。这种偏振相关性存在两个根源。第一，对 TE 和 TM 模存在不相等的模式限制因子；第二，TE 和 TM 模对应于不同的有效折射率（$n_{有效}$）。这就导致 TE 和 TM 模对应于不同的端面反射率，从而这两个模式（TE 和 TM）的透射的最

大值和最小值就不重叠。因此提出了许多方案来消除这种偏振相关性。例如，在系统中放置两个互相垂直的 SOA 来解决这个问题。利用一个反射镜和一个 90° 的偏振旋转仪，两次经过 SOA 从而也可解决上述问题。在实际中，单个无偏振相关性的 SOA 更为需要。可通过设计 TE 和 TM 模的光场限制因子和有效折射率几乎相等的波导来实现。例如，具有正方交叉结构的波导就能提供所需的对称性。

SOA 的增益谱与半导体激光器的基本相同。如第 15 章和 16 章，增益带宽积强烈依赖于泵浦（电流注入），并且受载流子的准费米能级间的差异的限制。与所有增益介质一样，SOA 的增益也会饱和。在并行应用时级联许多放大器（例如，长距离光网络），光放大器的饱和输出功率是十分重要的参量。饱和功率通常定义为当增益比小信号增益减小 3dB 时的输出功率。在第 5 章已讨论过，增益饱和是在高光功率下受激辐射复合增加形成反转粒子数减小的结果。在给定的泵浦速率下，饱和还与其他类型的载流子复合（辐射和非辐射）有关，还与波导几何结构和限制因子有关。

当两路信号由相同的光放大器放大，总的放大器输出功率接近饱和值，这时增益饱和可导致串音。这种情形下，一路信号的增益取决于另一路（或几路）光功率的有无。在 SOA 中载流子的寿命仅为几百皮秒，增益很容易被比特率为几 GHz 的信号而调制。增益也可由两个被放大信号的拍频而调制。拍频信号的产生意味着增益调制产生了新的频率，即第三个信号被放大，这就是增益诱导的四波混频。设定两个频率为 ω_1 和 ω_2 的信号，这两个信号形成的拍波导致 SOA 的增益通过饱和效应在频率 $\Omega = \omega_2 - \omega_1$ 处被调制。由于增益调制，频率为 ω_3 的信号被放大，由此在 $\omega_3 \pm \Omega$ 处激发边频带。这就是增益诱导的四波混频。增益调制强烈地依赖于两个被放大的信号的拍频（或频率间隔）因此须严格限制波分复用系统（WDM）的信道间的频率间隔。

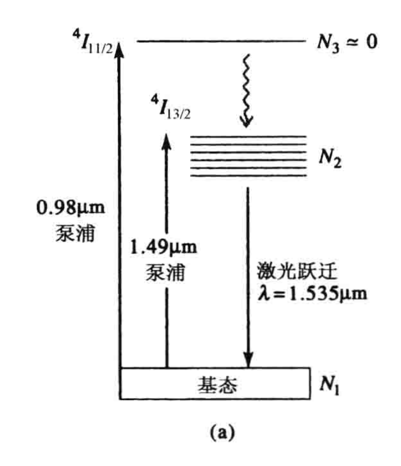
除了增益诱导的四波混频，自相位调制（SPM）和交叉相位调制（XPM）也会发生在 SOA 中。早在第 15 章中讨论过，有源层的折射率受载流子浓度影响。一个比特率高达几 GHz 的信号在脉冲串中会造成载流子浓度的瞬态变化，这样会使有源层的折射率也发生瞬态变化，由此产生相位调制。上述导致的结果是光脉冲放大的同时可带来光谱的明显的形变，即使在通过 SOA 的瞬间脉冲形状保持基本不变。光谱的形变（通常是啁啾和展宽）会造成脉冲畸变和在光纤中的衰减。

17.2　掺铒光纤放大器

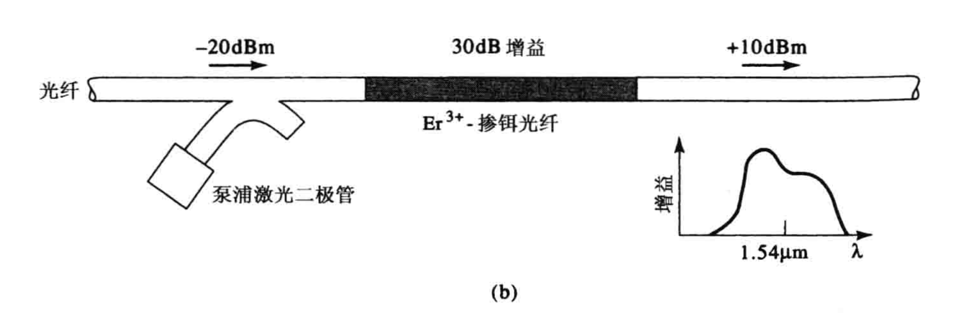
在 6.11 节中，简要讨论了掺铒光纤激光器。在掺铒光纤激光器中，掺铒光纤作为增益介质，两端用光纤布拉格光栅作反射镜，构成谐振腔。如果移去两端的反射镜，就成了一个掺铒光纤放大器（EDFA）。图 6.53 给出了典型掺铒光纤激光器中铒离子 Er^{3+}的能级图（包括泵浦和放大跃迁能级）。Er^{3+}是一种稀土离子，在 4f 电子轨道上有 11 个电子。电子在能级 $^4I_{13/2}$ 和 $^4I_{15/2}$之间发生受激辐射，可以用于 1550nm 波段的光放大。掺铒光纤在 1550nm 波段的增益带宽非常宽，这是由于在硅玻璃（SiO_2）中，邻近氧离子的扰动使铒离子的两个多重态都分裂为（$2J+1$）个亚能级，能级发生均匀展宽。即能级 $^4I_{15/2}$分裂成 16 个亚能级（$2J+1$，$J=15/2$），能级 $^4I_{13/2}$分裂成 14 个亚能级（$2J+1$，$J=13/2$）。另外，在随机环境（如熔融硅）里，铒离子的亚能级进一步发生不均匀展宽。EDFA 具有宽增益带宽这一优点，特别适

合于宽带光通信系统。掺铒光纤在 1480nm 和 980nm 处有两个强的吸收峰，分别对应于（$^4I_{15/2}$和 $^4I_{11/2}$）和（$^4I_{15/2}$和 $^4I_{13/2}$）之间的跃迁。

图 17.4(b)为掺铒光纤放大器及其相关能级的示意图。EDFA 的基本原理是：泵浦光耦合到掺铒光纤中，Er^{3+}吸收泵浦光，电子从低能级激发到高能级上，形成粒子数反转分布。反转后的粒子以辐射形式或非辐射形式从高能级转移到基态，前者是通常所说的受激光辐射，后者为自发辐射。在 EDFA 中，泵浦光源一般是激射波长 980nm 或 1480～1490nm 的半导体激光器。1480～1490nm 的泵浦光直接把电子从基态（粒子数为 N_1）泵浦到激发态 $^4I_{13/2}$（粒子数为 N_2）上。而 980nm 的泵浦光把电子从基态泵浦到泵浦能级 $^4I_{11/2}$ 上，电子在泵浦能级 $^4I_{11/2}$ 上的寿命非常短（大约 1μs），很快弛豫到中间能级 $^4I_{13/2}$（激发态）。中间能级是亚稳态能级，其自发寿命大约为 $t_2=10.2\times10^{-3}$s 。由于亚稳态能级的每次弛豫都会产生一个自发辐射光子，因此 $t_2=t_{自发}$ 。自发辐射寿命越长，通信信道之间的串扰就越小。



(a)



(b)

图 17.4　(a)掺铒光纤放大器（泵浦波长 $\lambda=0.98\mu m$ ）相关能级的示意图；(b)放大光纤与传输光纤连接示意图以及泵浦光与光纤耦合方法示意图

在 EDFA 中，掺铒光纤的典型长度是几米到几十米。EDFA 与光网络中的光纤可以很好地连接起来，连接处的反射率可达到零，从而消除了 EDFA 中的自振荡。而且，理想光纤的圆对称性也消除了 EDFA 的偏振相关性。因此，EDFA 是一种偏振不灵敏的行波放大器，利用几米长的掺铒光纤就可获得 20～40dB 的增益。图 17.4 也给出了 EDFA 的典型增益谱。从图中可以看出，EDFA 的增益随着波长的改变而有明显的变化。在 WDM 光网络中，当多信道覆盖的谱范围很宽或放大器级联时，EDFA 就存在着增益不平坦问题了。利用无源光滤波

器可以改善 EDFA 增益不平坦这一缺点。

由于 Er^{3+} 能级的均匀展宽和非均匀展宽，EDFA 的增益谱覆盖了从 $\lambda=1550$nm 直至 $\lambda>1600$nm 这么大的范围。其中有两个增益谱窗口非常重要：C 波段（1530～1560nm）和 L 波段（1560～1610nm）。

在 EDFA 中，泵浦光和反转粒子数沿着掺铒光纤线性衰减的同时，信号光被放大增强。但是在掺铒光纤的某个位置，由于线性衰减和受激辐射，泵浦光被消耗殆尽。超过了这个位置，信号光开始随着光纤长度的增大而减弱。因此，EDFA 存在着一个最佳光纤长度，当光纤长度为最佳光纤长度时，EDFA 的增益最大。铒离子激发态的复合寿命较长，因此在多信道放大中，EDFA 具有低噪声和低串扰噪声的优点。

与再生中继器和其他放大系统相比，EDFA 更具优势。同一个 EDFA 适用于不同速率的放大系统，因此当通信系统从低速扩展到高速时，不需要更换 EDFA。EDFA 的增益谱很宽，可以同时放大多个波长。EDFA 的放大特性也优于行波半导体光放大器（SOA）和拉曼放大器（见本章最后一节）。SOA 具有高增益、宽带宽、低输入电流、高可靠性和小尺寸等优点，是一种双向的、集总式放大器。但由于 SOA 的增益恢复时间比较长，为皮秒量级。当信号光的调制速率比较大时，在饱和区，长的增益恢复时间使前一个脉冲的放大影响了后一个紧接着脉冲的放大，这就是码型效应。码型效应限制了 SOA 的最大工作速率、降低了 SOA 的可输入信号光功率。当工作速率为 25Gbps 时，SOA 的输出信号就出现了明显的脉冲失真，而 EDFA 在工作速率超过 100Gbps 时尚无明显的脉冲失真[9]。SOA 的另一个缺点就是与光纤的耦合损耗大，耦合损耗可达 10dB。这不仅降低了 SOA 的纤—纤增益，也降低了 SOA 的有效噪声指数。拉曼放大器和 EDFA 一样，也是在光纤中把泵浦光的能量转移给信号光，实现对光信号的放大。不同的是在拉曼放大器中，能量转移是通过光纤中的受激拉曼散射（SRS）实现的。拉曼放大器具有低噪声、低耦合损耗、高增益、高输出功率和大增益带宽等优点。但与 EDFA 相比，拉曼放大器的最大缺点就是效率低（见 17.5 节）[11]。表 17.1 概括了 EDFA 和 SOA 的一些重要特性。

表 17.1　EDFA 和 SOA 的一些重要特性

放大器特性	掺铒光纤放大器（EDFA）	半导体光放大器（SOA）
激活介质	硅中的 Er^{3+} 离子	半导体中的电子—空穴对
典型长度	几米	500 μm
泵浦	光学泵浦	电流泵浦
增益谱	$\lambda=1500$– 1600nm	$\lambda=1300$– 1500nm
增益带宽	25—35nm	100nm
弛豫时间	0.1—1ms	<10—100ps
最大增益	30—50dB	25—30dB
饱和功率	>10dBm	0—10 dBm
串扰	——	比特率<10GHz
偏振	不敏感	敏感
噪声指数	3—4dB	6—8dB
插入损耗	<1dB	4—6dB
光学器件	泵浦激光二极管耦合器，光纤连接	防反射镀膜，光纤-波导耦合
光电子集成	不能	可以

可以用 6.4 节中的基本速率方程来研究 EDFA 的增益特性，还有其他几个改进的模型，

适用于不同的应用，有兴趣的读者可以参看参考文献[12～18]。

17.3 放大自发辐射

与所有放大器一样，SOA 和 EDFA 都会引入噪声。这是由于在放大器中，除了存在放大信号光的受激辐射之外，也存在着自发辐射。自发辐射产生的光子在有源区同样被放大，产生放大自发辐射（ASE）噪声，ASE 是放大器的主要噪声源。放大器引入的噪声会导致模拟通信中的接收信号变差，或者使数字传输系统的误码率增大。

对于电放大器，通常用噪声指数来定量研究放大器引入的噪声。本章将研究光放大器中的噪声，并定义一个专门的噪声指数来定量研究放大器引入的噪声。光放大器的噪声指数定义为

$$F=\frac{(\mathrm{SNR})_{输入}}{(\mathrm{SNR})_{输出}}=\frac{S_i/N_i}{S_o/N_o}=\frac{N_o}{GN_i}=\frac{GN_i+N_{放大}}{GN_i}=1+\frac{N_{放大}}{GN_i} \tag{17.3-1}$$

式中 SNR 是信噪比，S_i 是输入信号光功率，S_o 是输出信号光功率，N_i 是输入噪声功率，N_o 是输出噪声功率，G 是光放大器的增益（$G=S_o/S_i$），$N_{放大}$ 是光放大器引入的噪声功率。要得到光放大器的噪声指数，应该计算出放大器引入的噪声功率。在第 11 章里讨论了光电二极管中的噪声，光电二极管的引入噪声是约翰逊噪声（热噪声）。在光放大器中，噪声主要由增益介质（一种非热平衡状态介质）中的自发辐射引起的。自发辐射噪声属于一种量子噪声，是不可避免的。在 10.6 节中讨论了自发辐射光功率对激光输出线宽的影响，本节将研究行波光放大器中自发辐射噪声的影响。所谓行波光放大器，就是一种有增益介质、没有反射镜、对微弱信号进行放大的一种光放大器。研究自发辐射噪声的影响，首先研究自发辐射噪声引起信噪功率的退化问题。在本节的最后，计算出 ASE 功率后，再来计算信噪比和噪声指数。

假设增益介质具有粒子数反转分布，其高能级和低能级粒子数分布密度分别为 N_2 和 N_1；增益介质的横向尺寸为 a 和 b，纵向长度为 L，如图 17.5 所示。功率为 P 的光波在增益介质中传输，受激辐射引起输入光相干放大，可表示为

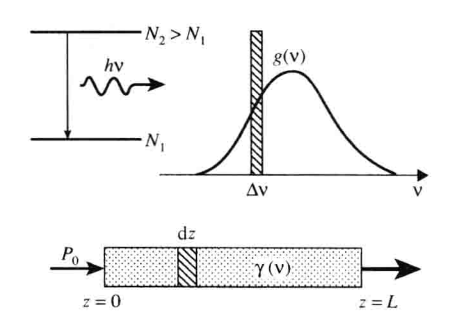


图 17.5　长为 L、横截面为 $A=ab$ 的光放大器示意图。强度增益系数为 $\gamma(\nu)$，线型函数为 $g(\nu)$

$$\mathrm{d}P=\gamma P\mathrm{d}z \tag{17.3-2}$$

式中 γ 是强度增益系数，由式（5.6-19）给出

$$\gamma(\nu)=(N_2-N_1)\frac{c^2g(\nu)}{8\pi n^2\nu^2 t_{自发}} \tag{17.3-3}$$

式中 $g(\nu)$ 是归一化线型函数，$t_{自发}$ 是上能级的自发寿命，n 是介质折射率。自发辐射产生的光子在增益介质中传输时，也同样被放大，形成 ASE。下面计算光放大器输出的 ASE 功率。在探测器中，ASE 和放大信号混合在一起，产生电强度噪声，导致信噪比的退化。

在图 17.5 中，考虑一个微分体积元 $A\mathrm{d}z$，A 是放大器增益介质的横截面积。在微分体积元中，上能级有 $N_2A\mathrm{d}z$ 个受激原子，则在微分体积元中，自发辐射产生的总光功率可表示为

$$P_N = \frac{N_2 h\nu A\mathrm{d}z}{t_{自发}} \tag{17.3-4}$$

式中 $h\nu$ 是光子能量。自发辐射光能量覆盖了由归一化线型函数 $g(\nu)$ 描述的整个增益谱，不过我们只关心落在谱范围（$\nu, \nu+\Delta\nu$）中的这部分自发辐射，其中 ν 是信号光载波频率，$\Delta\nu$ 就是我们感兴趣的光带宽，它可以是探测器前的带通滤波器的带宽，也可以是输入信号光的带宽。那么在光带宽 $\Delta\nu$ 内，由自发辐射 2→1 跃迁产生的噪声功率为

$$\Delta P_N = \frac{N_2 h\nu A\mathrm{d}z}{t_{自发}} g(\nu)\Delta\nu \tag{17.3-5}$$

注意自发辐射可以耦合到许多横模中，只有其中很少一部分耦合到输入光横模中。在所有实际情况中，假设输入光是沿 z 方向传输的单横模（如自由空间中的偏振高斯光束，波导中的单模）。

现在计算在自由空间中，耦合到信号光横模中的这部分自发辐射。假设光带宽为 $\Delta\nu$，根据式（4.0-12），自由空间中的总模数（包括横模和纵模）为

$$N_{模式} \cong \frac{8\pi\nu^2 n^3 V}{c^3}\Delta\nu$$

式中 n 是有源介质的折射率，$V = AL$ 是放大器增益介质的体积。如果自发辐射耦合到每个模的能量都是相等的，那么自发辐射耦合到一个模中的部分可以表示为

$$\alpha = \frac{1}{N_{模式}} \cong \frac{c^3}{8\pi\nu^2 n^3 V\Delta\nu} \tag{17.3-6}$$

α 也就是激光谐振腔的自发辐射因子。在光放大器中，我们关心的是耦合到输入信号光横模中的那部分自发辐射。对每一个横模，包含很多间隔为 c/nL 的纵模。在带宽 $\Delta\nu$ 内，纵模数为 $\Delta\nu/(c/nL)$（见习题 17.4）。因此，耦合到这组纵模（一个传输方向、一个偏振方向）的自发辐射部分为

$$\beta = \alpha\frac{\Delta\nu}{(c/nL)} = \frac{\lambda^2}{8\pi n^2 A} = \frac{c^2}{8\pi n^2 \nu^2 A} \tag{17.3-7}$$

式中 A 是增益介质的横截面积。这个参数也称为自发辐射 β 因子。因此，耦合到输入光横模中的自发辐射功率可表示为

$$\mathrm{d}P_N = \beta\frac{N_2 h\nu A\mathrm{d}z}{t_{自发}} g(\nu)\Delta\nu \tag{17.3-8}$$

或者把式（17.3-7）代入式（17.3-8），可得

$$\mathrm{d}P_N = \frac{c^2}{8\pi\nu^2 n^2}\frac{N_2 h\nu\mathrm{d}z}{t_{自发}} g(\nu)\Delta\nu \tag{17.3-9}$$

这就是在一个微分体积元中，耦合到一个横模（一个偏振方向、一个传输方向）中的自发辐射功率。

在波导结构中，模式（包括限制模式和辐射模式）和激活原子可能存在有不同的空间交叠。在这种情况下，自发辐射耦合到横模中的部分与横模的波函数有关。考虑体积为 $V = AL$ 的光放大器，假设自发辐射功率均等地耦合到所有的横模中。

利用增益系数表达式（17.3-3），则式（17.3-9）可写为

$$\mathrm{d}P_N = \frac{N_2}{N_2 - N_1}\gamma(\nu)h\nu\Delta\nu\,\mathrm{d}z \tag{17.3-10}$$

式中 $\Delta\nu$ 为探测器的带宽。结合式（17.3-2）和式（17.3-10），可得到由受激辐射和自发辐射引起的输入光功率增量（如果两者是相关的，直接把它们的场相加）

$$\mathrm{d}P = \gamma P\mathrm{d}z + \frac{N_2}{N_2 - N_1}\gamma(\nu)h\nu\Delta\nu\,\mathrm{d}z \tag{17.3-11}$$

等式右边的第二项是体积元 $A\mathrm{d}z$ 内由自发辐射引起的输入光功率的增量。式（17.3-11）的微分方程可写为

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \gamma P + \frac{N_2}{N_2 - N_1}\gamma h\nu\Delta\nu \tag{17.3-12}$$

结合边界条件 $P(0) = P_0$，式（17.3-12）的解为

$$P(z) = P_0\mathrm{e}^{\gamma z} + \mu h\nu\Delta\nu\left(\mathrm{e}^{\gamma z} - 1\right) \tag{17.3-13}$$

式中 P_0 是输入信号光功率，μ 是分布反转因子

$$\mu \equiv \frac{N_2}{N_2 - N_1} \tag{17.3-14}$$

注意式（17.3-13）中的总功率包括放大信号光功率（$P_0\mathrm{e}^{\gamma z}$）和 ASE 功率两部分。ASE 功率可表示为

$$P_{\mathrm{ASE}} = \mu h\nu\Delta\nu\left(\mathrm{e}^{\gamma L} - 1\right) = \mu h\nu\Delta\nu(G - 1) \tag{17.3-15}$$

式中 $G = \exp(\gamma L)$ 是放大器的增益。

光放大器在时域中的输出信噪比为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{输出}} = \frac{GS_i}{GN_i + N_{\text{放大}}} = \frac{GP_0}{GN_i + \mu h\nu\Delta\nu(G - 1)} \tag{17.3-16}$$

式中 N_i 是输入信号噪声，$N_{\text{放大}}$ 是放大器引入的噪声，$G \equiv \exp(\gamma L)$ 是放大器的单程增益。假如式（17.3-16）中分母的第一项可以忽略（如 $GN_i \ll \mu h\nu\Delta\nu(G - 1)$），仅从功率的角度考虑，自发辐射引起的噪声等效于一个输入噪声功率

$$N_{i\,\text{放大}} = \mu h\nu\Delta\nu\left(1 - \frac{1}{G}\right) \tag{17.3-17a}$$

对于一个具有高增益（$G \gg 1$）的理想四能级增益介质（$\mu = 1$），等效输入噪声功率可表示为

$$N_{i\,\text{放大}} = h\nu\Delta\nu \tag{17.3-17b}$$

如果光放大器用做接收机中的前置放大器，那么 11.4 节中定义的最小可探测功率可表示为

$$(P_2)_{\text{最小}} \sim h\nu\Delta\nu \tag{17.3-18}$$

这与式（11.4-10）得到的外差探测（量子效率为 1）式中的结果是完全相同的。因此，前置

光放大器就是一个理想的量子限制接收机。根据式（17.3-18），为了得到最小可探测光功率，应该尽可能地减小带宽 $\Delta\nu$ 。而对光信号来说，这种方法实现起来比射频信号要困难些。因此在光接收中，实际上选择与信号光的带宽相匹配的 $\Delta\nu$ 。而光接收的实际优势，则在于采用外差探测方式。在本节后面和下一节的讨论中，将采用接收机探测到的信号和噪声功率定义的 SNR。

推导式（17.3-12）的方法具有普遍性，因此，式（17.3-12）适用于热平衡（温度为 T）原子介质。对热平衡介质，采用式（17.3-12），假设 $\gamma(\nu)\to-\alpha(\nu)$（$\alpha$ 为介质吸收系数），$(N_2/N_1)=\exp(-h\nu/kT)$，其中 $k=k_B$ 是玻耳兹曼常数，结果为

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}=-\alpha P+\frac{\alpha h\nu\Delta\nu}{\mathrm{e}^{h\nu/kT}-1} \tag{17.3-19}$$

式（17.3-19）的解为

$$P(z)=P_0\mathrm{e}^{-\alpha z}+\frac{h\nu\Delta\nu}{\mathrm{e}^{h\nu/kT}-1}\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha z}\right) \tag{17.3-20}$$

如果介质是“黑体”，即所有入射光都被吸收，$\mathrm{e}^{-\alpha L}\ll 1$，则输出光功率为

$$P(L)=\frac{h\nu}{\mathrm{e}^{h\nu/kT}-1}\Delta\nu \tag{17.3-21}$$

由式（17.3-21）可以看出，输出光功率与 L 和输入光无关，这个结果与约翰逊噪声公式（10.5-6）是一致的。对于微波信号，在室温情况下，$h\nu\ll kT$，式（17.3-21）就变成了热噪声的表达式 $kT\Delta\nu$ 。

如果激光介质中存在着吸收跃迁，吸收系数为 α，可用温度 T 表征（这是由于用玻尔兹曼表示的粒子数中包含了温度），这种跃迁不对增益有贡献，因此必须增加从高能级到低能级跃迁的自发辐射到激光能级。利用式（17.3-12）和式（17.3-19）可以得到

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}=(\gamma-\alpha)P+\frac{N_2}{N_2-N_1}\gamma h\nu\Delta\nu+\frac{\alpha h\nu\Delta\nu}{\mathrm{e}^{h\nu/kT}-1} \tag{17.3-22}$$

式（17.3-22）的解为

$$P(z)=P(0)\mathrm{e}^{[\gamma(\nu)-\alpha(\nu)]z}+h\nu\Delta\nu\left(\frac{\alpha}{\mathrm{e}^{h\nu/kT}-1}+\frac{\gamma}{1-N_1/N_2}\right)\frac{\mathrm{e}^{(\gamma-\alpha)z}-1}{\gamma-\alpha} \tag{17.3-23}$$

对于光频（$h\nu\gg kT$）信号，大括号中的第一项代表吸收跃迁能级的自发辐射，第二项代表受激跃迁能级的自发辐射。一般情况下，第一项与第二项相比可以忽略。对于低频微波信号，损耗项就不容忽视了。

信噪比和噪声指数

现在再来计算光放大器的信噪比（SNR）和噪声指数（NF）。如式（17.3-1）中定义，噪声指数是输入 SNR 和输出 SNR 的比值。因此，噪声指数与光放大器的 SNR 定义有关，尤其是与噪声功率的定义有关。

对电信号来说，测量的是信号和噪声的电功率（或能量）。对于电放大器，输入噪声功率是热噪声（约翰逊噪声）$k_BT_0\Delta f$，k_B 是玻耳兹曼常数，T_0 是标准“室温”（290K），Δf 是电信号带宽。电放大器的噪声指数通常表示为（见 11.7 节的脚注 15）

$$F=\frac{(\mathrm{SNR})_{输入}}{(\mathrm{SNR})_{输出}}=\frac{S_i/N_i}{S_o/N_o}=1+\frac{放大器引入的噪声功率}{Gk_BT_0\Delta f}=1+\frac{T_A}{290} \tag{17.3-24}$$

式中 S_i 是输入信号功率，S_o 是输出信号功率，N_i 是输入噪声功率，N_o 是输出噪声功率，T_A 是有效"噪声温度"。因此，$k_BT_A\Delta f$ 就是放大器引入的噪声功率。根据这个定义，外差无噪声放大器的 $T_A=0$。从式（17.3-1）或式（17.3-24）可看出，噪声指数的定义与信号无关。而且，在和另一个放大器级联时，级联噪声指数可以很容易地用下面的级联公式得到

$$F-1=(F_1-1)+\frac{(F_2-1)}{G_1} \tag{17.3-25}$$

式中 F_2 是第二个放大器的噪声指数，G_1 是第一个放大器的增益。

光放大器具有一些与电放大器不同的特点，它的主要噪声是由放大自发辐射引起的。对于光信号，信号功率和噪声功率可能有两种定义。在光域，功率（或能量）定义为场幅值（如 $|E|^2$，其中 E 是光波的电场）的平均平方。场幅值的平方正比于光子数。但是在电域中，功率（或能量）通常定义为探测光电流的平均平方（$\overline{i^2}$），正比于光子数的平方。对应信号功率和噪声功率的这两种不同定义，噪声指数的形式也不同[19]。在本书中，为了可以与通信系统直接连接起来，我们采用传统的探测光电流的平均平方（$\overline{i^2}$）作为信号和噪声功率的定义。尽管在这种定义下，噪声指数与信号有关，且级联公式（17.3-25）不能用，但这种方法与多数光放大器制造商使用的方法是一致的[20]。

这样，光放大器的输入信噪比（SNR）定义为

$$(\mathrm{SNR})_{输入}=\frac{S_i}{N_i}=\frac{\left(\overline{i^2_{信号}}\right)}{\overline{(\Delta i)^2}}=\frac{\left(\overline{i^2_{信号}}\right)}{\left(\overline{i^2_{噪声}}\right)} \tag{17.3-26}$$

式中 $\overline{i^2_{信号}}$ 是功率为 S_o 的光信号产生的光电流 $i_{信号}$ 的平均平方，$\overline{i^2_{噪声}}$ 是噪声电流的平均平方。对于一个有散弹噪声的信号和一个具有归一化量子效率、热噪声可忽略的理想接收机，信号电流为 $\left(\overline{i^2_{信号}}\right)=\left(\overline{I}\right)^2=\left(eS_0/h\nu\right)^2$。根据式（10.4-9），输入 SNR 可表示为

$$(\mathrm{SNR})_{输入}=\frac{S_i}{N_i}=\frac{\left(\dfrac{eS_0}{h\nu}\right)^2}{2e\left(\dfrac{eS_0}{h\nu}\right)\Delta f} \tag{17.3-27}$$

或者化简为

$$(\mathrm{SNR})_{输入}=\frac{S_i}{N_i}=\frac{S_0}{2h\nu\Delta f} \tag{17.3-28}$$

式中 S_0 是输出信号光功率，Δf 是光探测器的电带宽。

计算 $(\mathrm{SNR})_{输出}$，需要求出接收机接收到的 ASE 噪声电流，这将在下一节讨论。

17.4　光纤链路中的光放大

如前所述，在光网络中，光放大器可以使信号光在传输过程中，保持足够高的光功率，

降低由信号散弹噪声和接收机噪声引起的信噪比（SNR）退化。但是，光放大器也带来了负面影响。在信号光频率附近，由于光放大器引入了噪声，降低了探测信号光的 SNR。

ASE 噪声和增益 $\exp(\gamma l)$ 对光放大器的噪声指数都起着非常重要的作用。图 17.6 给出了 EDFA 的增益 $\gamma(\lambda)$ 和噪声随波长变化的曲线。图 17.7 给出了 EDFA 的输出 ASE 谱。如图 17.7 所示，$\omega_0+\omega_m$ 和 $\omega_0-\omega_m$ 附近的自发辐射和频率为 ω_0 的光信号发生差拍，产生一些随机频率为 ω_m 的输出噪声电流。这使 RF 噪声电流谱从 dc 延伸到近似等于 ASE 的谱带宽 $\Delta\omega_{增益}$。计算 RF 噪声电流，首先要知道光放大器输出端的自发辐射功率。根据式（17.3-15），在光放大器输出端，带宽 $\Delta\nu_{光}$ 内耦合到一个单横模中的 ASE 为

$$N_a = P_{\mathrm{ASE}} = \mu h\nu\Delta\nu_{光}(G-1) \tag{17.4-1}$$

式中 $\Delta\nu_{光}$ 是光带宽，$G=\exp(\gamma l)$ 是光放大器单信道功率增益，γ 是增益系数（见式（17.3-3））、l 是光放大器的长度。

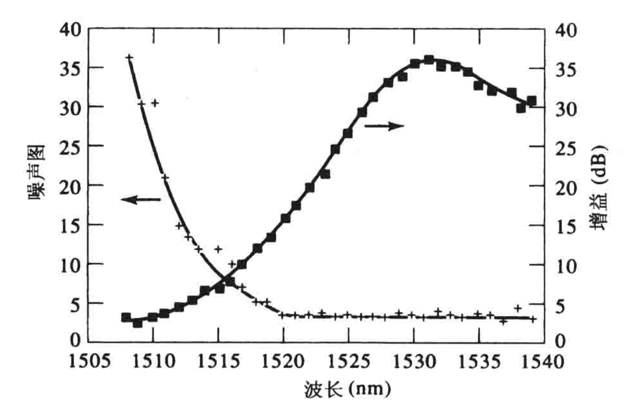


图 17.6　掺铒硅光纤放大器的噪声和增益随波长的变化情况。其中泵浦光波长为 0.98μm、功率为 34.2mW（见参考文献[5]）

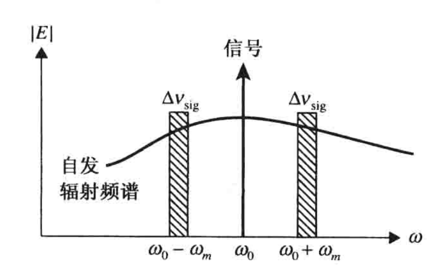


图 17.7　光放大器的输出 ASE 谱。$\omega_0+\omega_m$ 和 $\omega_0-\omega_m$ 附近的自发辐射和频率为 ω_0 的光信号发生差拍，产生一些随机频率为 ω_m 的输出噪声电流。这些噪声电流不能与频率为 ω_m 的信号光分离，构成了 RF 噪声

$$\mu = \frac{N_2}{N_2-N_1} \tag{17.4-2}$$

是跃迁的分布反转因子。在放大器系统中，$N_1\neq 0$，自发辐射随 N_2 的增大而增大。这是由于在一个光放大器中，每个信道的增益为：$G=\exp(\gamma l)$，其中增益系数 γ 正比于 N_2-N_1。对于一个给定的增益因子 γ，N_2 随 N_1 的增大而增大，自发辐射功率正比于 N_2。

在图 17.7 中，把频率 ω_0 处的输出光功率表示为 S，每个 ASE 谱窗口（$\omega_0-\omega_m$ 和

$\omega_0+\omega_m$）的输出功率为 N_a。由 11.11 节的讨论，可以写出探测器处的光场（包括信号场和噪声场）

$$E=\sqrt{S}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_0 t+\phi_S)}+\sqrt{N_a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[(\omega_0-\omega_m)t+\phi_1\right]}+\sqrt{N_a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[(\omega_0+\omega_m)t+\phi_2\right]} \tag{17.4-3}$$

式中 S 表示放大光信号的功率，N_a 为图 17.7 所示的每个 ASE 谱窗口（$\omega_0-\omega_m$ 和 $\omega_0+\omega_m$）（即 $N_a=P_{\mathrm{ASE}}=\mu h\nu\Delta\nu_{信号}(G-1)$ 的功率，ϕ_S、ϕ_1 和 ϕ_2 是相位。由于 ASE 的随机性，相位 ϕ_1 和 ϕ_2 在 0 到 2π 范围内均匀分布。探测电流正比于信号场之和乘以噪声场的绝对平方。由式（17.4-3）光电流可写为

$$i=\frac{Se\eta}{h\nu}\left(1+2\frac{N_a}{S}+2\sqrt{\frac{N_a}{S}}\cos\left(\omega_m t+\phi_2-\phi_S\right)+2\sqrt{\frac{N_a}{S}}\cos\left(-\omega_m t+\phi_1-\phi_S\right)\right) \tag{17.4-4}$$

式中 η 是光电转换的量子效率。频率 ω_m 处的平均平方差拍电流为

$$\overline{\left(i^2\right)}_{\mathrm{ASE-信号}}=4\left(\frac{e\eta}{h\nu}\right)^2 SN_a=\frac{4e^2\eta^2 S(G-1)\mu\Delta\nu_{信号}}{h\nu} \tag{17.4-5}$$

式中用 $N_a=P_{\mathrm{ASE}}=\mu h\nu\Delta\nu_{信号}(G-1)$ 表示每个 ASE 谱窗口的噪声功率，这两个 ASE 谱窗口的带宽都为 $\Delta\nu_{信号}$（信号带宽），其中一个大于信号频率，一个小于信号频率，它们对差拍电流的贡献是毫不相干的。$\Delta\nu_{信号}$ 是光信号带宽，也是光探测器中的电带宽 $\Delta f_{信号}$。在下面部分，略去下标“信号”，只用 Δf 或 $\Delta\nu$ 表示带宽。

图 17.8 所示为一个在线光放大器。功率为 S_0 的输入信号光以光纤中的单横模（通常情况下是基模）输入到放大器中，输出信号光功率是 $S=GS_o$，而由式（17.4-1）定义的 N_a 表示输出端放大（光信号）自发辐射功率 P_{ASE}，它由光频带 $\Delta\nu$ 内的光放大器产生。在理想情况下（如无噪声接收机），放大器输入信号的主要噪声是信号散弹噪声。根据式（10.4-9）或式（17.3-27）和式（17.3-28），光放大器的输入 SNR 为

$$\mathrm{SNR}_{输入}=\frac{\overline{\left(i^2\right)}_{信号}}{\overline{\left(i^2\right)}_{噪声}}=\frac{\left(\dfrac{S_0 e}{h\nu}\right)^2}{2e^2\dfrac{S_0}{h\nu}\Delta f}=\frac{S_0}{2h\nu\Delta f} \tag{17.4-6}$$

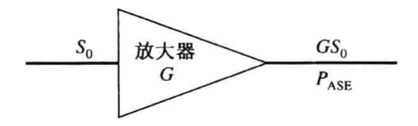


图 17.8　增益为 G，输入信号功率为 S_0 的在线光放大器示意图。P_{ASE} 为带宽 $\Delta\nu$ 内输出 ASE 总功率

为了简单起见，假设探测效率为 $\eta=1$，则光放大器的输出信号功率（光电流的平均平方）为

$$\overline{\left(i^2\right)}_{输出}=\left(\frac{GS_0 e}{h\nu}\right)^2 \tag{17.4-7}$$

噪声功率包括 ASE 信号差拍噪声式（17.4-5）和散弹噪声式（10.4-9）

$$\left(\overline{i^2_{\mathrm{shot}}}\right)_{输出}=2e\bar{I}\Delta f=2e\frac{eGS_0}{h\nu}\Delta f \tag{17.4-8}$$

式中 $\bar{I}=eGS_0/h\nu$ 是平均光电流。由 ASE-ASE 差拍而产生的噪声电流正比于 P^2_{ASE}，如果信号

功率$S(z)$衰减得不是太小，ASE-ASE 差拍噪声电流与 ASE-信号差拍电流相比可以忽略。同理，我们也忽略了 ASE 引起的散弹噪声。放大器的输出 SNR 就表示为

$$\mathrm{SNR}_{输出}=\frac{\left(\dfrac{GS_0e}{h\nu}\right)^2}{\dfrac{2e^2GS_0}{h\nu}\Delta f+\dfrac{4e^2G(G-1)S_0\mu\Delta f}{h\nu}} \tag{17.4-9}$$

式中假设探测器的量子效率为 100%。分母中包括平均平方散弹噪声电流和平均平方 ASE 信号差拍噪声电流。

利用式（17.4-9）和式（17.4-6），可以写出噪声指数为

$$F=\frac{\mathrm{SNR}_{输入}}{\mathrm{SNR}_{输出}}=\frac{G+2G(G-1)\mu}{G^2}=\frac{1}{G}+2\mu\left(1-\frac{1}{G}\right) \tag{17.4-10}$$

当增益$G\gg1$时，式（17.4-9）中分母的第二项占优势，噪声指数可变为

$$F=\frac{\mathrm{SNR}_{输入}}{\mathrm{SNR}_{输出}}=2\mu$$

在理想的四能级（$N_1=0,\mu=1$）放大器中，噪声指数等于 2dB 或 3dB。对于一个高增益光放大器，其输出 SNR 与输入 SNR 相比，将会降低 2dB 到 3dB。采用光放大器放大信号可以增加传输距离、提高接收机灵敏度，因此，放大器引起噪声指数的退化是可以容忍的。图 17.6 给出了噪声指数随波长变化的实验曲线，可以看出噪声指数的极限为 3dB。

在长距离光纤链路（100km 或更长）中，需要将信号多次放大，下面将研究光放大器级联的情况。在光纤链路中的任意点z处，探测信号光 SNR 的一般表达式（17.4-9）可写为

$$\mathrm{SNR}(z)=\frac{\left[\dfrac{eS(z)}{h\nu}\right]^2}{\dfrac{2e^2S(z)\Delta f}{h\nu}+\dfrac{4e^2N_a(z)S(z)}{(h\nu)^2}+\dfrac{4kT_e\Delta f}{R}} \tag{17.4-11}$$

式中$S(z)$是放大信号功率，$N_a(z)$是 ASE 噪声功率，分母中的最后一项代表接收机在z点的热噪声电流，T_e是有效噪声温度。R是接收机的输入阻抗和探测器的输出阻抗。式（17.4-11）中也忽略了 ASE 引起的散弹噪声、ASE-ASE 差拍噪声和激光源的强度起伏噪声。如果信号经过多次放大，其功率$S(z)$能够始终大于某个值，那么就可以忽略上式分母中接收机的噪声项。在这种情况下，SNR 的表达式（17.4-11）变为

$$\mathrm{SNR}(z)=\frac{S^2(z)}{2S(z)h\nu\Delta f+4N_a(z)S(z)} \tag{17.4-12}$$

$S(z)$是z处的信号功率，而$N_a(z)$是z点前所有放大器引起的 ASE 总噪声功率。

下面考虑在光纤链路的固定等间隔处放置放大器的实际情况，如图 17.9 所示。输入到光纤的信号功率为$S(z)$，每个放大器的输出端信号功率为S_0。信号在相邻放大器之间以系数$L\equiv\exp(-\alpha z_0)$衰减传输z_0距离后，在每个放大器处获得增益$G=L^{-1}=\mathrm{e}^{\alpha z_0}$，信号恢复到原来水平$S_0$。同样，自发辐射$N_a(z)$在两个相邻放大器之间以系数$L$衰减传输，经过放大器放大恢复到原来值，而且由于放大器中存在 ASE，在每个放大器的输出端，噪声将增大P_{ASE}。利

用式（17.4-1）中 P_{ASE} 的表达式，计算第 n 个放大器输出探测电流的 SNR。假设 $G \gg 1$，第 n 个放大器的输出探测电流的 SNR 为

$$\text{SNR}_n = \frac{S_0}{2h\nu\Delta f\left[1 + 2n\mu\left(\mathrm{e}^{\alpha z_0} - 1\right)\right]} \tag{17.4-13}$$

注意在第 n 个放大器的输出端，累积 ASE 功率是 nP_{ASE}。当 $\exp(\alpha z_0) = G \gg 1$，SNR 对 z^{-1}（更确切说是对 n^{-1}）依赖性，要大于对无放大光纤 $\exp(-\alpha z_0)$ 的依赖性。其物理原因是放大器的多次放大，既保持了信号光功率，也保持了信号—ASE 差拍噪声功率，光纤中的主要噪声机制是散弹噪声，而信号—ASE 差拍噪声远大于信号散弹噪声。因此，在每一级中，都引入了固定大小的差拍噪声，使 SNR 与距离成反比关系。

由式（17.4-13）可以看出，减小相邻放大器之间的间隔 z_0，可以提高 z 处的 SNR，当然这也必须要减小每个放大器的增益 $G = \exp(\alpha z_0)$。考虑式（17.4-13）的极限情况 $z_0 \to 0$，也就是相邻放大器的间隔趋于 0。在这种极限情况下，整个光纤实际上就是一个增益常数为 $\gamma = \alpha$ 的分布放大器，其增益恰好能使光信号保持一个常数值。利用式（17.4-12）来计算 z 处 SNR。由于 $S(z)$ 是一个常数，因此仅需求得 ASE 光功率 $N_a(z)$ 即可。为了求得放大光纤引入的噪声功率，考虑不同长度 $\mathrm{d}z$，这样放大器可以看作是一个增益为 $\exp(\gamma \mathrm{d}z)$ 的分离放大器，则由式（17.4-1）可以得到 ASE 功率 $N_a(z)$

$$\mathrm{d}N_a = \left(\mathrm{e}^{\gamma(\mathrm{d}z)} - 1\right)\mu h\nu\Delta f \tag{17.4-14}$$

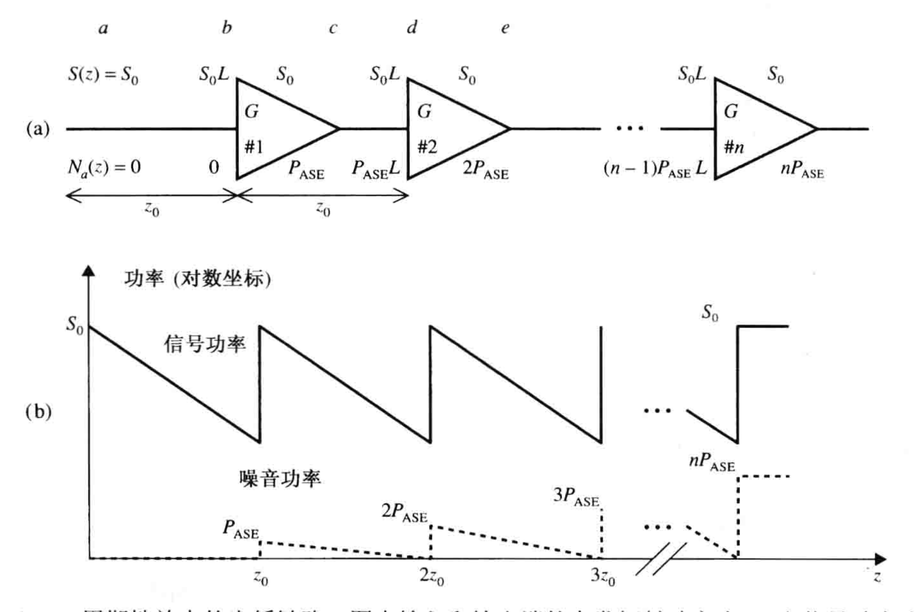


图 17.9　(a)周期性放大的光纤链路，图中输入和输出端的自发辐射功率为 N_a 和信号功率为 $S(z)$，每个放大器的输出端信号功率为 S_0。放大器以间隔距离 z_0 放置，以平衡传输损耗 L，即 $GL = 1$，P_{ASE} 是每个放大器产生的 ASE 功率。在第 n 个放大器后的总 ASE 功率 nP_{ASE}。(b)信号功率和噪声功率随光纤中传输距离变化的函数关系图。在放大器所在位置（$z_0, 2z_0, 3z_0, \cdots$），信号功率恢复到原始信号功率 S_0，ASE 功率被 P_{ASE} 增大

或

$$\frac{\mathrm{d}N_a}{\mathrm{d}z} = \gamma\mu h\nu\Delta f, \quad N_a(z) = \gamma\mu h\nu\Delta f z \qquad (17.4\text{-}15)$$

由于输入端不存在自发辐射，取 $N_a(0)=0$。由上式可以看出：ASE 功率是 z 的线性函数。把式（17.4-15）代入式（17.4-11）中，并取 $S(z)=S_0$，$\gamma=\alpha$，则

$$\mathrm{SNR}(z) = \frac{S_0}{2(1+2\mu\alpha z)h\nu\Delta f} \qquad (17.4\text{-}16)$$

当式（17.4-13）取极限情况 $z_0 \to 0$ 时，也可以得到式（17.4-16）。比较理想分布放大器和式（17.4-13）表示的分离放大器

$$(\mathrm{SNR})(z) = \frac{S_0}{2\left[1+2(z/z_0)\mu\left(\mathrm{e}^{\alpha z_0}-1\right)\right]h\nu\Delta f} \qquad (17.4\text{-}17)$$

式中 $G=\exp(\alpha z_0)$，$n = z/z_0$。

图 17.10 给出了式（17.4-16）描述的理想连续放大情况和式（17.4-13）描述的分离放大器级联的两种情况。从图中可以看出，连续放大的 SNR 比放大器间隔为 α^{-1} 的分离放大要小 2dB，因此后者是一种实用的最佳结构。在损耗系数为 0.2dB/km 的低损耗光纤中，相邻放大器的距离应为 21.7km。

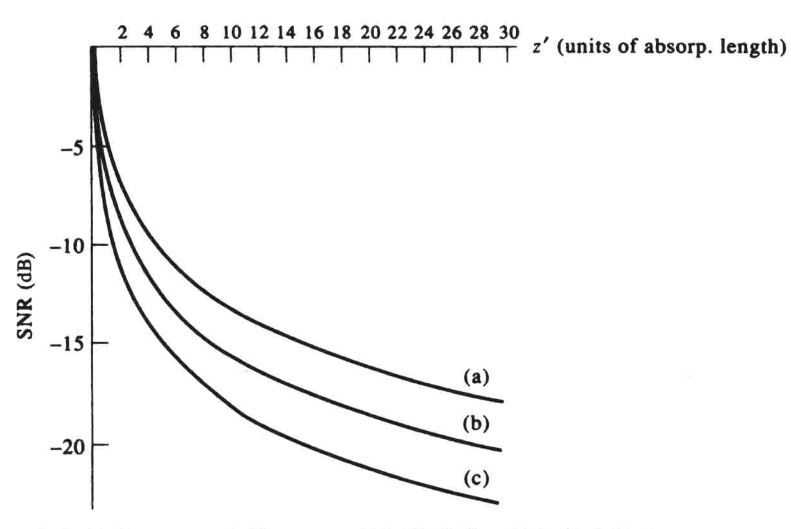


图 17.10　与初始值（z=0）比较，SNR 的退化曲线(a)连续放大情况（$\gamma=1$），（$\mu=1$）；(b)间隔为 $z_0=\alpha^{-1}$ 的周期性放大（$z'=1,2,3,\cdots;\mu=1$；曲线在 $z'=1,2,3,\cdots$ 处得到）；(c)间隔为 $z_0=2\alpha^{-1}$ 的周期性放大（$z'=2,4,6,\cdots;\mu=1$；曲线在 $z'=2,4,6\ldots$ 处得到）

图 17.11 给出了在不同放大情况下，实际链路中探测信号的 SNR 随传输距离的变化（a）连续放大，（b）间隔为 $z_0=\alpha_0^{-1}$ 的分离放大，（c）没有放大器。发射光 $P_0=5\mathrm{mW}$，$\lambda=1.55\mu\mathrm{m}$，$\Delta f=10^9\mathrm{Hz}$，$\alpha=0.2\mathrm{dB/km}$。曲线（b）中的 SNR 都是在 $z=\alpha^{-1}=21.7\mathrm{km}$ 整数倍位置处测得，也就是光放大器的输出端。曲线（c）是假设用噪声指数 $F=4\mathrm{dB}$、输入电阻 1000Ω 的接收机探测得到的曲线。

从图中可以看出，如果链路中没有光放大器，要使信号的 SNR 高于 50dB，光纤链路的

长度必须短于 100km。如果每隔 $z_0 = 2\alpha_0^{-1}$（=21.7km）距离有一个光放大器，光纤长度可以超过 1000km。

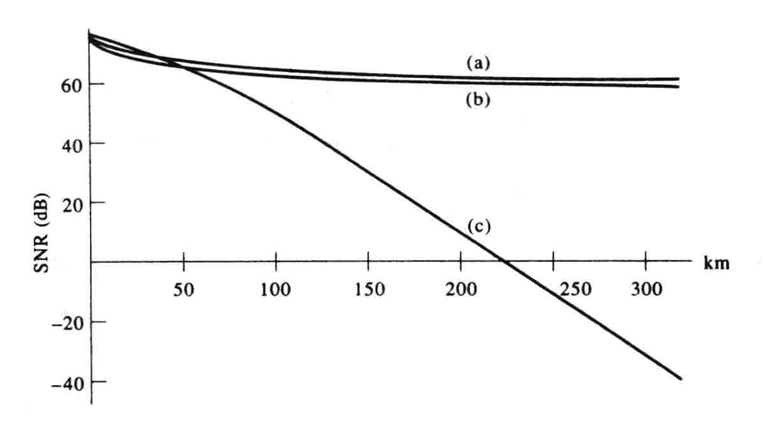


图 17.11 光纤链路中探测信号的 SNR 随传输距离的变化曲线(a)连续放大 $\gamma = \alpha(\mu = 1)$；(b)间隔为 $z_0 = \alpha_0^{-1}$ 的分离放大，SNR 在 $z = \alpha^{-1} = 21.7$km 整数倍位置处测得；(c)没有放大器，假设用噪声指数 $F = 4$dB 的接收机探测得到的曲线。入纤光功率 $P_0 = 5$mW，光纤损耗 $\alpha = 0.2$dB/km，$\lambda = 1.55\mu$m，探测带宽 $\Delta f = 10^9$Hz，接收机负载电阻 1000Ω

上面的讨论主要集中于光放大器在长距离数据传输中的应用上。光放大器的另一种应用也非常重要，就是用于拥有大量用户的分配系统中。利用光放大器可以使到达用户的光功率足够高，而不会由于接收机噪声而发生信号退化。这样，一个激光器能够服务的用户数目大概可以提高 1～3 个数量级。

17.5 拉曼光放大器

前面已经讨论了半导体光放大器（SOA）和掺铒光纤放大器（EDFA）。这两种放大器都属于块放大器，也就是说，增益集中在传输链路中的一个点上。由上节的讨论可知，分布放大器具有更好的特性，尤其是在信噪比方面。本节将讨论一种分布放大器——光纤拉曼放大器。下面的讨论与参考文献[21]类似。

如 8.6 节所述，拉曼效应是介质中光的一种非弹性散射，于 1928 年由 Chandrasekhera Venkata Raman 发现。拉曼放大的原理就是基于 8.6 节所讨论的受激拉曼散射（SRS）。光纤中的拉曼放大由 Stolen 和 Ippen 第一次观察和测量，他们在硅光纤中测得了频移接近 13.2THz 的拉曼频移。尽管利用固体激光器做泵浦源，已经在实验上实现了拉曼放大器，但在实际系统中，拉曼放大器尚未得到使用。拉曼放大器的噪声很低，并可通过适当改变泵浦光波长，实现在任意波段的光放大，是一种优良的宽带放大器。随着不同波长的高功率激光器的研制成功，获得高性能宽带拉曼放大器，已不再困难。

在拉曼放大器中，基本的受激散射过程可以如下描述：频率为 ω_L 的泵浦光子与介质中的一些微粒（如硅中的 SiO_2 分子）相互作用，微粒吸收能量为 $\hbar\omega_L$ 的光子，被激发到一个虚态上（不是本征态），然后弛豫到激发态（硅原子的一个激发振荡态）上。在这个弛豫过程中，发射一个低频的 ω_S 光子。微粒初态和终态的能量差 $\hbar(\omega_L - \omega_S)$ 就等于激发振荡态的能量。图 17.12 给出了有关受激拉曼散射的能级。

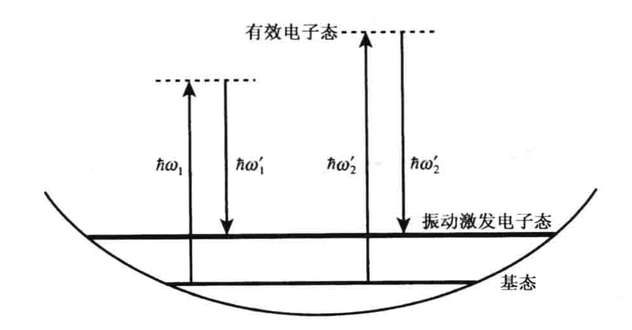


图 17.12　振动能级和斯托克斯拉曼跃迁示意图($\omega_1' < \omega_1, \omega_2' < \omega_2$)。在斯托克斯过程中，分子从基态激发到激发态（振动激发态）。该过程与泵浦光的频率无关。光子频移与分子振动频率有关。换句话说，$\omega_1 - \omega_1' = \omega_2 - \omega_2' = \omega_A$，这里 ω_A 是分子振动频率。频率为 ω_1'（或 ω_2'）的波被频率为 ω_1（或 ω_2）放大

上面主要对介质中单个微粒（如一个分子）的情况进行了讨论。当泵浦光在介质中传输，光波通道中的很多分子都将被激发到振荡态。分子在介质中以频率为 $\omega_A = (\omega_L - \omega_S)$ 的振荡运动，物理上等效于频率为 ω_A 的弹性波（或声波）在介质中的传输。运用在 9.7 节中讨论声波的粒子图象，我们知道，声波由能量为 $\hbar\ \omega_A$ 的声子组成。作为受激拉曼散射的结果，能量为 $\hbar\omega_L$ 的激光光波把能量转移到另一个低能量 $\hbar\omega_S$ 的光波中，同时在介质中产生能量为 $\hbar\omega_A$ 的声波。SRS 发生的几率正比于频率 ω_s 的光场强度。因此，随着距离的增大，频率为 ω_S 的光波被指数放大，在频率 ω_S 处的指数增益。

在光纤中，由于相互作用长度长，频率为 ω_S 的光波可以被显著地放大。图 17.12 给出了有关受激拉曼散射的能级。顺便指出，SRS 过程与泵浦光的频率无关，换句话说，拉曼放大器的增益带宽由泵浦光的频率决定，可以通过改变泵浦光频率来实现不同波段的放大，这在光纤通信中是非常好的特性。

通常，在 SRS 中斯托克斯和反斯托克斯过程都可能发生（见图 8.8）。在反斯托克斯拉曼跃迁中，分子的初态是激发振荡态，受激跃迁后分子弛豫到基态。硅光纤中的拉曼能量漂移 $\hbar(\omega_L - \omega_s) = \hbar\omega_A$ 约为 55meV，这也正是分子第一激发态的能量。在室温下（$k_B T = 26\text{meV}$），激发态很少被粒子占据，所以与斯托克斯相比，反斯托克斯的强度要小些。

当泵浦光的频率为 ω_L，斯托克斯线的增益谱以 $\omega_S = \omega_L - \omega_A$ 为中心，增益带宽由第一受激态的线宽决定。其中 ω_A 是分子的振荡频率，第一受激态的线宽与能级上分子寿命有关。在拉曼光谱学中，第一受激态的分子寿命通常可以由拉曼线的宽度推得。与克尔效应一样，拉曼散射在大部分介质中都相当微弱。但是，由于光纤的波导结构，光纤纤芯中的激光强度很大，而且激光与光纤的相互作用长度很长（100km 范围内）。因此，在光纤中可以得到显著的拉曼散射。

对于 $\lambda = 1550\text{nm}$ 波段的拉曼放大器，产生的斯托克斯波与泵浦光的波长间隔可以达到 $\Delta\lambda = 100\text{nm}$，并与泵浦光一起沿光纤向前传输。如果泵浦光是 WDM 通信系统中的一个信道，那么产生的斯托克斯波就可能和其他长波长的信道发生重叠，导致串扰和拉曼放大。拉曼放大使短波长信道发生衰减，长波长信道得到放大，WDM 中各信道的功率呈不对称分布，降低了低频信道的 SNR，增大了高频信道的串扰，从而降低了光系统的容量。因此，使用拉曼放大器时，选取合适的带宽和正确的信道分配是非常重要的。

现在研究光纤拉曼放大器中信号光和泵浦光之间的能量耦合。根据式（8.6-24）和式（8.6-25），信号光和泵浦光的拉曼耦合方程可写为

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\phi_L &= -\alpha_L\phi_L - G'_R\phi_L\phi_S \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\phi_S &= -\alpha_S\phi_S + G'_R\phi_L\phi_S
\end{aligned}
\tag{17.5-1}
$$

式中 ϕ_L 和 ϕ_S 是光通量，光通量定义为单位时间通过单位面积的光子数，由下式给出

$$
\begin{aligned}
\phi_L(x,y,z) &= \frac{I_L}{\hbar\omega_L} = \frac{1}{\hbar\omega_L}\frac{k_L}{2\mu_0\omega_L}\left|E_L(x,y,z)\right|^2 \\
\phi_S(x,y,z) &= \frac{I_S}{\hbar\omega_S} = \frac{1}{\hbar\omega_S}\frac{k_S}{2\mu_0\omega_S}\left|E_S(x,y,z)\right|^2
\end{aligned}
\tag{17.5-2}
$$

式中 z 是光波在光纤中的传输方向，α_L 和 α_S 是线性衰减系数，I_L 和 I_S 是光纤中的光强，k_L 和 k_S 是光纤中光波数（传输常数），E_L 和 E_S 是光波的电场幅值。常数 G'_R 是拉曼增益系数，由式（17.5-3）给出

$$
G'_R = \frac{12\hbar\mu_0^2\omega_L^2\omega_S^2}{k_L k_S}\mathrm{Im}\left(\chi_{R1}^{(3)}\right) = -\frac{12\hbar\mu_0^2\omega_L^2\omega_S^2}{k_L k_S}\mathrm{Im}\left(\chi_{R2}^{(3)}\right) \tag{17.5-3}
$$

上式中的 $\chi_{R1}^{(3)} = \chi_{R2}^{*(3)}$ 是拉曼散射引起的三阶非线性极化率，这已经在 8.6 节讨论了。当线性衰减系数为零时（$\alpha_L = \alpha_S = 0$），式（17.5-1）中的耦合方程符合光通量守恒，即一个频率为 ω_L 的激光光子转换为一个频率为 ω_S 的斯托克斯光子。

对于光纤拉曼放大器，泵浦光和信号光都是光纤的导波（如 LP_{01}）。信号光与泵浦光之间的功率耦合可以又式（17.5-1）在 xy 平面上积分得到。根据式（17.5-2）的定义，泵浦光和信号光功率可写为

$$
\begin{aligned}
P_L(z) &= \hbar\omega_L\int\phi_L(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{k_L}{2\mu_0\omega_L}\int\left|E_L(x,y,z)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
P_S(z) &= \hbar\omega_S\int\phi_S(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{k_S}{2\mu_0\omega_S}\int\left|E_S(x,y,z)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}
\tag{17.5-4}
$$

式（17.5.4）在整个 xy 平面内积分。同样对耦合方程（17.5-1）在整个 xy 平面内进行积分，可得到光纤中信号光和泵浦光的耦合方程

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}P_L &= -\alpha_L P_L - \frac{G'_R}{\hbar\omega_S A^R_{有效}}P_L P_S \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}P_S &= -\alpha_S P_S + \frac{G'_R}{\hbar\omega_L A^R_{有效}}P_L P_S
\end{aligned}
\tag{17.5-5}
$$

式中 $A^R_{有效}$ 是拉曼耦合的有效面积，由式（17.5-6）给出：

$$
A^R_{有效} = \frac{\int\left|E_L(x,y)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\cdot\int\left|E_S(x,y)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int\left|E_L(x,y)\right|^2\left|E_S(x,y)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y} \tag{17.5-6}
$$

从式（17.5-5）可以看出，由于 $\omega_L > \omega_S$，信号光 ω_S 增大的功率小于泵浦光的损失的功率，它们之间的差值等于转移到 $\omega_A = (\omega_L - \omega_S)$ 的分子激发功率。拉曼耦合的有效面积与每个模式的有效面积都不同，实际上，根据施瓦兹不等式，拉曼耦合的有效面积和模式的有效

面积满足

$$\sqrt{A^L_{\text{有 效}} A^S_{\text{有 效}}} \leqslant A^R_{\text{有效}} \tag{17.5-7}$$

式中 $A^L_{\text{有效}}$ 和 $A^S_{\text{有效}}$ 分别是泵浦光和信号光的有效面积。仅当两光波的波函数相等时，式（17.5-7）中的等号成立。光波的波函数与光波频率和光纤截止频率之间的频率间隔有关，因此，泵浦光和信号光的波函数可以有很大不同。

对于光纤拉曼放大器，耦合方程（17.5-5）通常写为

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} P_p &= -\alpha_p P_p - g_R \frac{\omega_p}{\omega_S} P_p P_s \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} P_s &= -\alpha_s P_s + g_R P_p P_s \end{aligned} \tag{17.5-8}$$

式中的 $P_p = P_L$ 是泵浦功率， $P_s = P_S$ 是放大信号功率， α_p 和 α_s 是线性衰减系数， ω_p 和 ω_s 是光波频率， g_R 是拉曼增益系数，由式（17.5-9）给出

$$g_R = \frac{G_R^{'}}{\hbar\omega_L A^R_{\text{有效}}} = \frac{12\mu_0^2\omega_L\omega_S^2}{A^R_{\text{有效}} k_L k_S}\mathrm{Im}\left(\chi^{(3)}_{R1}\right) = -\frac{12\mu_0^2\omega_L\omega_S^2}{A^R_{\text{有效}} k_L k_S}\mathrm{Im}\left(\chi^{(3)}_{R2}\right) \tag{17.5-9}$$

或等价于

$$g_R = \frac{24\pi}{c\varepsilon_0^2 A^R_{\text{有效}} n^2 \lambda_S}\mathrm{Im}\left(\chi^{(3)}_{R1}\right) = -\frac{24\pi}{c\varepsilon_0^2 A^R_{\text{有效}} n^2 \lambda_S}\mathrm{Im}\left(\chi^{(3)}_{R2}\right) \tag{17.5-10}$$

式中 $n^2 = n_L n_S \approx n_S^2$， n_L 和 n_S 是折射率。可以看出：拉曼增益系数（单位为 $\mathrm{m^{-1}W^{-1}}$）不仅与 $1/\lambda$ 有关，还与 $\chi^{(3)}_{R1}$ 和 $\chi^{(3)}_{R2}$ 有关。图 17.13 给出了光纤拉曼放大器的典型增益谱。如图所示，由于材料的各向异性，光纤的拉曼增益谱呈宽连续性。拉曼增益谱的实际形状与是否存在 GeO_2 等掺杂物有关。如图所示，增益谱的半高全宽（FWHM）在 $\lambda = 1500\text{nm}$ 附近大约为 $\Delta\lambda = 50\text{nm}$。在 DWDM 光网络中，光放大器所有信道的增益是否平坦非常重要，实现拉曼放大器的增益平坦，可以利用适当频率间隔的多泵浦光来泵浦拉曼放大器[23~25]。

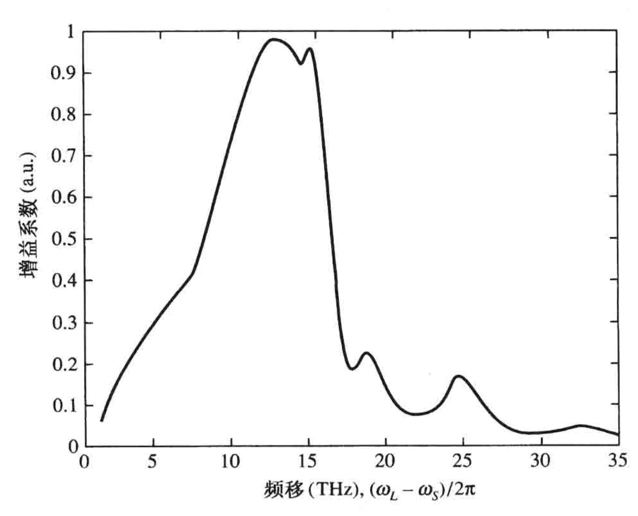


图 17.13　硅光纤拉曼放大器的增益系数随泵浦光和信号光频率间隔的变化

当两个线性衰减系数之间的差可以忽略时（如$\alpha_p=\alpha_s=\alpha$），耦合方程式（17.5-8）才有精确解。根据方程式（17.5-8），假设$\alpha=\alpha_p=\alpha_s$，光子速率（每秒光子数）耦合方程为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{P_p}{\hbar\omega_p}\right)&=-\alpha\left(\frac{P_p}{\hbar\omega_p}\right)-g_R\hbar\omega_p\left(\frac{P_p}{\hbar\omega_p}\right)\left(\frac{P_s}{\hbar\omega_s}\right)\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{P_s}{\hbar\omega_s}\right)&=-\alpha\left(\frac{P_s}{\hbar\omega_s}\right)+g_R\hbar\omega_p\left(\frac{P_p}{\hbar\omega_p}\right)\left(\frac{P_s}{\hbar\omega_s}\right)\end{aligned} \tag{17.5-11}$$

根据式（8.6-27）和式（8.6-28），方程式（17.5-11）的解为

$$\begin{aligned}P_p(z)&=P_p(0)\frac{1+m^{-1}}{1+m^{-1}\exp\left(\dfrac{\gamma}{\alpha}\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha z}\right)\right)}\exp(-\alpha z)\\ P_s(z)&=P_s(0)\frac{1+m^{-1}}{1+m\exp\left(-\dfrac{\gamma}{\alpha}\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha z}\right)\right)}\exp(-\alpha z)\end{aligned} \tag{17.5-12}$$

式中$P_p(0)$和$P_s(0)$分别是输入端（$z=0$）的泵浦光和信号光功率，拉曼指数增益系数γ由式（17.5-13）给出

$$\gamma=g_R\left(P_s(0)\frac{\omega_p}{\omega_S}+P_p(0)\right)=\frac{G_R^{'}}{\hbar\omega_p A_{有效}^R}\left(P_s(0)\frac{\omega_p}{\omega_S}+P_p(0)\right) \tag{17.5-13}$$

m是输入端（$z=0$）的光子速率比（光子速率定义为每秒钟通过输入平面$z=0$的光子数）

$$m=\frac{P_p(0)}{P_s(0)}\frac{\omega_S}{\omega_p} \tag{17.5-14}$$

大多数拉曼放大器的增益谱在 1500nm 附近，频率比（ω_S/ω_p）≈0.93。因此，参数m在输入端近似等于泵浦光功率与信号光功率之比。

对于增益大于 10dB 的拉曼放大器，参数$m\gg 1$。也就是说，在拉曼放大器中，输入的泵浦光功率远大于输入的信号光功率。在这种情况下，根据式（17.5-12），信号光功率可以表示为

$$P_s(z)=P_s(0)\exp\left(\frac{\gamma}{\alpha}\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha z}\right)\right)\exp(-\alpha z) \tag{17.5-15}$$

图 17.14 给出了在拉曼放大器中，泵浦光功率和信号光功率随相互作用长度z的变化情况。从图中可以看出，泵浦光功率与传输距离呈反比关系，这是由于一方面泵浦光把能量转移给了信号光，另一方面存在着传输损耗。由于信号光从泵浦光处获得了能量，因此随着相互作用长度z的增大，信号光功率最初随之增大。当相互作用长度增大到某值时，拉曼放大等于线性衰减，信号光功率达到最大值。根据式（17.5-15），这个相互作用长度值

$$z=L_{有效}=\frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right) \tag{17.5-16}$$

$L_{有效}$通常称为拉曼放大器的有效长度。当长度$z>L_{有效}$时，信号光功率开始下降。在图 17.14 中，有效光纤长度近似为 40km，那么在单模光纤中采用 500mW 的泵浦光就可以得到增益大于 15dB 的拉曼放大。由式（17.5-13）可知，γ与泵浦光功率有关，所以拉曼放大器的有效光纤长度$L_{有效}$与泵浦光功率有关。

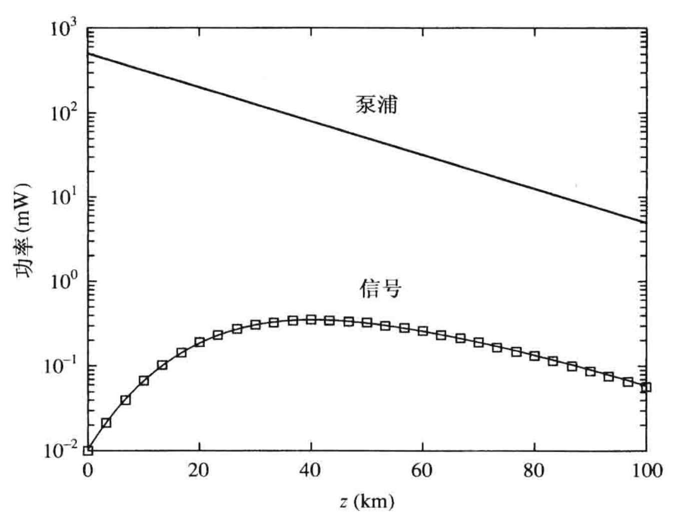


图 17.14　在光纤拉曼放大器中，泵浦光和信号光功率随 z 的变化。其中 $P_p(0)=500\text{mW}$，$P_s(0)=0.01\text{mW}$，线性衰减 $\alpha=0.046/\text{km}$（对应衰减系数 0.2dB/km），$\lambda_p=1500\text{nm}$，拉曼增益系数 $g_R=5.9\times10^{-4}\text{m}^{-1}\text{W}^{-1}$

利用式（17.5-15）和式（17.5-16），拉曼放大器的最大信号光功率表示为

$$P_s(z)_{\max}=P_s(0)\frac{\alpha}{\gamma}\exp\left(\frac{\gamma}{\alpha}-1\right)\cong P_s(0)\frac{\alpha}{g_RP_p(0)}\exp\left(\frac{g_RP_p(0)}{\alpha}-1\right)\qquad(17.5\text{-}17)$$

那么对应的最大拉曼增益为

$$G_{\max}=\frac{P_s(z)_{\max}}{P_s(0)}=\frac{\alpha}{\gamma}\exp\left(\frac{\gamma}{\alpha}-1\right)\cong\frac{\alpha}{g_RP_p(0)}\exp\left(\frac{g_RP_p(0)}{\alpha}-1\right)\qquad(17.5\text{-}18)$$

图 17.15 给出了一个最大拉曼增益随泵浦光功率 $P_p(0)$ 变化的曲线。从图中可以看出：要得到 30Db（10^3）的增益需要 800mW 左右的泵浦光功率。

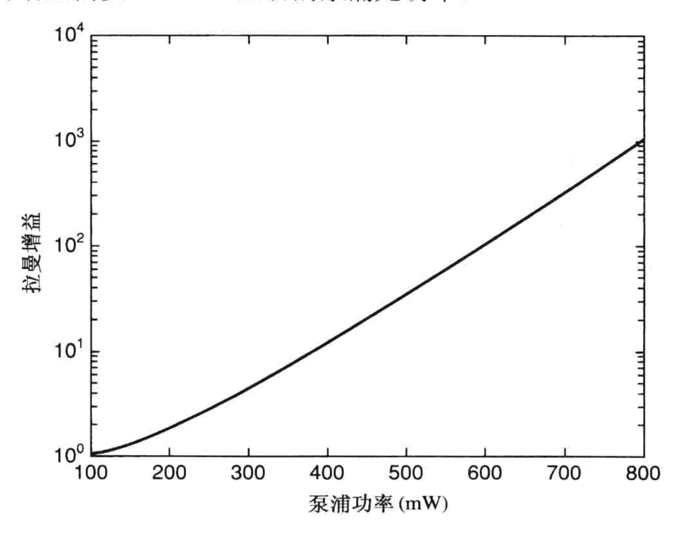


图 17.15　最大拉曼增益随泵浦功率的变化。其中 $\alpha=0.046/\text{km}$，$\lambda_p=1500\text{nm}$，拉曼增益系数 $g_R=5.9\times10^{-4}\text{m}^{-1}\text{W}^{-1}$

例：硅光纤中的最大增益。

单模硅光纤的线性衰减为 0.2dB/km，对应衰减系数为 $\alpha = 0.046/\text{km}$，假设拉曼增益系数为 $g_R = 5.9\times10^{-4}\,\text{m}^{-1}\text{W}^{-1}$，泵浦功率为 500mW。根据式（17.5-13），指数增益系数

$$\gamma = g_R\left(P_s(0)\frac{\omega_p}{\omega_s}+P_p(0)\right)\approx g_R P_p(0) = 0.295/\text{km}$$

根据式（17.5-16），拉曼放大器的有效长度为

$$L_{有效} = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right) = 40.4\text{km}$$

根据式（17.5-17），最大增益为

$$\frac{P_s(z)_{\max}}{P_s(0)} = \frac{\alpha}{\gamma}\exp\left(\frac{\gamma}{\alpha}-1\right) = 35\ \ (\text{or } 15\text{dB})$$

习题

17.1　增益波纹（以 dB 为单位）由下式给出：

$$\rho = 10\log_{10}\left(T_{\max}/T_{\min}\right)$$

证明：当 $GR = 0.0575$ 时，$\rho = 1\,\text{dB}$ 成立。

17.2

（a）证明在 F－P 放大器中，共振增益带宽的半高全宽近似为

$$\Delta\nu_{\text{FWHM}} = \frac{c}{2n_{有效}L}\frac{1-GR}{\pi\sqrt{GR}}$$

增益带宽降低，共振传输增强。

（b）SOA 的 $L = 500\mu\text{m}$, $n_{有效} = 3.6$, $G = 100$, $R = 0.008$，计算共振时的最大增益和增益带宽。

17.3　对于体积 AL（对应横截面积为 A，长为 L）中的横模，零点波动功率等于能量密度乘以光速。证明：零点波动功率为

$$P_{零点} = \frac{1}{2}h\nu\Delta\nu$$

注意：$\Delta\nu$ 中的行波数是 $\Delta\nu/(c/nL)$。

17.4

（a）自发辐射因子 α 定义为耦合到单模（通常为激光模式）中的自发辐射功率部分。

证明：如果自发辐射耦合到所有模式的功率都相等，则自发辐射因子 α 表示为

$$\alpha = \frac{c^3}{8\pi\nu^2 n^3 V\Delta\nu}$$

式中 $\Delta\nu$ 为光带宽。

（b）在行波光放大器中，通过晶面（或端面）反反射消除共振腔。自发辐射因子 β 定义为耦合到单横模（通常为输入光）中的自发辐射功率部分。

证明：如果自发辐射耦合到所有模式的功率相等，则自发辐射因子 β 表示为

$$\beta = \alpha \frac{\Delta \nu}{(c/nL)} = \frac{c^2 L}{8\pi \nu^2 n^2 V} = \frac{c^2}{8\pi \nu^2 n^2 A}$$

式中 $\Delta\nu$ 为光带宽。上式只适合于频率间隔为 c/nl 的低阶模。对于高阶模，模的频率间隔大于 c/nl，为 $c/(nl\cos\theta)$，其中，$1/\cos\theta$ 为方向因子，θ 是模的有效射线角。对于基模（或低阶模），射线角 θ 接近零。

（c）根据 4.0 节观点，空间模的数量可由下式得到

$$N_{\text{trans}} = \frac{1}{\beta} = 2\times 2\frac{\frac{1}{4}\pi k^2}{\left(\frac{\pi}{a}\frac{\pi}{b}\right)} = \frac{k^2}{\pi}A = \frac{4\pi n^2 \nu^2}{c^2}A$$

式中的 β 因子与（b）中的 β 因子相差一个系数 2，试解释原因。

17.5　一个介质波导中可以传输一组分离的限制模和一连续的激射模，这些模式彼此相互正交。为了简单起见，把这些模式全部归一化到传播方向 L 长度内的一个光子能量。在受激态上存在一个原子，自发辐射耦合到一个限制模（模 m）的比率可由费米黄金定律给出：

$$R_m = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle f|\mu\cdot E_m(x_d, y_d)|i\rangle\right|^2 \rho = \frac{2\pi}{\hbar}|\mu_{fi}|^2 |E_m(x_d, y_d)|^2 \rho$$

式中的 (i, f) 代表跃迁的初态和终态，(x_d, y_d) 是波导中偶极子的位置，$\mu_{fi} = \langle f|\mu|i\rangle$ 是电子偶极矩 μ 的矩阵元，E 是归一化电场矢量。那么自发辐射因子可写为

$$\beta_m = \frac{R_m}{\sum_m R_m} = R_m t_{\text{自发}}$$

其中自发寿命定义为

$$\frac{1}{t_{\text{自发}}} = \sum_m R_m$$

注意 R_m 与偶极子的位置有关。当波导中充满了辐射偶极子，可以取空间平均以得到自发辐射因子。

（a）证明对于特定横模（同一个传播方向、同一个偏振态）的行波，在 L 长度内其态密度可表示为

$$\rho = \frac{\mathrm{d}N}{h\mathrm{d}\nu} = \frac{n_g L}{hc}$$

式中的 n_g 为群速度。

（b）用 $P(x, y)$ 表示受激原子的空间分布，则耦合到限制模的平均自发辐射率为

$$\overline{R}_m = \frac{2\pi}{\hbar}|\mu_{fi}|^2 \rho \frac{\iint_\infty |E_m(x_d, y_d)|^2 P(x_d, y_d)\mathrm{d}x_d \mathrm{d}y_d}{\iint_\infty P(x_d, y_d)\mathrm{d}x_d \mathrm{d}y_d}$$

定义有效面积和有效折射率为

$$n_{\text{有效}}^2 = \frac{\iint_\infty n^2(x, y)|E_m(x, y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_\infty |E_m(x, y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

$$A_{有效}=\frac{\iint_{\infty}\left|E_m(x,y)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\iint_{\infty}P(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_{\infty}\left|E_m(x,y)\right|^2P(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

证明 $\overline{R}_m$ 可写为

$$\overline{R}_m=\frac{2\pi}{\hbar}\left|\mu_{fi}\right|^2\frac{2\nu}{\varepsilon_0 n_{有效}^2 A_{有效}}\frac{n_g}{c}$$

（c）假设总自发辐射率与折射率为 $n_{有效}$ 的均匀介质的自发辐射率相等：

$$\frac{1}{t_{自发}}=\frac{2\pi}{\hbar}\left|E\right|^2\left|\mu_{fi}\right|^2\frac{8\pi}{c^3}n_{有效}^2 n_g\nu^2L^3\frac{1}{h}$$

式中 h 是普朗克常数，E 是平面波的归一化幅值

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 n_{有效}^2\left|E\right|^2L^3=h\nu$$

证明：

$$\frac{1}{t_{自发}}=\frac{2\pi}{\hbar}\left|\mu_{fi}\right|^2\frac{8\pi}{c^3}n_{有效}^2n_g\nu^2L^3\frac{1}{h}\frac{2h\nu}{\varepsilon_0 n_{有效}^2L^3}=\frac{2\pi}{\hbar}\left|\mu_{fi}\right|^2\frac{16\pi}{\varepsilon_0c^3}n_g\nu^3$$

严格地说，这种假设仅当波导的横向尺寸远大于波长时才有效。对于嵌入介质波导中的偶极子的总自发辐射率，有兴趣的同学可参看参考文献[26~28]。

（d）用（b）和（c），证明自发辐射耦合到单模（一个方向和一个偏振方向）的自发辐射因子 β 可以写为

$$\beta=\overline{R}_m t_{自发}=\frac{c^2}{8\pi n_{有效}^2\nu^2A_{有效}}$$

（e）在一个长方体（横截面积为 A，长为 L）中，受激原子分布归一化，证明有效面积可写为

$$A_{有效}=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}n^2(x,y)\left|E_m(x,y)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{n_{有效}^2\int_A\left|E_m(x,y)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}A=\frac{A}{\Gamma}$$

式中 Γ 是限制因子（限制在有源区 A 中的模式能量部分）

$$\Gamma=\frac{n_{有效}^2\int_A\left|E_m(x,y)\right|^2P(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int_{-\infty}^{\infty}n^2(x,y)\left|E_m(x,y)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{\int_A\left|E_m(x,y)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int_{-\infty}^{\infty}\left|E_m(x,y)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

在这种情况下，证明自发辐射因子可以写为

$$\beta=\overline{R}_m t_{自发}=\frac{c^2}{8\pi n_{有效}^2\nu^2A}\Gamma$$

17.6

假设光纤分布网的输入信号波长为 $\lambda=1.55\mu\mathrm{m}$、功率为 $P_0=10\mathrm{mW}$。功率分配到 N 路，每一路都用一个光纤放大器进行放大，然后再分为 M 路。假设光放大器的最大输出功率为 10mW，$\Delta f=10^9\mathrm{Hz}$，接收机输入阻抗 $R=10^3\mathrm{ohms}$，$T_e=1000\mathrm{K}$。要使到达用户的最小 SNR 为 42dB，试确定下标 NM 的最大数。

17.7

把每个模式的所谓零点起浮能量 $h\nu/2$ 加到归一化信号 $\sqrt{S_0}$ ，可以推导出式（17.3-28），其中 S_0 是光功率。根据习题 17.3，带宽 $\Delta\nu$ 内的一个横模零点起浮功率为 $P_{零点}=h\nu\Delta\nu/2$ 。零点起浮谱的两个谱窗口与频率为 ω_0 的光信号发生拍频，产生调制频率为 ω_m 的噪声电流。

证明相应的光场可以写为

$$E=\sqrt{S_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_0 t+\phi_S)}+\sqrt{N_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[(\omega_0-\omega_m)t+\phi_1\right]}+\sqrt{N_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[(\omega_0+\omega_m)t+\phi_2\right]}$$

式中 S_0 是光信号功率， N_0 是零点起伏功率（如 $N_0=P_{零点}=h\nu\Delta\nu_{信号}/2$ ）， ϕ_S 、 ϕ_1 和 ϕ_2 是相位。

由于零点起伏的随机性，相位 ϕ_1 和 ϕ_2 在（0 到 2π ）范围内均匀分布。

证明：光电流可以写为

$$i=\frac{S_0 e\eta}{h\nu}\left(1+2\frac{N_0}{S_0}+2\sqrt{\frac{N_0}{S_0}}\cos(\omega_m t+\phi_2-\phi_S)+2\sqrt{\frac{N_0}{S_0}}\cos(-\omega_m t+\phi_1-\phi_S)\right)$$

式中 η 是光电转换的量子效率。

证明：频率 ω_m 处的平均平方拍电流可写为

$$\overline{\left(i_N^2\right)}=4\left(\frac{e\eta}{h\nu}\right)^2 S_0 N_0=2\left(\frac{e\eta}{h\nu}\right)^2 S_0\left(h\nu\Delta\nu_{信号}\right)$$

式中 $N_0=h\nu\Delta\nu_{信号}/2$ ， $\Delta\nu_{信号}$ 是光信号带宽。

证明

$$(\mathrm{SNR})_{输入}=\frac{S_i}{N_i}=\frac{S_0}{2h\nu\Delta\nu_{信号}}$$

与式（17.3-28）是相同的。

注意：光信号带宽 $\Delta\nu_{信号}$ 等于光探测器的电带宽： $\Delta\nu_{信号}=\Delta f$ 。

参考文献

1 Simon, J. C., Semiconductor laser amplifier for single mode optical fiber communications. *J. Opt. Commun.* **4**:51 (1983).

2 Mears, R. J., L. Reekie, I. M. Jauncey, and D. N. Payne, Low noise erbium-doped fiber amplifier operating at 1.54 mm. *Electron. Lett.* **23**:1026 (1987).

3 Hagimoto, K., et al., A 212 km non-repeatered transmission experiment at 1.8 Gb/s using LD pumped Er^{3+}-doped fiber amplifiers in an IM/direct-detection repeater system. In: *Proceedings of the Optical Fiber Conference*, Houston, TX, postdeadline Paper PDI5, 1989.

4 Olshansky, R., Noise figure for Er-doped optical fibre amplifiers. *Electron. Lett.* **24**:1363 (1988).

5 Payne, D. N., Tutorial session abstracts. In: *Optical Fiber Communication (OFC 1990) Conference*, San Francisco. Optical Society of America, Washington, DC, 1990.

6 Olsson, N. A., Semiconductor optical amplifiers. *Proc. IEEE* **80**:375 (1992).

7 Simon, J. C., GaInAsP semiconductor laser amplifiers for single mode fiber communications. *J. Lightwave Technol.* **5**:1286 (1987).

8 Saitoh, T., and T. Mukai, 1.5 mm GaInAsP traveling wave semiconductor laser amplifier. *IEEE J. Quantum Electron.* **QE-23**:1010 (1987).

9 Mukai, T., K. Inoue, and T. Saito, Homogenous gain saturation in 1.5 μm InGaAsP traveling-wave semiconductor laser amplifiers. *Appl. Phys. Lett.* **51**:381 (1987).

10 Digonnet, M. J. F. (ed.), *Rare Earth Doped Fiber Lasers and Amplifiers*. Stanford University/Marcel Dekker, New York, 1993.

11 Edagawa, N., K. Mochizuki, S. Ryu, and H. Wakabayashi, Amplification characteristics of fiber Raman amplifiers. ICICE Technical Report, 1988, translated from Japanese.

12 Armitage, J. R., Three-level fiber laser amplifier: a theoretical model. *Appl. Opt.* **27**(23):4831 (1988).

13 Morkel, P. R., and R. I. Laming, Theoretical modeling of erbium-doped fiber amplifiers with excited-state absorption. *Opt. Lett.* **14**(19):1062 (1989).

14 Desurvire, E., Analysis of erbium-doped fiber optical amplifiers pumped in the $^4I_{15/2}$–$^4I_{13/2}$ band. *IEEE Photon. Technol. Lett.* **1**:293 (Oct. 1989).

15 Giles, C. R., and D. DiGiovanni, Spectral dependence of gain and noise in erbium-doped fiber optical amplifiers. *IEEE Photon. Technol. Lett.* **2**:797 (Nov. 1990).

16 Giles, C. R., and E. Desurvire, Propagation of signal and noise in concatenated erbium-doped fiber optical amplifiers. *J. Lightwave Technol.* **9**:147 (Feb. 1991).

17 Giles, C. R., and E. Desurvire, Modeling erbium-doped fiber amplifiers. *J. Lightwave Technol.* **9**:271 (Feb. 1991).

18 Desurvire, E., *Erbium-Doped Fiber Amplifiers*. Wiley, New York, 1994.

19 Haus, H. A., The noise figure of optical amplifiers. *IEEE Photonics Technol. Lett.* **10**(11):1602 (1998).

20 Baney, D. M., P. Gallion, and R. Tucker, Theory and measurement techniques for the noise figure of optical amplifiers. In: *Optical Fiber Technology*, Vol. 6. Academic Press, New York, 2000, pp. 122–154.

21 Namiki, S., and Y. Emori, Ultrabroad-band Raman amplifiers pumped and gain-equalized by wavelength-division-multiplexed high-power laser diodes. *IEEE J. Selected Topics Quantum Electron.* **7**(1):3 (2001).

22 Stolen, R. H., and E. P. Ippen, Raman gain in glass optical waveguides. *Appl. Phys. Lett.* **22**:276 (1973).

23 Islam, M. N., Raman amplifiers for telecommunications. *IEEE J. Selected Topics Quantum Electron.* **8**(3):548 (2002).

24 Hu, J., B. S. Marks, and C. R. Menyuk, Flat-gain fiber Raman amplifiers using equally spaced pumps. *J. Lightwave Technol.* **22**(6):1519 (2004).

25 Perlin, V. E., and H. G. Winful, Optimal design of flat-gain wide-band fiber Raman amplifiers. *J. Lightwave Technol.* **20**(2):250 (2002).

26 Khosravi, H., and R. Loudon, Vacuum field fluctuation and spontaneous emission in a dielectric slab. *Proc. R. Soc. London A* **436**:373 (1992).

27 Bjork, G., S. Machida, Y. Yamamoto, and K. Igeta, Modification of spontaneous emission rate in planar dielectric microcavity structures. *Phys. Rev. A* **44**:669 (1991).

28 Chance, R. R., A. Prock, and R. Silbey, Molecular fluorescence and energy transfer near interfaces. In: *Advances in Chemical Physics*, Vol. 37, I. Prigogine and S. A. Rice (eds.). Wiley, New York, 1978, pp. 1–65.

第 18 章　量子噪声和压缩态的经典处理

18.0　引言

本书在多处讨论了噪声，这主要在光信号探测、激光和光参变放大中讨论。在本书的最后一章中自发辐射放大（ASE）以及它在光信号不确定性的重要影响。光学中一些最重要的现象包括零点能涨落，导致光波不能被准确测量，因此不能用经典理论处理。这些现象可以用量子电磁场（即将量子力学应用于光学）来解释。量子力学理论拓展到光学即“量子光学”。该领域的一些重要课题包括振幅和相位噪声（涨落），光生电子统计，以及新的非线性压缩场。这些课题相对与以前的理论都太重要了。在本章中，当我让学生去接受量子力学里的任何一个结论时，我们发现这是可以用经典方法来处理上述所有的提到的现象，而且得出的结论也和量子光学一致。

18.1　不确定性原理与量子噪声

量子力学中人们所熟知的不确定度是与同时测量粒子的位置（x）和动量（p）有关的，并且可以判定不确定度Δp 和Δx 的乘积必须服从[1]

$$\Delta p\, \Delta x \geqslant \hbar/2 \tag{18.1-1}$$

式中 $\hbar \equiv h/2\pi$，h=6.62377×10^{-34}Js 是普朗克常量。这些基本的不确定度延伸到光学测量上，如对光场的振幅和相位的测量。对它们的专门研究包括了量子光学的形式[1~3]。因为在这本书中没有讲述量子力学，所以不能从最基本的原理来阐述这个课题。但是我们可以利用很多推理，甚至可以仅仅从一个量子力学的基本推理——不确定性原理，来为这些重要现象得到数值修正结果。

不确定性原理

让我们将一些在共振器中振荡模的经典单色电场表示为

$$e(t) = |E|\cos(\omega t + \beta) = \mathrm{Re}[E\exp(i\omega t)] \tag{18.1-2}$$

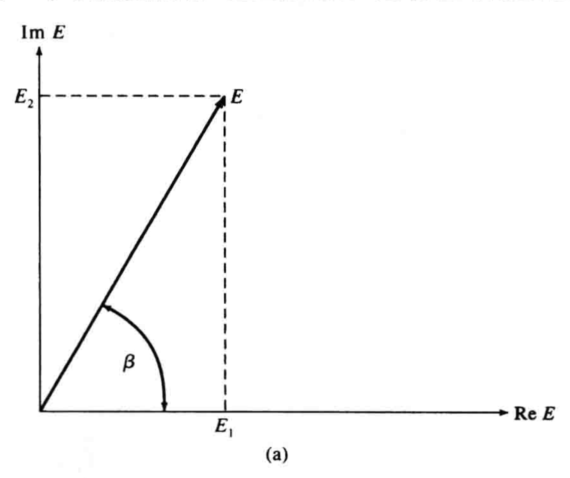
式中β是相角

$$E = |E|\exp(i\beta) = E_1 + iE_2 \tag{18.1-3}$$

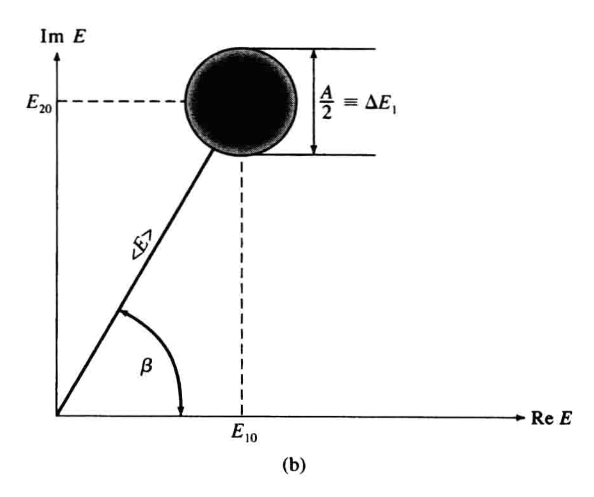
是表示光场的复相矢量。如图 18.1（a）所示，复平面上的矢量 E，它的长度为$|E|$，E_1 和 E_2 分别是沿着实数轴和虚数轴的投影。

根据量子力学[1,2]式（18.1-3）中的复振幅 E 是不能被精确确定的。这个不确定度在图 18.1(b)中用“不确定度圆”表示。通过测量，将会发现在这个圆的中心附近最可能是相矢量 E 的顶端位置。这里我们强调，相矢量并不代表场矢量的方向，而是表示复数场实部与虚部之间的相对关系。相应这个圆心的光场相矢量可以用$\langle E\rangle$——“E 的预期值”来表示。这个

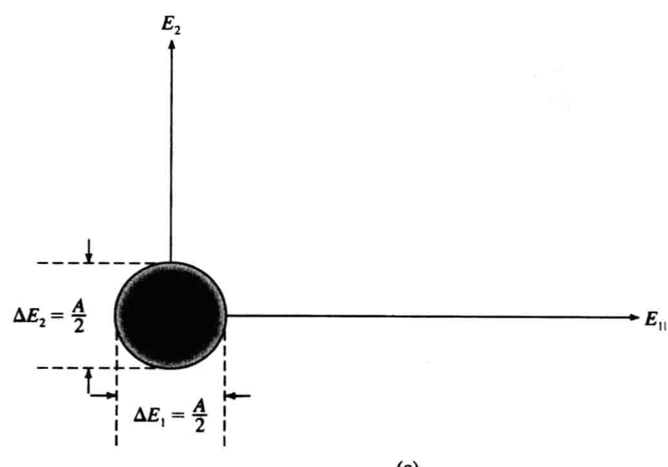
预期值与量子力学的系综平均值相对应，也就是说与在完全相同情况下对大量的独立场测量得出的平均值相对应。这个预期值无论在哪个方面都要服从麦克斯韦方程，如同在经典物理中一样。甚至在量子力学中有一个埃伦费斯特（Ehrenfest）定理也可用来证明它。



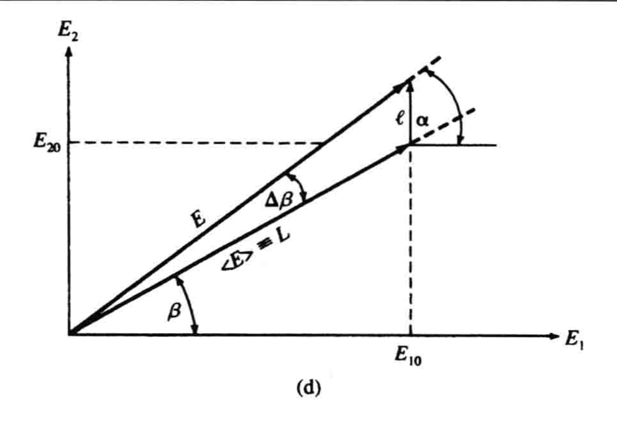
(a)



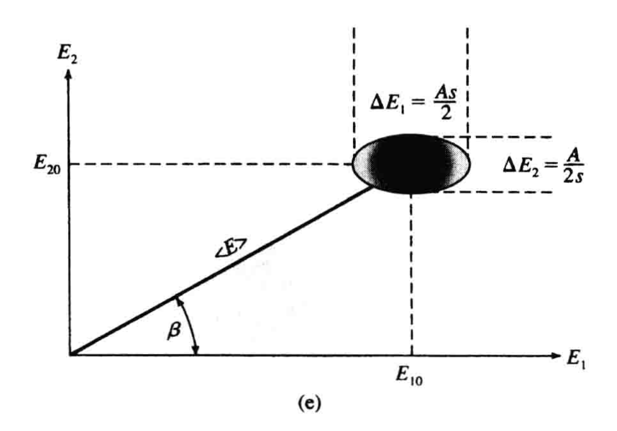
(b)



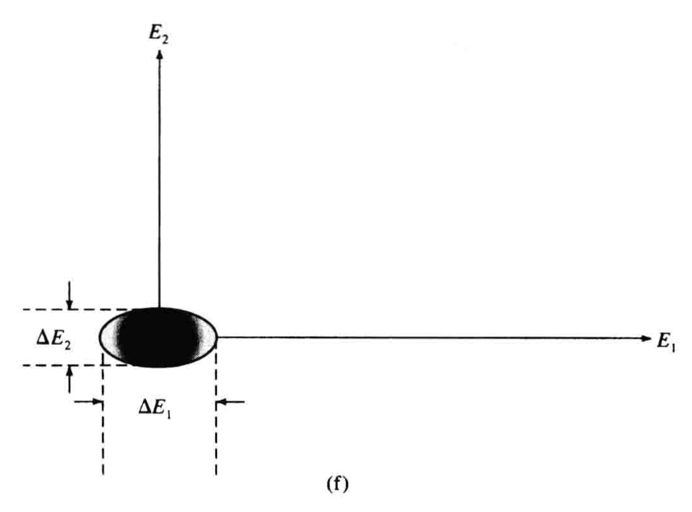
(c)



(d)



(e)



(f)

图 18.1　(a)光场的经典相矢量表示；(b)一个与量子光学一致的相干光场的表示，在这种特殊情况中 $\Delta E_1=\Delta E_2$；(c)一个未激发的真空（$n=0$）光学模的电磁场表示；(d)一个经典相矢量端点与随机相矢量和的等效表示；(e)一个“压缩的”场；(f)一个“压缩的”真空（$n=0$）模。压缩因子 $s>1$（续）

如果重复测量投影值 E，$E_1(t)$和 $E_2(t)$，将会产生不同的测量结果，而且这种对 $E(t)=E_1(t)+iE_2(t)$的测量结果将趋于会聚在这个圆的中心，这也就图形化地描述了 $E(t)$的顶端最可

能出现的位置。从 $E(t)$值中内在的量子弥散产生的不确定度，可以被认为是量子噪声。我们在本章下面的内容中将要阐述在光学测量中这种噪声引起的后果。

量子物理中的一个经典近似可以将一个电磁模的基本单色场表示为

$$e(t)=\mathrm{Re}[E\exp(i\omega t)]=E_1(t)\cos\omega t-E_2(t)\sin\omega t \tag{18.1-4}$$

式中复振幅 $E(t)$ 是

$$E(t)=E_1(t)+iE_2(t) \tag{18.1-5}$$

本章的讨论将电磁场严格限制在量子相干态的经典分析（即理想激光输出）。根据量子力学，复场振幅不能精确确定，因此，需要将 $E(t)$作为随机复变量来处理。这样，可以将 $E_1(t)$和 $E_2(t)$写成

$$\begin{aligned}E_1(t)&=\langle E_1(t)\rangle+\delta E_1(t)=E_{10}+\delta E_1(t)\\ E_2(t)&=\langle E_2(t)\rangle+\delta E_2(t)=E_{20}+\delta E_2(t)\end{aligned} \tag{18.1-6}$$

式中$\langle E_{1,2}(t)\rangle\equiv E_{10,20}$是 $E_{1,2}(t)$的预期值，$\delta E_1(t)$和$\delta E_2(t)$表示基本的量子力学不确定度。它们的平均值为零$\delta\langle E_{1,2}(t)\rangle=0$，而且是非相关的$\langle\delta E_1(t)\delta E_2(t)\rangle=0$。$\langle\rangle$在任何情况下都表示系综（或时间）平均。

在继续描述这些涨落之前，我们将会像量子光学中的惯例一样，发现将模的平均电场和该模中的平均光子数 n 联系起来是很有用的，这在$\left|\delta E_{1,2}\right|\ll\left|E_{10,20}\right|$（见习题 18.1）的条件下是合理的。假设这个模的体积是 V，介质的介电常量为ε，应用式（1.4-22），可以得到

$$\frac{\varepsilon}{2}\left|\langle E\rangle\right|^2V=\frac{\varepsilon}{2}(E_{10}^2+E_{20}^2)V=n\hbar\omega=\text{体积}V\text{内的场能} \tag{18.1-7}$$

因此，平均电场振幅可以用平均光子数 n 表示为

$$|\langle E\rangle|=\sqrt{E_{10}^2+E_{20}^2}=\left(\frac{2\hbar\omega}{\varepsilon V}\right)^{1/2}\sqrt{n}\equiv A\sqrt{n} \tag{18.1-8}$$

式中 A 由式（18.1-9）给出

$$A\equiv\left(\frac{2\hbar\omega}{\varepsilon V}\right)^{1/2} \tag{18.1-9}$$

在这个定义下，常量 A 在物理上表示，具有能量$\hbar\omega$的光子在空间体积为 V 中平均电场振幅的绝对值。平均电场振幅与光子数 n 的平方根成正比。

如果我们把基本的量子力学不确定度的测量定义为

$$\begin{aligned}\Delta E_1&=\langle(E_1-E_{10})^2\rangle^{1/2}=\langle(\delta E_1(t))^2\rangle^{1/2}\\ \Delta E_2&=\langle(E_2-E_{20})^2\rangle^{1/2}=\langle(\delta E_2(t))^2\rangle^{1/2}\end{aligned} \tag{18.1-10}$$

然后根据量子力学[2]可得

$$\Delta E_1\Delta E_2\geqslant\frac{A^2}{4} \tag{18.1-11}$$

换句话说，同时测量电场的两个分量（E_1）和（E_2）必须满足不确定度关系，这是本章唯一应用的量子力学原理。

在大多数激光振荡器中输出的光场都处于一种所谓的相干态[1,2]，在这状态中，不确定度被分成两个正交相等的分量

$$\Delta E_1 = \Delta E_2 = \frac{A}{2} \tag{18.1-12}$$

为了数学上简单起见，定义归一化的无量纲场如下

$$x_1 \equiv E_1/A$$
$$x_2 \equiv E_2/A \tag{18.1-13}$$
$$x \equiv E/A = x_1 + ix_2$$

从物理上来看，复随机数 x 是光子数幅值的度量。事实上，按照方程式（18.1-8）$|\langle x\rangle|^2$ 是平均光子数。应用这些无量纲参数，可以将不确定度关系式（18.1-11）重写为

$$\Delta x_1\, \Delta x_2 \geqslant \frac{1}{4} \tag{18.1-14a}$$

对于相干态的场，式（18.1-14a）变成

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \frac{1}{2} \tag{18.1-14b}$$

不确定性关系式（18.1-11）的一个深刻的推理是它甚至可以应用于一种经典物理中未激发的模式当中，也就是说，n=0，这就是所谓的真空状态，这和式（18.1-6）中 E_{10}=E_{20} =0 相一致，并在图 18.1（c）中描述。在电磁场中的两个正交分离的不确定度不相等，也就是说 $\Delta x_1 \neq \Delta x_2$，这被称为压缩态。最近应用非线性光学技术[4,5]制作了这种压缩态。被压缩的电磁场在图 18.1（e）中示出。对于压缩态，不确定度圆变成椭圆。压缩的真空场在图 18.1（f）中示出。

如果不用正交振幅 E_1 和 E_2 来表示光场，我们也可以用图 18.1（d）来描述，在此图中一个场矢量 $E(t)$可以写成平均相矢量$\langle E\rangle$与一个随机相矢量$\delta E=E(t)-\langle E\rangle$。将随机相矢量写成

$$\delta E = \ell(t) = |\ell|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \delta E_1(t) + i\delta E_2(t) \tag{18.1-15}$$

式中相矢量涨落的相角α从$\langle E\rangle$中测量得到，对于一个相干场，相角α在 0 和 2π之间均匀分布。从而得到

$$\langle |\ell|^2\rangle = \langle(\delta E_1(t))^2\rangle + \langle(\delta E_2(t))^2\rangle = 2\langle(\delta E_1(t))^2\rangle = \frac{A^2}{2} \tag{18.1-16}$$

不确定性关系式（18.1-11）的一些推论将在下面进行研究。

电磁场模式中的能量

电磁场 $E(t)$能量的经典表达式为

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon V(EE^*) \tag{18.1-17}$$

并且不失普遍性，选择$\langle E\rangle$的方向作为实轴，得到

$$E = L + |\ell|\cos\alpha + i|\ell|\sin\alpha \tag{18.1-18}$$

式中ℓ是与统计涨落对应的复随机相位，L 是复场振幅的平均值，$L\equiv\langle E\rangle$。既然我们将 E 作为随机变量来处理，那么电磁场的能量也是一个随机变量。应用方程式（18.1-18），电磁场能量的平均值可以写为

$$\langle U\rangle = \frac{\varepsilon V}{2}\langle L^2 + 2L|\ell|\cos\alpha + |\ell|^2\cos^2\alpha + |\ell|^2\sin^2\alpha\rangle$$
$$= \frac{\varepsilon V}{2}\left(L^2 + \langle|\ell|^2\rangle\right) = \frac{\varepsilon V}{2}\left(A^2 n + \frac{1}{2}A^2\right) = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) \quad (18.1\text{-}19)$$

这里我们应用式（18.1-8）中的 A 的定义，利用α在 0 到 2π之间均匀分布，则$\langle\sin^2\alpha\rangle=\langle\cos^2\alpha\rangle=1/2$，以及$\langle\cos\alpha\rangle=0$。虽然式（18.1-19）是从相干态导出的，但是它对于一般情况的量子场也适用。

由此得出结论：当经典场是零时，就是说，按照式（18.1-8），$\langle E\rangle$和 n 是零时，那么模能量是 $\hbar\omega/2$。这就是所谓的模的零点振动能量。这是量子力学中的一个主要结论，而且没有经典物理的相应公式。

能量的不确定度

模式能量的不确定度可由式（18.1-20）定义

$$\langle(\Delta U)^2\rangle = \langle U - \langle U\rangle^2\rangle = \langle U^2\rangle - \langle U\rangle^2 \quad (18.1\text{-}20)$$

对 U 应用式（18.1-17），并取$\langle\cos^m\alpha\rangle=0$，$m$ 为奇数，并且忽略项 $O(l^4/L^4)$，得到

$$\Delta U \equiv \langle(\Delta U)^2\rangle^{1/2} = \hbar\omega\sqrt{n} \quad (18.1\text{-}21)$$

或者根据共振器中光子的数量 N，得出

$$\Delta N = \frac{\Delta U}{\hbar\omega} = \sqrt{n} \equiv \sqrt{\langle N\rangle} \quad (18.1\text{-}22)$$

和

$$(\Delta N)^2 = \langle N\rangle = n \quad (18.1\text{-}23)$$

式中$\Delta N\equiv\langle(N-n)^2\rangle^{1/2}$。

将光子数 N 的方均不确定度和光子数平均值$\langle N\rangle$的关系式（18.1-23）运用于光子数为 N 的共振器中光子数**泊松**概率分布公式[2,3]

$$p(N,n) = \frac{n^N e^{-n}}{N!} \quad (18.1\text{-}24)$$

对于一个平均光子数为 n 的电磁场，发现 N 个光子的概率为 $p(N,n)$。

相位不确定度

由于 E 是一个复随机变量，电场相位β也是一个随机变量，光场相位的不确定度$\Delta\beta$可以以下推导得到。定义一组新随机变量δF_1和δF_2

$$\delta F_1 = \delta E_1\cos\beta + \delta E_2\sin\beta$$
$$\delta F_2 = -\delta E_1\sin\beta + \delta E_2\cos\beta \quad (18.1\text{-}25)$$

式中β是复场 E 的相角。按照这个定义，随机变量δF_1平行于平均场$\langle E\rangle$，而随机变量δF_2垂直于平均场$\langle E\rangle$。式（18.1-25）可以看做坐标转动。容易看出

$$\Delta F_1\,\Delta F_2 = \Delta E_1\,\Delta E_2 \geqslant \frac{A^2}{4} \quad (18.1\text{-}26)$$

不确定量ΔF_1与平均场振幅以及光子数有关，而不确定量ΔF_2与相角不确定量$\Delta\beta$有关。因

此，假设 $\Delta F_1 \ll |\langle E\rangle|$ 和 $\Delta F_2 \ll |\langle E\rangle|$ 时有

$$\Delta\beta = \frac{\Delta F_2}{|\langle E\rangle|}$$

$$\Delta N = \left(\frac{|\langle E\rangle + \Delta F_1|^2}{A^2}\right) - \left(\frac{|\langle E\rangle|^2}{A^2}\right) \cong 2\frac{|\langle E\rangle|\Delta F_1}{A^2} \tag{18.1-27}$$

换句话说，当平均光子数远大于 1（即 $n \gg 1$）时，式（18.1-27）成立。将式（18.1-26）和式（18.1-27）联立，可以得到

$$\Delta N \Delta\beta = \frac{1}{2} \tag{18.1-28}$$

式中对于相干场取等号。这是一个最重要的结论，它表明，在对光场的相位（β）和激励能级 N 的同时测量受到基本量子物理限制。

光电子数的涨落

如果一个光波入射到一个理想的光电探测器上，探测器是范围是 A_{rea}，那么每一次入射和光子的吸收，理论上都有一个光电子释放出来。因而产生的电流

$$i = \frac{ec\varepsilon|E|^2 A_{\text{rea}}}{2\hbar\omega} \tag{18.1-29}$$

这里 e 就是电子电荷量的绝对值，探测器上的入射功率是 $c\varepsilon|E|^2 A_{\text{rea}}/2$。如果我们使用无量纲场 $x \equiv E/A$（A 由式（18.1-13）定义），电流的表示式成为

$$i = \frac{ecA_{\text{rea}}}{V}(x_1^2 + x_2^2) \cong \frac{ecA_{\text{rea}}}{V}(x_{10}^2 + x_{20}^2 + 2x_{10}\,\Delta x_1 + 2x_{20}\,\Delta x_2) = i_0 + \Delta i \tag{18.1-30}$$

式中随机变量可写成 $x_1 = x_{10} + \Delta x_1$，$x_2 = x_{20} + \Delta x_2$，平均电流和电流涨落可以写成

$$i_0 = \frac{ecA_{\text{rea}}}{V}(x_{10}^2 + x_{20}^2) = \frac{ec}{L_R}n \tag{18.1-31}$$

$$\Delta i = 2\frac{ec}{L_R}(x_{10}\,\Delta x_1 + x_{20}\,\Delta x_2) \tag{18.1-32}$$

式中应用 $x_{10}^2 + x_{20}^2 = |\langle E\rangle|^2 / A = n$，$L_R = \dfrac{V}{A_{\text{rea}}}$ 用于式（18.1-9）中的量子化体积的长度。

在时间间隔 $\tau = L_R/c$（相应的带宽是 $B=1/\tau$）产生的光电子总数是

$$N_e = \frac{i\tau}{e} = \frac{[i_0 + \Delta i(t)]\tau}{e} \tag{18.1-33}$$

平均光电子数由式（18.1-34）给出

$$\langle N_e\rangle = \frac{i_0\tau}{e} = n \tag{18.1-34}$$

确切地说，这是平均光子数。光电子变化由式（18.1-35）给定

$$\begin{aligned}\langle \Delta N_e^2\rangle &= \frac{\langle(\Delta i)^2\rangle\tau^2}{e^2} = 4\langle(x_{10}\,\Delta x_1 + x_{20}\,\Delta x_2)^2\rangle = 4\,[x_{10}^2\langle(\Delta x_1)^2\rangle + x_{20}^2\langle(\Delta x_2)^2\rangle] \\ &= 4(x_{10}^2 + x_{20}^2)\langle(\Delta x_1)^2\rangle = n\end{aligned} \tag{18.1-35}$$

在这里我们应用 $\langle\Delta x_1\Delta x_2\rangle=0$，式（18.1-18）和 $\langle\Delta i\rangle=0$，以及

$$\langle(\Delta x_1)^2\rangle=\langle(\Delta x_2)^2\rangle\equiv\langle(\Delta x)^2\rangle=\frac{1}{4} \tag{18.1-36}$$

我们注意到，上面的方程对相干态成立。由此得出结论，在相干态中对于入射光辐射产生的光子数

$$\langle\Delta N_e^2\rangle=\langle N_e\rangle \tag{18.1-37}$$

因此光电子数 N_e 服从泊松统计。泊松统计运用于这种情况，在这种情况中每一事件（这里指电子释放）是完全随机的和独立的，因此每一个单独的释放事件之间没有相关。这恰恰是在 10.3 和 10.4 部分表现出的现象，这种现象导致了电流谱中的散粒噪声

$$S_i(\nu)=\frac{i_N^2(\nu)}{\Delta\nu}=2ei_0 \tag{18.1-38}$$

这里 $S_i(\nu)$是在辐射频率为 ν 时光电流的谱密度。这样我们已经说明，光电流中的电子散粒噪声起源于量子场的涨落。

可探测的最小光功率增量

大部分用来测量电磁波功率的方法都采用可以把吸收的光能转变为输出电流的探测器。一个理想的探测器中，它可以每吸收一个光子就释放一个电子到外部电路，有

$$i=\frac{Pe}{\hbar\omega} \tag{18.1-39}$$

这里 P 是要测量的光功率。让我们将电流的测量累积 Ts，这样得到聚集的电子（空位）总数是

$$N_e(T)=\frac{iT}{e}=\frac{PT}{\hbar\omega}\quad\Rightarrow\quad P=\frac{\hbar\omega}{T}N_e(T) \tag{18.1-40}$$

在功率测量中的均方不确定度因此可以表示为

$$\langle(\Delta P)^2\rangle=\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right)^2\langle(\Delta N_e)^2\rangle=\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right)^2\langle N_e(T)\rangle \tag{18.1-41}$$

在最后一个等式中，我们应用式（18.1-37）。在观测时间间隔 T 中收集的电子平均数可以表示为

$$\langle N_e(T)\rangle=\frac{\langle P\rangle}{\hbar\omega}T \tag{18.1-42}$$

因此，在功率测量时的均方不确定度

$$\langle(\Delta P)^2\rangle=\frac{\hbar\omega}{T}\langle P\rangle \tag{18.1-43}$$

我们可任意地定义：能探测的最小功率为它的均方根涨落等于其平均值，即

$$\langle P\rangle_{\min}=\langle(\Delta P)^2\rangle^{1/2} \tag{18.1-44}$$

可以得到

$$P_{\min}=\hbar\omega B=\hbar\omega\,\Delta\nu \tag{18.1-45}$$

$B=\Delta\nu=1/T$ 是电流累积系统的带宽。人们总是把 $\hbar\omega B$ 量看成是最小的可探测功率。在 11.4 节中对此有详细的说明。$\hbar$ 的存在表示功率不确定度 $\left\langle(\Delta P)^2\right\rangle^{1/2}$ 可以认为是一种量子噪声。

18.2　光场的压缩态

下列情况是可能的，即获得一个相干的光场，例如激光的输出，或减少正交分量之一的涨落，例如在牺牲ΔE_2的同时减少ΔE_1的涨落，反之亦然。结果的不确定度图解就趋于椭圆，而此时$\Delta E_1 \Delta E_2$的乘积仍保留其最初的值 $A^2/4$。这就被称为压缩[4,5]。压缩一般都是通过对光场的非线性光学运算来完成的。一个最通常的完成压缩的方法就是通过简并光学参变放大，这在 8.6 节中讨论过。在这简并过程中，“泵浦”频率是“信号”频率的两倍：$\omega_{抽运} = 2\omega_{信号}$。要说明在这种情况下压缩是怎么完成的，首先需要回到参变放大的论题。

方程式（8.4-10）描述了光学参变放大。在简并相位匹配的参变放大器的情况下，有公式

$$\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega \qquad \omega_3 = 2\omega$$

如果指定在频率为ω的场复振幅是 E，根据式（8.4-10）和式（8.4-11），放大器方程就成为

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}z} = -i\frac{g}{2}E^* \tag{18.2-1}$$

参变放大系数为

$$g = \frac{\omega d}{n_0}\sqrt{\mu/\varepsilon_0}\,E_3 \tag{18.2-2}$$

式中 d 是有效非线性系数，E_3 是泵浦光波（频率为 2ω）的电场振幅，n_0 是介质的折射率。由于耦合常量 g 与泵浦场的复振幅 E_3 成正比，因此 g 是复数。通常在没有损耗的情况下，在 z=0 处，泵浦场可表示为

$$E_3(t) = -|E_3|\sin 2\omega t = \frac{i|E_3|}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\omega t}) = \mathrm{Re}(E_3\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega t}) \tag{18.2-3}$$

这种选择确定了时间基准。在这种情况中，$E_3 = +i|E_3|$，耦合常量 g 是虚数，式（18.2-1）假设为下面的形式

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{2}|g|E^* \tag{18.2-4}$$

将式（18.1-2）中频率为ω的“信号”场用它的正交振幅 E_1 和 E_2 来表示是很方便的：

$$E = (E_1 + iE_2),\quad E_1 = \frac{1}{2}(E + E^*),\quad E_2 = \frac{-i}{2}(E - E^*) \tag{18.2-5}$$

因此，与时间有关的（“信号”）场可以由式（18.2-6）给出

$$e(t) = \mathrm{Re}[E\exp(i\omega t)] = \mathrm{Re}[(E_1 + iE_2)\exp(i\omega t)] = E_1\cos\omega t - E_2\sin\omega t \tag{18.2-6}$$

如果将式（18.2-5）中的第一个等式代入式（18.2-4）中，可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E_1}{\mathrm{d}z} &= \frac{|g|}{2}E_1\\ \frac{\mathrm{d}E_2}{\mathrm{d}z} &= -\frac{|g|}{2}E_2\end{aligned} \tag{18.2-7}$$

因此参变放大器在 $z = L$ 处的输出光场为

$$E_1(L)=E_1(0)\exp\left(\frac{|g|}{2}L\right)=E_1(0)s$$
$$E_2(L)=E_2(0)\exp\left(-\frac{|g|}{2}L\right)=\frac{E_1(0)}{s} \tag{18.2-8}$$

根据图 18.1（e），这里的压缩因子 s 被定义为

$$s=\exp(|g|L/2)$$

这里 L 是参变放大器的相互作用长度。因此简并参变放大看上去导致了一个正交分量(E_1)的放大和另一个正交分量(E_2)的衰减。选择哪个分量被放大，要由泵浦光场 E_3 的相位来决定。这可用图 18.2 来说明。如果我们将场振幅表示为式（18.1-3），包括它们的准量子力学涨落，那么最后两个方程式就变成

$$E_1(L,t)=[E_{10}(0)+\delta E_1(0,t)]\exp\left(\frac{|g|L}{2}\right)$$
$$E_2(L,t)=[E_{20}(0)+\delta E_2(0,t)]\exp\left(-\frac{|g|L}{2}\right) \tag{18.2-9}$$

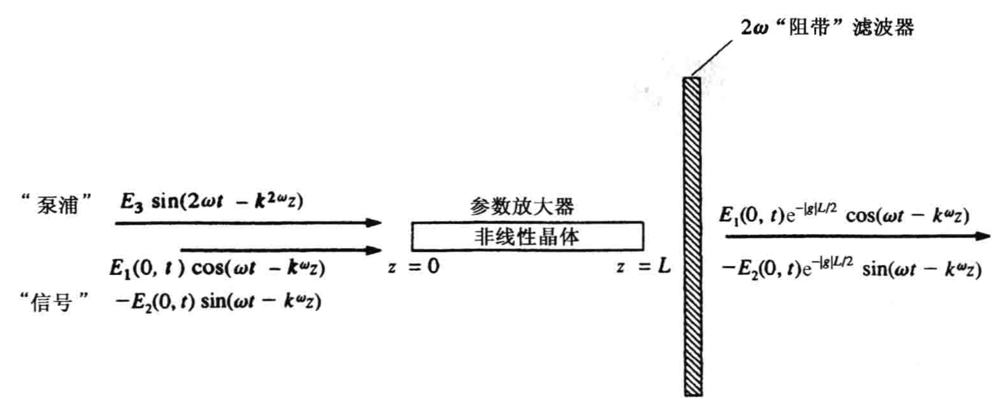


图 18.2　一个简并参变放大器（泵浦频率是信号频率的两倍），被用于产生压缩场

这里 δE_1 和 δE_2 分别表示输入场的量子涨落。因此发现平均场 E_{10} 和 E_{20} 以及涨落 $\delta E_1(t)$ 和 $\delta E_2(t)$ 通过非线性参变相互作用而放大（或衰减）。输出（$z=L$）的涨落是

$$\Delta E_1(L)\equiv\langle\langle\delta E_1(L,t)\rangle^2\rangle^{1/2}=\Delta E_1(0)\exp\left(\frac{|g|L}{2}\right)=\frac{A}{2}\exp\left(\frac{|g|L}{2}\right)$$
$$\Delta E_2(L)\equiv\langle\langle\delta E_2(L,t)\rangle^2\rangle^{1/2}=\Delta E_2(0)\exp\left(-\frac{|g|L}{2}\right)=\frac{A}{2}\exp\left(-\frac{|g|L}{2}\right) \tag{18.2-10}$$

式中 A 由式（18.1-9）给出。

不确定度的乘积

$$\Delta E_1(L)\,\Delta E_2(L)=\Delta E_1(0)\,\Delta E_2(0)=\frac{A^2}{4} \tag{18.2-11}$$

保持不变，虽然现在这个不确定度的面积是椭圆而不是圆。图 18.3（a）示出了当 $\exp\left(\frac{|g|L}{2}\right)=2$ 时的情形。

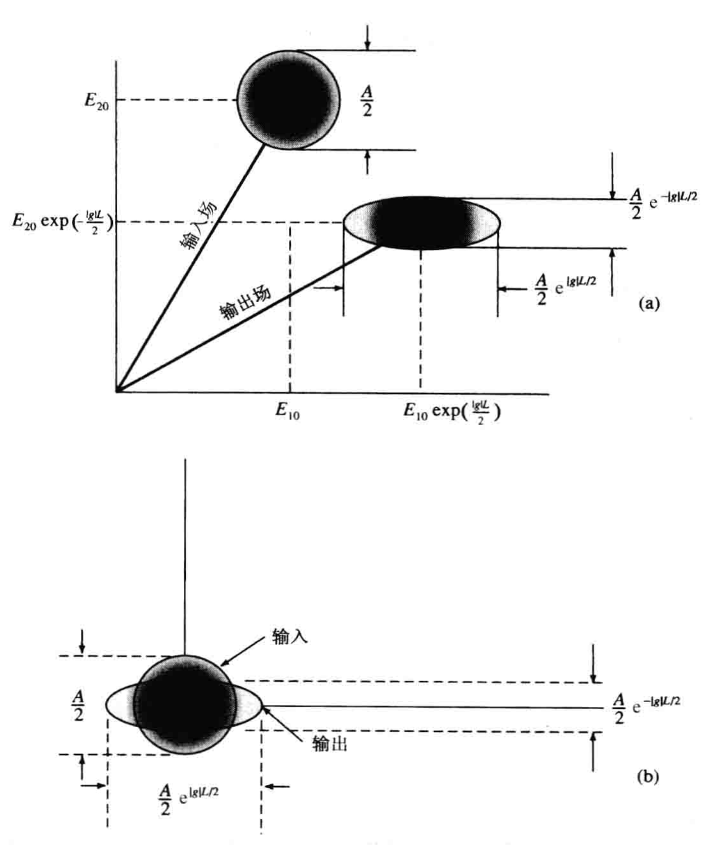


图 18.3　(a)在图 18.2 中所示的简并参变放大器的输入场以及当 $\exp(|g|L/2)=2$（6dB 压缩）时的压缩输出场；(b)除了输入场是零外，其余与(a)相同的情形

一个参变放大器在没有输入的情况下是特别有趣的。用经典物理的观点，我们期望没有输出。可是用量子力学的观点，存在一个输入场，这个场被称为所谓的真空场，这用图 18.1(c)中的圆心在原点圆来表示。当 $\langle E_1\rangle=\langle E_2\rangle=0$ 时，这个场可以用经典物理并通过图 18.1(a)描绘出来。将输入场（z=0 处）写为

$$
\begin{aligned}
&e_{\text{in}}(t)=\text{Re}\{[\delta E_1(0,t)+i\delta E_2(0,t)]\exp(i\omega t)\}=\delta E_1(0,t)\cos\omega t-\delta E_2(0,t)\sin\omega t\\
&\langle\delta E_1(0,t)\rangle=\langle\delta E_2(0,t)\rangle=0\\
&\langle(\delta E_1(0,t))^2\rangle=\langle(\delta E_2(0,t))^2\rangle=\frac{A^2}{4}
\end{aligned}
\tag{18.2-12}
$$

当 $E_{10}(0)=E_{20}(0)=0$ 时，由式（18.2-9）可以得出输出结果

$$
\begin{aligned}
E_1(L,t)&\equiv\delta E_1(0,t)\exp\left(\frac{|g|L}{2}\right)\\
E_2(L,t)&\equiv\delta E_2(0,t)\exp\left(-\frac{|g|L}{2}\right)
\end{aligned}
\tag{18.2-13}
$$

因此，输出场为

$$e_{\text{输出}}(t) = \Delta E_1(0,t)\exp\left(\frac{|g|L}{2}\right)\cos\omega t - \Delta E_2\ (0,t)\ \exp\left(\frac{-|g|L}{2}\right)\sin\omega t$$

是与一个零平均值但是具有压缩真空涨落的场相应——所谓的压缩真空态。在这情形中当参变增益 $\exp(|g|L)=4$ 时的输入（圆形）和输出（椭圆）的涨落如图 18.3（b）所示。

压缩态的实验验证

通常用来说明压缩态的实验装置[5]如图 18.4 所示。一个非线性晶体用做参变放大，它将输入电磁波 $E\exp(i\omega t)$ 放大。放置在参变放大器后面的光学滤波器用来阻挡泵浦光波，在一个均衡零差接收机上，一个光学参变放大器输出频率为ω的光场与一本地振荡器输出的高功率、频率也为ω的光场相混频，这个本地振荡光场与频率为 2ω 的泵浦光场相干。（通常这两个场都来自频率为ω中的同一主激光振荡器。）这两个复振幅分别为 $E_1 = 1/\sqrt{2}[E(t) - E_L(t)]$ 和 $E_2 = 1/\sqrt{2}[E(t) + E_L(t)]$ 复合场分别被光电探测器 D_1 和 D_2 检测。检测到的电流 i_1 和 i_2 相减。净电流 $i_2–i_1$ 输入到光谱分析仪上，光谱分析仪可以显示（$i_2–i_1$）的光谱密度，根据式（10.2-5）和式（10.2-7）光谱密度是和〈$(i_2–i_1)^2$〉成正比的。根据式（11.1-2）探测到的光电流由下列公式给出

$$i_1 = KE_1(t)E_1^*(t) = \frac{K}{2}[E(t) - E_L(t)][E^*(t) - E_L^*(t)]$$
$$i_2 = \frac{K}{2}[E(t) + E_L(t)][E^*(t) + E_L^*(t)] \tag{18.2-14}$$

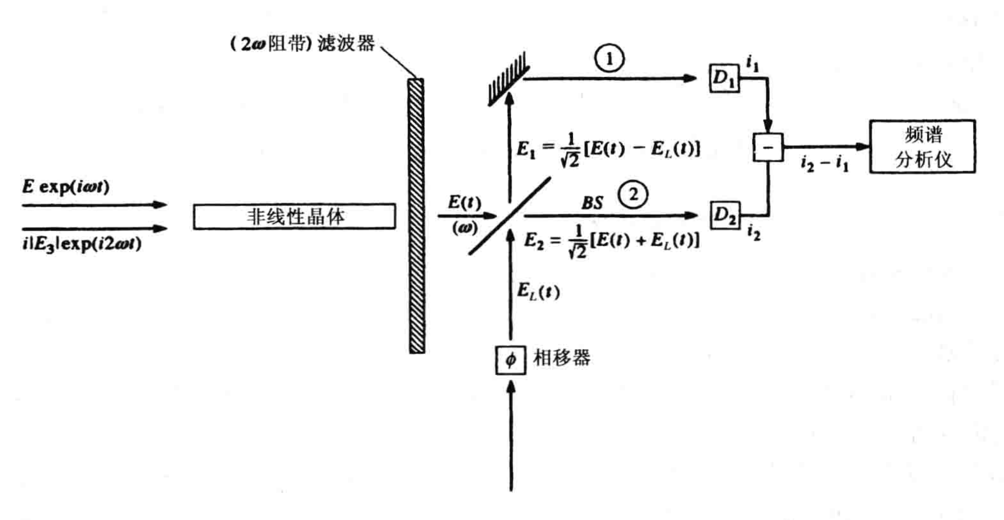


图 18.4　一个均衡零差接收机，用来测量电磁场中真空涨落的压缩态。这种压缩态是由于简并参变放大而造成的。因为因子 $\exp(i\omega t)$已被省略，所以在零差接收机部分上只标有复振幅

式中 K 是探测器常量。这样，电流差的结果是

$$i_2 - i_1 = K[E_L^*(t)E(t) + \text{c.c.}] \tag{18.2-15}$$

这个结果说明了用均衡零差接收机的原因。因为输出电流（$i_2–i_1$）只包括了混合的乘积项（“信号” ×本机振荡器），因此本地振荡器光场中的涨落 $\Delta E_L(t)$，会使光电流 i_1 和 i_2 中产生

“大”项 $E_L\Delta E_L^*(t)$，并在电流差中相互抵消。这些项会在只有单个探测接收器时掩饰信号项 $E_L^*E(t)$。

在大部分最近有关说明压缩态的实验中[4,5]，存在对参变放大器的零输入。在这种情况下，参变放大器的输出可以通过方程式（18.2-9）及 $E_{10}(0)=E_{20}(0)=0$ 给出

$$E(t)=\delta E_1(0,t)\exp\left(\frac{|g|L}{2}\right)+i\delta E_2(0,t)\exp\left(-\frac{|g|L}{2}\right) \tag{18.2-16}$$

这也就是在真空压缩态。在电子束分束器上的本地振荡器场的复振幅被认为是平均场与涨落项的总和。也许此涨落是由基本量子或其他原因造成的。一个相位因子 $\exp(i\phi)$可以解释为相移器

$$E_L(t)=[E_{L0}+\delta E_L(t)]\exp(i\phi) \tag{18.2-17}$$

在不失一般性的情况下，E_{L0} 可以看成是个实数。用最后两个等式代替在式（18.2-15）中的 $E_L(t)$ 和 $E(t)$，并且忽视包括 $\Delta E_L(t)$ 在内的项，因为 $\Delta E_L(t) << E_{L0}$，结果为

$$(i_2-i_1)=2KE_{L0}\left[\delta E_1(0,t)\exp\left(\frac{|g|L}{2}\right)\cos\phi-i\delta E_2(0,t)\exp\left(-\frac{|g|L}{2}\right)\sin\phi\right] \tag{18.2-18}$$

因为 $\langle\delta E_1(t)\rangle$ 和 $\langle\delta E_2(t)\rangle$ 都是零，(i_2-i_1) 的时间平均值（即一般用灵敏电表测出的电量）也是零。这个问题可以通过取(i_2-i_1)的平方来避免。通常通过一个光谱分析仪来完成[5]，光谱分析仪可以给出输入$f(t)$的光谱密度 $S_f(\Omega)$，这在 10.2 节中有过讨论，这里

$$\left\langle f^2(t)\right\rangle=\int_0^\infty S_f(\Omega)\mathrm{d}\Omega$$

在我们的实验中，输入是$f(t)=i_2(t)-i_1(t)$，所以，在 $S_{(i_2-i_1)}(\Omega)$ 是恒量的情况下，光谱分析仪的输出与式（18.2-19）成正比

$$\begin{aligned}S_{(i_2-i_1)}(\Omega)\propto\langle(i_2-i_1)^2\rangle&=4K^2E_{L0}^2[\langle(\delta E_1(0,t))^2\rangle\exp(|g|L)\cos^2\phi+\langle(\delta E_1(0,t))^2\rangle\exp(-|g|L)\sin^2\phi]\\&=K^2E_{L0}^2A^2[\exp(|g|L)\cos^2\phi+\exp(-|g|L)\sin^2\phi]\end{aligned} \tag{18.2-19}$$

这里应用式（18.1-6）以及$\langle\delta E_1(t)\delta E_2(t)\rangle=0$。

图 18.5 示出了此类实验的典型结果。观察到的光电流涨落与本地振荡器场的相位ϕ有关是与式（18.2-19）一致的，并且对真空涨落的压缩构成了明显的验证。水平虚线表示的是当光学参变放大器被锁住时的结果。

通过在图 18.6 中的曲线来观察压缩态是有启发的，图中实际的正弦光场对应于图 18.1（e）中不确定度椭圆内部的六个代表点。我们想起每一个点表示一次场复振幅可能实现。图 18.6（a）中表示的是没有压缩的情况（s=0），而图 18.6（b）中表示的是 x=2.5,s=4,β=0 的压缩态。我们注意到在压缩态中我们可以将频率（或相位）测量精度的提高来换取振幅波动的提高，这是在性质上符合式（18.1-15）的。图 18.6（c）是真空状态（$\langle E\rangle$=0），包括了图 20.1（c）的代表点的曲线，而压缩态即图 18.1（f）则在图 18.1（d）中示出。

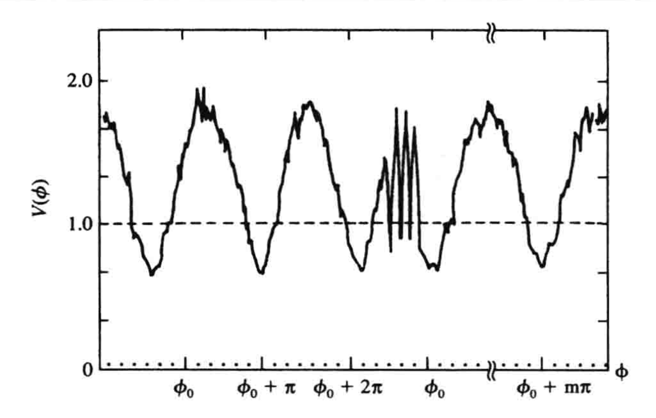
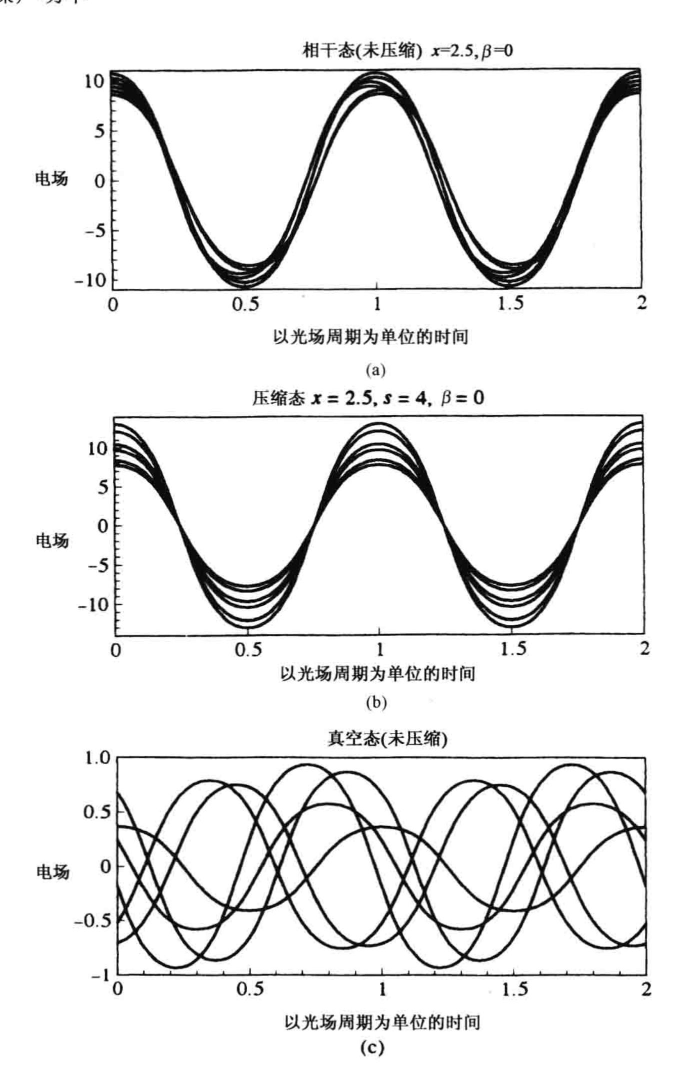


图 18.5　测量说明压缩态下相位与量子涨落有关。压缩态通过参变放大器而获得。从均衡零差接收机中得到的方均根电压与本地振荡器相位ϕ的关系在图中显示。噪声电压集中在$\nu = 1.8\text{MHz}$。当参变放大器锁住时，$|g| = 0$，此时的输出如图中水平的虚线表示，与相位ϕ无关。点代表的是相对于非真空压缩态(也就是$|g|=0$)输入时的 50%的电子噪声功率[5]



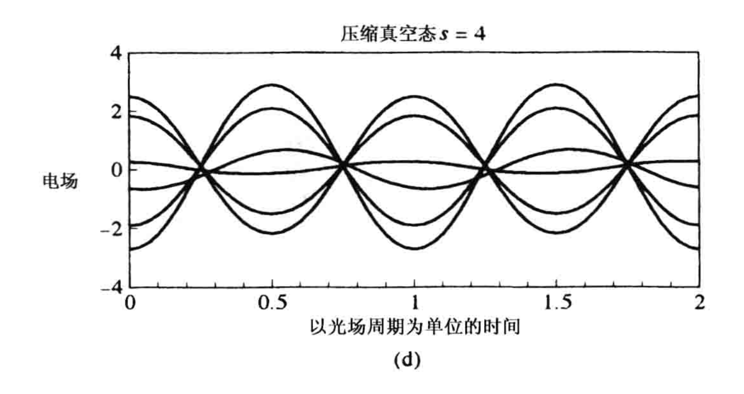


图 18.6　各表示：(a) 未压缩压的电场，(b)压缩态（s=4），(c)未压缩的"真空"电场，(d) 压缩的（s=4）"真空"电场

另外一种类型的压缩——"数字压缩"，缘自于光电流噪声水平低于散粒噪声，可以在半导体激光二极管中出现[6]。按照方程（18.1-28），光子数不确定度与相位不确定度的关系为 $\Delta N \Delta \beta = \frac{1}{2}$。光子数不确定度的压缩将导致相位角不确定度的增大。对于相位不敏感的光电探测器，光子数压缩可以导致低噪声。当激光器的注入电流是个较高的常量或者比较合适，频率依赖于反馈时，这种压缩就产生了[7]。这种激光也许会发现在例如通信[8]，原子测量[9]上比较实用。图 18.7 就是这种压缩的实验数据曲线。

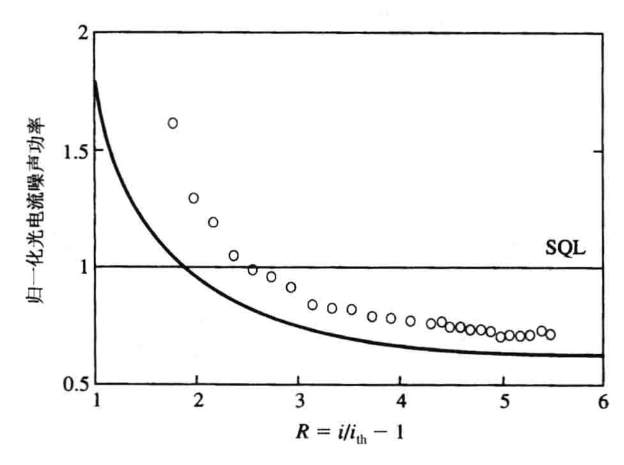


图 18.7　频率 $\nu = 29$MHz 时光电流噪声电流频谱密度与半导体激光器注入电流的函数关系曲线。i_{th} 为振荡阈值电流。SQL——标准量子极限，它与散粒噪声相对应（引自参考文献[7]）

总的来说，应该值得去提醒我们自己，这章中的经典物理处理看上去很好地描述了精确的量子物理处理结果——但是最高只能针对二阶电场乘积问题。如果我们被问到一些更难的问题，例如包括一些提高到三阶或更高的电场的期待值的问题，那么这种经典物理方法就失效了。

习题

18.1

（a）比较$|\langle E\rangle|^2$和$\langle|E|^2\rangle$，这里 E 由式（18.1-6）给出，证明：

$$\langle|E|^2\rangle = E_{10}^2 + E_{20}^2 + \langle(\delta E_1)^2\rangle + \langle(\delta E_2)^2\rangle$$
$$= |\langle E\rangle|^2 + \langle(\delta E_1)^2\rangle + \langle(\delta E_2)^2\rangle$$

对于正随机变量，$|\langle E\rangle|^2 < \langle|E|^2\rangle$。

（b）利用相角β，可以将电场写成

$$E_1 = |E|\cos\beta \text{ 和 } E_2 = |E|\sin\beta$$

证明：对于有确定光子数（即$\Delta N = 0$）的电磁场，$E_{10} = E_{20} = 0$。

具有确定光子数的量子电磁场被称为量子数态，这些态对应的相位是完全不确定的。对于这些态，式（18.1-7）不适用。

18.2　在量子光学中，电磁场的哈密顿算符可以写成

$$H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$$

式中$a^\dagger$和a分别表示产生算符和湮灭算符。这些算符满足下列关系

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \text{ 以及 } a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

式中$|n\rangle$是哈密顿算符的本征态。这些哈密顿算符的本征态称为具有确定光子数的量子数态。此时，电磁场的能量与量子谐振子完全相同。换句话说

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})|n\rangle$$

相干态$|\alpha\rangle$定义为湮灭算符a的本征态。即

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

式中α是本征值。相干态又可以用量子数态的线性组合来表示

$$|\alpha\rangle = \sum_n c_n|n\rangle$$

（a）证明

$$c_n = c_0\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\text{，这里}\quad |c_0|^2 = \exp\left(-|\alpha|^2\right)$$

换句话说，一个归一化的相干态可以写成

$$|\alpha\rangle = \sum_n c_n|n\rangle = \sum_n c_0\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2}\sum_n\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$

当$\alpha = 0$的相干态是真空态，即

$$|\alpha = 0\rangle = |0\rangle$$

（b）量子数算符可以写成$N = a^\dagger a$，证明：

$$N|n\rangle = a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle$$
$$\langle N\rangle = \langle\alpha|N|\alpha\rangle = |\alpha|^2$$
$$\langle\alpha|a|\alpha\rangle = \alpha, \langle\alpha|a^\dagger|\alpha\rangle = \alpha^*$$
$$\langle\alpha|a^2|\alpha\rangle = \alpha^2, \langle\alpha|a^{\dagger 2}|\alpha\rangle = \alpha^{*2}$$
$$\langle\alpha|a^\dagger a|\alpha\rangle = \langle\alpha|aa^\dagger|\alpha\rangle - 1 = |\alpha|^2$$

（c）在一个相干态中找到 N 个光子的概率是

$$p(N) = |c_N|^2 = |\langle N|\alpha\rangle| = e^{-|\alpha|^2}\frac{|\alpha|^2}{N!}$$

证明：

$$\langle N\rangle \equiv \sum_n np_n = |\alpha|^2$$
$$(\Delta N)^2 \equiv \left\langle\left(N - \langle N\rangle\right)^2\right\rangle \equiv \sum_n \left(n - \langle N\rangle\right)^2 p_n = |\alpha|^2 = \langle N\rangle$$

18.3　将电磁场量子化并写成

$$e(t) = \mathrm{Re}\left(Ee^{i\omega t}\right) = E_1\cos(\omega t) - E_2\sin(\omega t) = \frac{A}{2}\left(a^\dagger e^{i\omega t} + ae^{-i\omega t}\right)$$

式中 $a^\dagger$ 和 a 分别表示产生算符和湮灭算符。

（a）证明 E_1 和 E_2 可以写成

$$E_1 = \frac{A}{2}\left(a^\dagger + a\right), E_2 = \frac{A}{2}\left(a^\dagger - a\right)$$

以及

$$\langle\alpha|E_1|\alpha\rangle = \frac{A}{2}\left(\alpha + \alpha^*\right), \langle\alpha|E_2|\alpha\rangle = \frac{A}{2i}\left(\alpha^* - \alpha\right)$$

本征值 α 与平均场 $\langle E\rangle$ 有关，找出它们之间的关系。

（b）证明：

$$\langle\alpha|E_1^2|\alpha\rangle = \frac{A^2}{4}\langle\alpha|(a^{\dagger 2} + a^2 + a^\dagger a + aa^\dagger)|\alpha\rangle$$
$$= \frac{A^2}{4}(\alpha^2 + \alpha^{*2} + 2\alpha\alpha^* + 1)$$
$$\langle\alpha|E_2^2|\alpha\rangle = \frac{A^2}{4}\langle\alpha|(-a^{\dagger 2} - a^2 + a^\dagger a + aa^\dagger)|\alpha\rangle$$
$$= \frac{A^2}{4}(-\alpha^2 - \alpha^{*2} + 2\alpha\alpha^* + 1)$$
$$(\Delta E_1)^2 = \langle\alpha|E_1^2|\alpha\rangle - \langle\alpha|E_1|\alpha\rangle^2 = \frac{A^2}{4}$$
$$(\Delta E_2)^2 = \langle\alpha|E_2^2|\alpha\rangle - \langle\alpha|E_2|\alpha\rangle^2 = \frac{A^2}{4}$$

这证明了相干态情形下的式（18.1-12）。

18.4　两个具有不同本征值 α 和 α' 的相干态近似正交。证明：

$$|\langle\alpha|\alpha'\rangle|^2 = \exp\left(-|\alpha - \alpha'|^2\right)$$

18.5　对于一个具有确定频率 ω 的单色场，相角的不确定量为 $\Delta\beta$ 可以转化为时间的不确定量。换句话说

$$\Delta\beta = \omega\Delta t$$

式中 Δt 是时间不确定量。证明 $\Delta N\Delta\beta \geqslant \frac{1}{2}$ 是下列不确定关系的直接结果：

$$\Delta U\Delta t \geqslant \hbar/2$$

式中 U 是电场的能量。

参考文献

1. See, for example, A. Yariv, *Quantum Electronics*, 4th ed. Wiley, New York, 1988, p. 13.
2. Glauber, R. J., Coherent and incoherent states of radiation fields. *Phys. Rev.* **131**:2776 (1963).
3. Louisell, W. H., *Radiation and Noise in Quantum Electronics*. McGraw-Hill, New York, 1964.
4. Yuen, H. P., and J. H. Shapiro, Generation and detection of two-photon coherent states in degenerate four wave mixing. *Opt. Lett.* **4**:334 (1979).
5. Wu, L., J. H. Kimble, J. L. Hall, and H. Wu, Generation of squeezed states by parametric down conversion. *Phys. Rev. Lett.* **57**:2520 (1986).
6. Yamamoto, Y., S. Machida, and O. Nilsson, Amplitude squeezing in a pump-noise-suppressed laser oscillator. *Phys. Rev. A* **34**:4025 (1986).
7. Kitching, J., A. Yariv, and Y. Shevy, Room temperature generation of squeezed light from a semiconductor laser with weak optical feedback. *Phys. Rev. Lett.* **74**:3372 (1995).
8. Saleh, B. E. A., and M. C. Teich, Information transmission with number-squeezed light. *Proc. IEEE* **80**:451 (1992). Also by the same authors, *Fundamentals of Photonics*, Wiley, New York, 1991, pp. 414–416.
9. Wieman, C. E., and L. Hollberg, Using diode lasers for atomic physics. *Rev. Sci. Instrum.* **62**:1 (1991).

附录 A　柱面坐标下的波动函数和贝塞尔函数

这里我们给出柱面坐标下的波动方程和贝塞尔函数的解。在柱面坐标（r, ϕ, z）下，矢量微分算符和拉普拉斯算符具有如下形式：

$$\Delta\psi = \boldsymbol{u}_r \frac{\partial\psi}{\partial r} + \boldsymbol{u}_\phi \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} + \boldsymbol{u}_z \frac{\partial\psi}{\partial z}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}A_\phi + \frac{\partial}{\partial z}A_z$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{u}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_\phi\right) + \boldsymbol{u}_\phi\left(\frac{\partial}{\partial z}A_r - \frac{\partial}{\partial r}A_z\right) + \boldsymbol{u}_z\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi) - \frac{\partial}{\partial\phi}A_r\right)$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

式中ψ是标量函数，$\boldsymbol{A}$ 是矢量函数。

因为大多数光纤的折射率分布 $n(r)$是柱形对称的，所以采用柱面坐标更为方便。其场分量为 $E_r, E_\phi, E_z, H_r, H_\phi$和$H_z$。由于单位矢量 $\boldsymbol{u}_r$ 和 $\boldsymbol{u}_\phi$均不是常数矢量，所以包含横向分量（E_r, E_ϕ, H_r, H_ϕ）的波动方程非常复杂。然而，对于电场矢量的 z 分量而言，其波动方程仍然比较简单

$$(\nabla^2 + k^2)\begin{bmatrix} E_z \\ H_z \end{bmatrix} = 0 \tag{A-1}$$

式中 $k^2 = \omega^2 n^2 / c^2$，∇^2 是拉普拉斯算符，定义为

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

通常，柱形结构中波的传播问题可以先求出 E_z 和 H_z，然后用 E_z 和 H_z 来表示 E_r, E_ϕ, H_r和H_ϕ。因为比较关心沿着波导轴向（z 轴）的传播，假设

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}(r, \phi) \\ \boldsymbol{H}(r, \phi) \end{bmatrix} \exp[i(\omega t - \beta z)] \tag{A-2}$$

也就是，假设取相同的 z 和 t 时，场矢量的每个分量都与$\exp[i(\omega t - \beta z)]$有关。采用柱面坐标中的场分量表示的麦克斯韦旋度方程可以写成

$$i\omega\varepsilon E_r = i\beta H_\phi + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}H_z \tag{A-3a}$$

$$i\omega\varepsilon E_\phi = -i\beta H_r - \frac{\partial}{\partial r}H_z \tag{A-3b}$$

$$i\omega\varepsilon E_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}H_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\phi) \tag{A-3c}$$

和

$$-i\omega\mu H_r = i\beta E_\phi + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}E_z \qquad \text{(A-4a)}$$

$$-i\omega\mu H_\phi = -i\beta E_r - \frac{\partial}{\partial r}E_z \qquad \text{(A-4b)}$$

$$-i\omega\mu H_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}E_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_\phi) \qquad \text{(A-4c)}$$

利用方程式（A-3a），式（A-3b），式（A-4a）和式（A-4b），可以求出用 E_z 和 H_z 表示的 E_r, E_ϕ, H_r 和 H_ϕ。它们分别为

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{-i\beta}{\omega^2\mu\varepsilon-\beta^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}E_z + \frac{\omega\mu}{\beta}\frac{\partial}{r\partial\phi}H_z\right) \\ E_\phi &= \frac{-i\beta}{\omega^2\mu\varepsilon-\beta^2}\left(\frac{\partial}{r\partial\phi}E_z - \frac{\omega\mu}{\beta}\frac{\partial}{\partial r}H_z\right) \end{aligned} \qquad \text{(A-5)}$$

$$\begin{aligned} H_r &= \frac{-i\beta}{\omega^2\mu\varepsilon-\beta^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}H_z - \frac{\omega\varepsilon}{\beta}\frac{\partial}{r\partial\phi}E_z\right) \\ H_\phi &= \frac{-i\beta}{\omega^2\mu\varepsilon-\beta^2}\left(\frac{\partial}{r\partial\phi}H_z + \frac{\omega\varepsilon}{\beta}\frac{\partial}{\partial r}E_z\right) \end{aligned} \qquad \text{(A-6)}$$

这表明：上述关系足以确定 E_z 和 H_z，从而唯一确定波的解，余下的分量可以通过式（A-5）和式（A-6）确定。利用方程式（A-2）与 z 有关的假设，波动方程式（A-1）变成

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + (k^2-\beta^2)\right)\begin{bmatrix}E_z\\H_z\end{bmatrix} = 0 \qquad \text{(A-7)}$$

上述偏微分方程是可分离的，其解采取如下形式

$$\begin{bmatrix}E_z\\H_z\end{bmatrix} = \psi(r)\exp(\pm il\phi) \qquad \text{(A-8)}$$

式中 $l = 0,1,2,3,\cdots$，因此 E_z 和 H_z 均为ϕ的单值函数。方程式（A-7）变为

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \left(k^2-\beta^2-\frac{l^2}{r^2}\right)\psi = 0 \qquad \text{(A-9)}$$

式中ψ=E_z，H_z。

方程式（A-9）是贝塞尔微分方程，其解为 l 阶的贝塞尔函数。如果 $k^2-\beta^2>0$，方程式（A-9）的通解为

$$\psi(r) = c_1J_l(hr) + c_2Y_l(hr) \qquad \text{(A-10)}$$

其中 $h^2 = k^2-\beta^2$，c_1 和 c_2 是常数，J_l 和 Y_l 分别是 l 阶的第一和第二类贝塞尔函数。如果 $k^2-\beta^2<0$，方程式（A-9）的通解为

$$\psi(r) = c_1I_l(qr) + c_2K_l(qr) \qquad \text{(A-11)}$$

式中 $q^2 = \beta^2-k^2$，c_1 和 c_2 是常数，I_l 和 K_l 分别是 l 阶的第一和第二类修正贝塞尔函数。

为了继续进行物理解，在大宗量和小宗量的情形下，我们需要这些函数的渐近形式。为了简单，仅仅给出主要项，表示如下。

设 $x \ll 1$：

$$
\begin{aligned}
&J_l(x) \to \frac{1}{l!}\left(\frac{x}{2}\right)^l \\
&Y_0(x) \to \frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{x}{2} + 0.5772\cdots\right) \\
&Y_l(x) \to -\frac{(l-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^l \qquad\qquad l = 1, 2, 3, \cdots \\
&I_l(x) \to \frac{1}{l!}\left(\frac{x}{2}\right)^l \\
&K_0(x) \to -\left(\ln\frac{x}{2} + 0.5772\cdots\right) \\
&K_l(x) \to \frac{(l-1)!}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^l
\end{aligned}
\tag{A-12}
$$

设 $x \gg 1$：

$$
\begin{aligned}
&J_l(x) \to \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\cos\left(x - \frac{l\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\
&Y_l(x) \to \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\sin\left(x - \frac{l\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\
&I_l(x) \to \left(\frac{1}{2\pi x}\right)^{1/2} e^x \\
&K_l(x) \to \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x}
\end{aligned}
\tag{A-13}
$$

在这些表达式中，假设 l 是非负整数。从小的 x 的渐近形式到大的 x 的渐近形式，其过渡发生在 $x \sim l$ 区域内。

对于径向的行波，引入汉克尔函数通常很方便，汉克尔函数定义为

$$
\begin{aligned}
H_m^{(1)}(x) &= J_m(x) + iY_m(x) \\
H_m^{(2)}(x) &= J_m(x) - iY_m(x)
\end{aligned}
\tag{A-14}
$$

式中 $H_m^{(1)}(x)$ 是第一类的汉克尔函数，$H_m^{(2)}(x)$ 是第二类的汉克尔函数。当 $x \gg 1, l$ 时

$$
\begin{aligned}
H_m^{(1)}(x) &\to \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\exp\left[j\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] \\
H_m^{(2)}(x) &\to \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\exp\left[-j\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{A-15}
$$

加上与时间有关的方程式（A-2），$H_m^{(2)}(x)$ 是沿着正 x 方向的行波。换而言之，$H_m^{(2)}(r)$ 是沿着径向（r）的外向行波。

若干低阶贝塞尔函数如图 A.1～图 A.4 所示。

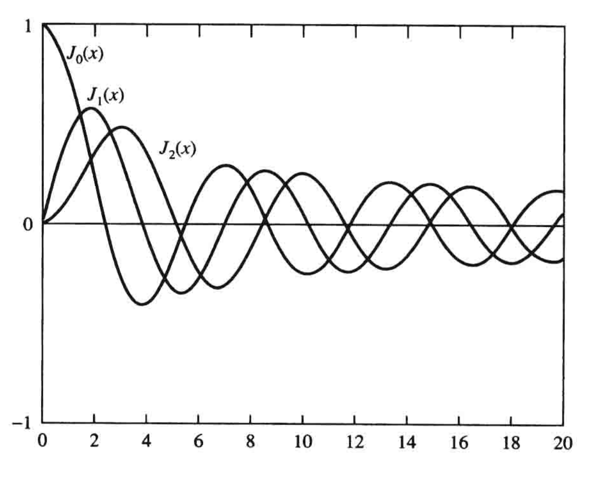


图 A.1　第一类贝塞尔函数

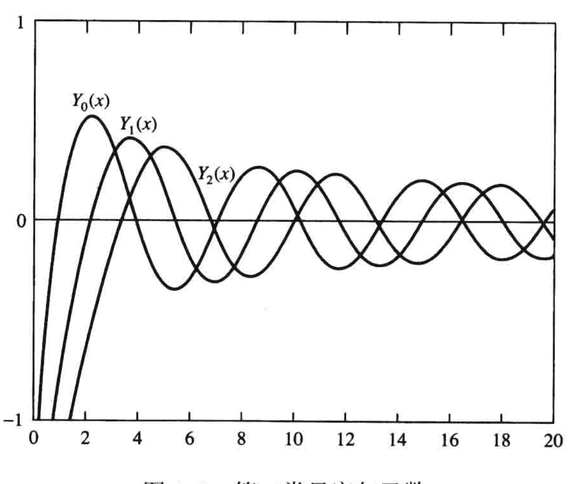


图 A.2　第二类贝塞尔函数

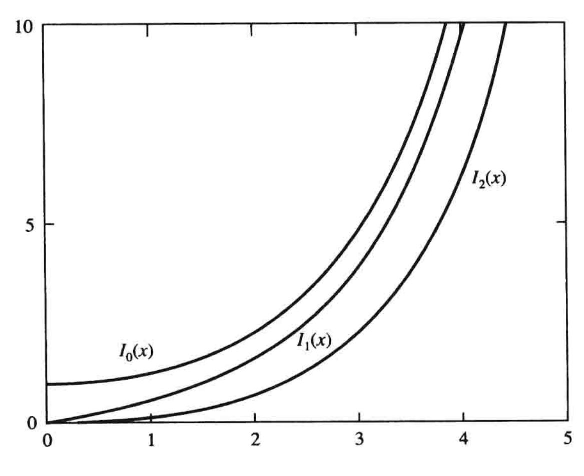


图 A.3　第一类修正贝塞尔函数

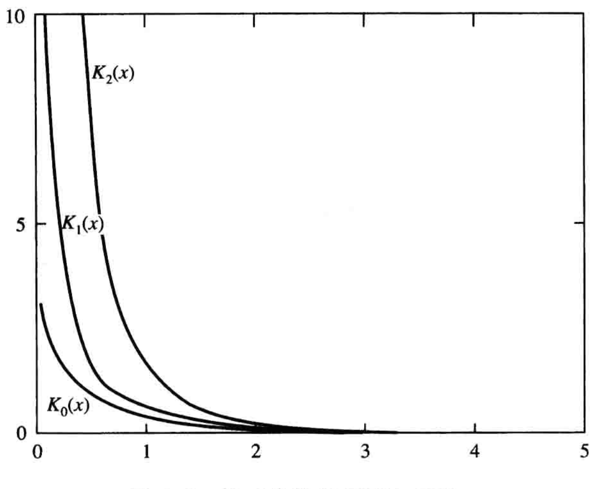


图 A.4　第二类修正贝塞尔函数

附录 B　阶跃型圆形波导的精确解

阶跃型圆形波导的几何结构如图 B.1 所示。它是由折射率为 n_1，半径为 a 的芯和折射率为 n_2，半径为 b 的覆层构成的。覆层的半径 b 通常选得足够大，这样在 $r=b$ 时，约束模的场等于 0。在下面的计算中，将令 $b=\infty$；在考虑约束模的情况下，此假设在大多数波导中是合理的。

利用附录 A 中的方程式（A-10）或者式（A-11），可以得到场 E_z 和 H_z 的径向关系，其依赖于 $k^2-\beta^2$ 的符号。对于约束传播，β必须大于 $n_2\omega/c$（例如：$\beta>n_2k_0=n_2\omega/c$），使得覆层区域中（$r>a$）的波是瞬逝波。因此由方程式（A-11）给出其解，其中 $c_1=0$。从式（A-13）所定义的大的 r 的渐近特性来看，这是很明显的。场的瞬逝衰减也保证了功率通量被约束于 z 轴附近，也就是说，没有辐射通量存在。因此覆层（$r>a$）中的约束模的场为

$$\begin{aligned} E_z(r,t) &= CK_l(qr)\exp[i(\omega t+l\phi-\beta z)] \\ H_z(r,t) &= DK_l(qr)\exp[i(\omega t+l\phi-\beta z)] \end{aligned} \quad r>a \tag{B-1}$$

式中 C 和 D 是两个任意常数，q 定义如下

$$q^2=\beta^2-n_2^2k_0^2,\quad k_0=\frac{\omega}{c} \tag{B-2}$$

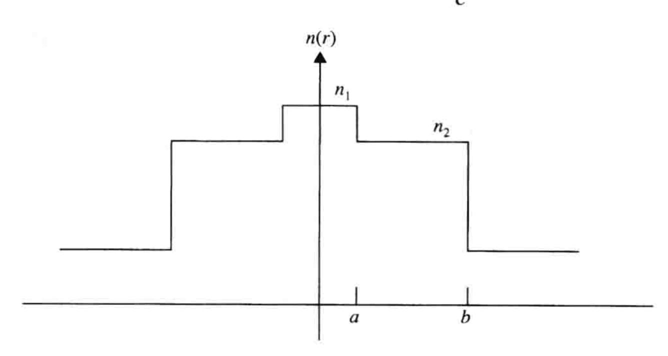


图 B.1　阶跃型圆形波导的结构和折射率分布

对于芯（$r<a$）内的场，我们必须考虑 $r\to 0$ 时场的特性。根据式（A-12），$r\to 0$ 时 Y_l 和 K_l 都是发散的。因为在 $r=0$ 处，场必须保持有限，所以在芯内（$r<a$）比较合适的场为式（A-10），其中 $c_2=0$。仅在分界面 $r=a$ 处，当芯内的场矢 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量与由式（B-1）给出覆层的场分量匹配时，这才变得明显；如果芯场的径向关系由 I_l 给出，我们就不能完成。因此传播常数β 必须比 n_1k_0 小，芯场为

$$\begin{aligned} E_z(r,t) &= AJ_l(hr)\exp[i(\omega t+l\phi-\beta z)] \\ H_z(r,t) &= BJ_l(hr)\exp[i(\omega t+l\phi-\beta z)] \end{aligned} \quad r<a \tag{B-3}$$

其中 A 和 B 是两个任意常数，h 定义如下

$$h^2=n_1^2k_0^2-\beta^2 \tag{B-4}$$

在场的表达式（B-1）和式（B-3）中，将指数中 $l\phi$ 前面都取“＋”号。取负号时将会得到一组独立的解，但是具有相同的径向关系。物理上，l 所起的作用类似于量子数，在柱面对称势场中，用于描述电子的轨道角动量的 z 分量。因此，如果 $l\phi$ 前取正号，就与关于 z 轴的坡印廷矢量的顺时针“旋转”对应；而取负号则与关于 z 轴的坡印廷矢量的逆时针“旋转”对应。这也可以通过检查坡印廷矢量（S_ϕ）的ϕ分量得到。因为光纤本身并不具有任何首选的旋转方向，所以这两个态是简并的。换而言之，它们具有相同的传播常数。

方程式（B-1）和式（B-3）都要求 $h^2>0$ 和 $q^2<0$，其转换成

$$n_1k_0>\beta>n_2k_0 \tag{B-5}$$

这可以认为是存在约束模的一个必要条件。这与第 3 章讨论过的介电平板波导的条件是等价的，这同样可以从我们对介电分界面上的全反射的讨论凭直觉得到。

利用式（B-1）和式（B-3），再结合式（A-5）和式（A-6），我们可以计算芯和覆层中所有的场分量。其结果如下

芯区（$r<a$）：

$$E_r=\frac{-i\beta}{h^2}\left(AhJ_l'(hr)+\frac{i\omega\mu l}{\beta r}BJ_l(hr)\right)\exp[i(\omega t+l\phi-\beta z)]$$

$$E_\phi=\frac{-i\beta}{h^2}\left(\frac{il}{r}AJ_l(hr)-\frac{\omega\mu}{\beta}BhJ_l'(hr)\right)\exp[i(\omega t+l\phi-\beta z)] \tag{B-6}$$

$$E_z=AJ_l(hr)\exp[i(\omega t+l\phi-\beta z)]$$

$$H_r=\frac{-i\beta}{h^2}\left(BhJ_l'(hr)-\frac{i\omega\varepsilon_1 l}{\beta r}AJ_l(hr)\right)\exp[i(\omega t+l\phi-\beta z)]$$

$$H_\phi=\frac{-i\beta}{h^2}\left(\frac{il}{r}BJ_l(hr)+\frac{\omega\varepsilon_1}{\beta}AhJ_l'(hr)\right)\exp[i(\omega t+l\phi-\beta z)] \tag{B-7}$$

$$H_z=BJ_l(hr)\exp[i(\omega t+l\phi-\beta z)]$$

式中 $J_l'(hr)=\mathrm{d}J_1(hr)/\mathrm{d}(hr)$，$\varepsilon_1=\varepsilon_0 n_1^2$。

覆层（$r>a$）：

$$E_r=\frac{i\beta}{q^2}\left(CqK_l'(qr)+\frac{i\omega\mu l}{\beta r}DK_l(qr)\right)\exp[i(\omega t+l\phi-\beta z)]$$

$$E_\phi=\frac{i\beta}{q^2}\left(\frac{il}{r}CK_l(qr)-\frac{\omega\mu}{\beta}DqK_l'(qr)\right)\exp[i(\omega t+l\phi-\beta z)] \tag{B-8}$$

$$E_z=CK_l(qr)\exp[i(\omega t+l\phi-\beta z)]$$

$$H_r=\frac{i\beta}{q^2}\left(DqK_l'(qr)-\frac{i\omega\varepsilon_2 l}{\beta r}CK_l(qr)\right)\exp[i(\omega t+l\phi-\beta z)]$$

$$H_\phi=\frac{i\beta}{q^2}\left(\frac{il}{r}DK_l(hr)+\frac{\omega\varepsilon_2}{\beta}CqK_l'(hr)\right)\exp[i(\omega t+l\phi-\beta z)] \tag{B-9}$$

$$H_z=DK_l(qr)\exp[i(\omega t+l\phi-\beta z)]$$

式中 $K_l'(qr)=\mathrm{d}K_l(qr)/\mathrm{d}(qr)$， $\varepsilon_2=\varepsilon_0 n_2^2$。

这些场必须满足边界条件：在 $r=a$ 处， E_ϕ, E_z, H_ϕ和H_z 连续。这就导出

$$
\begin{aligned}
&AJ_l(ha)-CK_l(qa)=0\\
&A\left(\frac{il}{h^2a}J_l(ha)\right)+B\left(-\frac{\omega\mu}{h\beta}J_l'(ha)\right)+C\left(\frac{il}{q^2a}K_l(qa)\right)+D\left(-\frac{\omega\mu}{q\beta}K_l'(qa)\right)=0\\
&BJ_l(ha)-DK_l(qa)=0\\
&A\left(\frac{\omega\varepsilon_1}{h\beta}J_l'(ha)\right)+B\left(\frac{il}{h^2a}J_l(ha)\right)+C\left(\frac{\omega\varepsilon_2}{q\beta}K_l'(qa)\right)+D\left(\frac{il}{q^2a}K_l(qa)\right)=0
\end{aligned}
\tag{B-10}
$$

式中 J_l 和 K_l 最主要的，再次涉及到分别对它们的自变量 ha 和 qa 的微分。对于 A，B，C 和 D，倘若它们的系数行列式为零，方程式（B-10）产生非平凡解。这就要求产生下列模条件，用于确定传播常数β:

$$
\left(\frac{J_l'(ha)}{haJ_l(ha)}+\frac{K_l'(ha)}{qaK_l(qa)}\right)\left(\frac{n_1^2J_l'(ha)}{haJ_l(ha)}+\frac{n_2^2K_l'(ha)}{qaK_l(qa)}\right)=l^2\left[\left(\frac{1}{qa}\right)^2+\left(\frac{1}{ha}\right)^2\right]^2\left(\frac{\beta}{k_0}\right)^2 \tag{B-11}
$$

对于每个 l，方程（B-11），加上（B-4）和（B-2），是β的超越函数。方程式（B-11）中的函数 $J_l'(x)/xJ_l(x)$ 是 $x=ha$ 的快速变化的振荡函数。因此方程式（B-11）可以粗略地认为是 $J_l'(ha)/haJ_l(ha)$ 的二次方程。对一给定的 l 和一给定的频率 ω，仅能找出有限个满足方程式（B-11）和式（B-5）的本征值β。一旦本征值找到，利用式（B-10）可以求出 B/A，C/A 和 D/A 的比值，它们可用于确定对应于每个传播常数β的模的六个场分量。这些比值为

$$
\begin{aligned}
&\frac{C}{A}=\frac{J_l(ha)}{K_l(qa)}\\
&\frac{B}{A}=\frac{i\beta l}{\omega\mu}\left(\frac{1}{q^2a^2}+\frac{1}{h^2a^2}\right)\left(\frac{J_l'(ha)}{haJ_l(ha)}+\frac{K_l'(qa)}{qaK_l(qa)}\right)^{-1}\\
&\frac{D}{A}=\frac{J_l(ha)}{K_l(qa)}\frac{B}{A}
\end{aligned}
\tag{B-12}
$$

我们对 B/A 的值特别感兴趣，因为它是一个模场中 E_z 和 H_z 相对值的一个度量（例如：$B/A=H_z/E_z$）。注意：E_z 和 H_z 的相位相差$\pi/2$。

模特性和截止条件

在第 3 章中处理平板波导模式时，我们证明其解可以简单地分成两部分——TE 模和 TM 模。在圆形波导中，解同样可以分成两部分。然而，这些解不是普通的 TE 模或者 TM 模，每个解都包含了 E_z，H_z，E_ϕ，H_ϕ，E_r 和 H_r 成分。这两类解可以这样获得：注意到方程式（B-11）是 $J_l'(ha)/haJ_l(ha)$ 的二次方程式，当我们求解 $J_l'(ha)/haJ_l(ha)$ 的值时，获得了与两个二次方程的根相对应的两个不同的方程。由这两个方程的本征值就对应了这两类解，按照惯例规定为 EH 模和 HE 模。

利用方程式（B-11）求 $J_l'(ha)/haJ_l(ha)$，我们得到

$$\frac{J_l'(ha)}{haJ_l(ha)} = -\left(\frac{n_1^2+n_2^2}{2n_1^2}\right)\frac{K_l'}{qaK_l} \pm \left[\left(\frac{n_1^2-n_2^2}{2n_1^2}\right)^2\left(\frac{K_l'}{qaK_l}\right)^2 + \frac{l^2}{n_1^2}\left(\frac{\beta}{k_0}\right)^2\left(\frac{1}{q^2a^2}+\frac{1}{h^2a^2}\right)^2\right]^{1/2} \tag{B-13}$$

式中 K_l' 和 K_l 的自变量是 qa。现在利用贝塞尔函数关系

$$J_l'(x) = -J_{l+1}(x) + \frac{l}{x}J_l(x)$$
$$J_l'(x) = J_{l-1}(x) - \frac{l}{x}J_l(x) \tag{B-14}$$

方程式（B-13）变为

EH 模：

$$\frac{J_{l+1}(ha)}{haJ_l(ha)} = \left(\frac{n_1^2+n_2^2}{2n_1^2}\right)\frac{K_l'(qa)}{qaK_l(qa)} + \left(\frac{1}{(ha)^2} - R\right) \tag{B-15a}$$

HE 模：

$$\frac{J_{l-1}(ha)}{haJ_l(ha)} = -\left(\frac{n_1^2+n_2^2}{2n_1^2}\right)\frac{K_l'(qa)}{qaK_l(qa)} + \left(\frac{1}{(ha)^2} - R\right) \tag{B-15b}$$

其中

$$R = \left[\left(\frac{n_1^2-n_2^2}{2n_1^2}\right)^2\left(\frac{K_l'(qa)}{qaK_l(qa)}\right)^2 + \left(\frac{l\beta}{n_1k_0}\right)^2\left(\frac{1}{q^2a^2}+\frac{1}{h^2a^2}\right)^2\right]^{1/2} \tag{B-16}$$

令右侧的 $(qa)^2=(n_1^2-n_2^2)k_0^2-(ha)^2$，方程（B-15a）和（B-15b）可以将方程两边均作为 ha 的函数作图来求解。

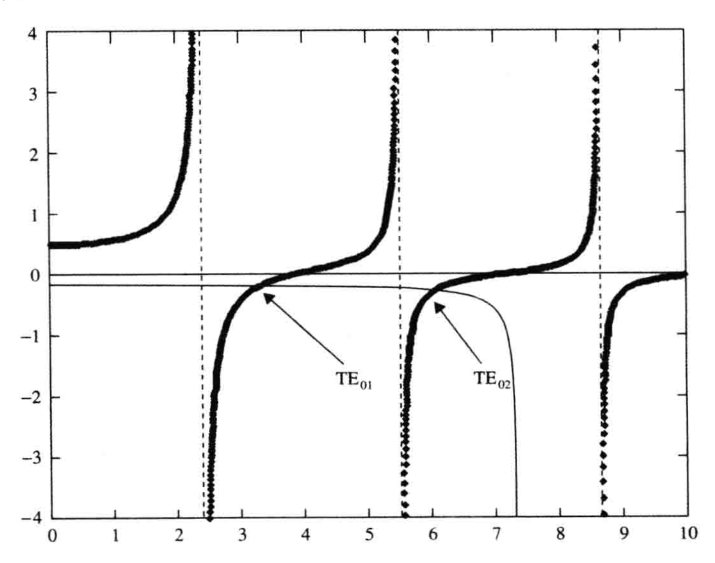


图 B.2　对于阶跃型波导的 TE 模式（$l=0$），其传播常数的图解确定法，其中 $n_1=1.4628$，$n_2=1.4600$，$a=20\mu m$，$V=7.334$

我们首先讨论$l=0$的例子。$l=0$时，$\partial/\partial\phi=0$，且所有模式的场分量是径向对称的。根据（B-15b）和（B-15a），存在两族解。在第一个例子中，在 HE 模的条件下，（B-15b）变成

$$\frac{J_1(ha)}{haJ_0(ha)}=-\frac{K_1(qa)}{qaK_0(qa)}\quad \text{(TE)} \tag{B-17a}$$

式中我们用到了$K_0'(x)=-K_1(x)$和$J_{-1}(x)=-J_1(x)$。在（B-17a）条件下，根据（B-10）或者（B-12），常数A和C均为零。将$A=C=0$和$l=0$代入方程（B-6）～（B-9）中，我们发现非零场分量仅为H_r,H_z和E_ϕ。这些解就是 TE 模。如果本征值是$\beta_m, m=1,2,3,\cdots$，TE 模指定为TE_{0m}，$m=1,2,3,\cdots$，其中第一个下标为$l=0$。

在第二个例子中，EH 模条件，在$l=0$处的方程（B-15a）变为

$$\frac{J_1(ha)}{haJ_0(ha)}=-\frac{n_2^2K_1(qa)}{qan_1^2K_0(qa)}\quad \text{(TM)} \tag{B-17b}$$

式中我们用到了$K_0'(x)=-K_1(x)$。根据（B-10）或者（B-12），常数B和D均为零。将$B=D=0$和$l=0$代入方程式（B-6）～式（B-9）中，我们发现非零场分量仅为E_r,E_z和H_ϕ。这些解就是 TM 模，指定为TM_{0m}。

现在开始讨论方程式（B-17a）和式（B-17b）的图解法。约束模要求q为实数，从而在覆层获得按指数衰减的场。因此我们仅需考虑在此范围的ha：$0\leqslant ha\leqslant V\equiv k_0a(n_1^2-n_2^2)^{1/2}$。方程式（B-17a）和式（B-17b）的右侧总为负。对于在$ha=0$处的 TE 模，从$-K_1(V)/VK_0(V)$开始，根据式（A-12），方程式（B-17a）的右侧是ha的单调递减函数且变成渐近的

$$-\frac{K_1(qa)}{qaK_0(qa)}\xrightarrow{ha\to V}\frac{2}{(V^2-h^2a^2)\ln(V^2-h^2a^2)} \tag{B-18}$$

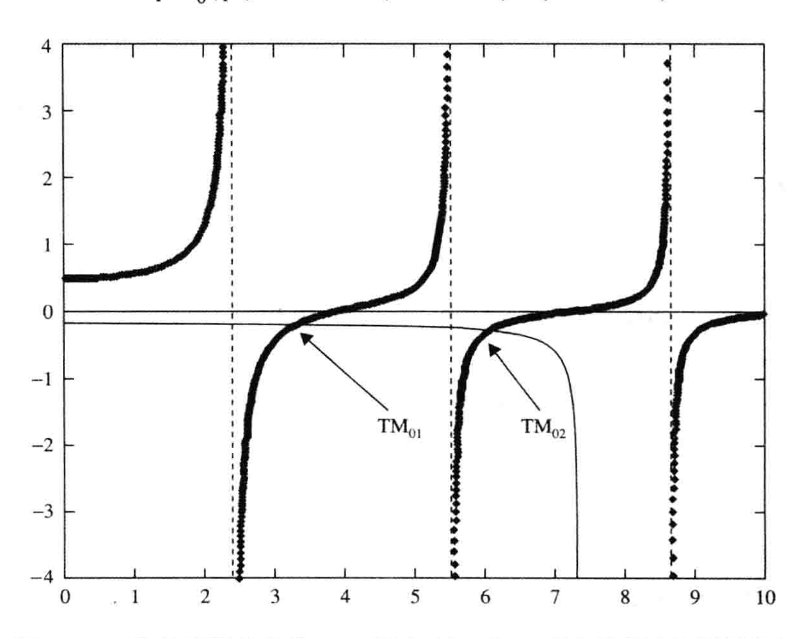


图 B.3　对于阶跃型波导的 TM 模式（$l=0$），其传播常数的图解确定法，其中n_1=1.4628，n_2=1.4600，a=20μm，V=7.334

在$ha=V$处发散至$-\infty$。对于 TM 模，方程式（B-17b）的右侧与式（B-17a）右侧相比

仅仅多了一个 n_2^2/n_1^2 因子。在方程式（B-17a）和式（B-17b）的左侧，在 $ha=0$ 处，$J_l'(ha)/haJ_l(ha)$ 从 1/2 开始，单调增加，直到 $ha=2.405$ 处发散至∞，它是 $J_0(ha)$ 的第一个零点。大于 ha=2.405 时，在 $J_0(ha)$ 的零点之间，$J_1(ha)/haJ_0(ha)$ 从－∞变化到＋∞。对于大的 ha 值，$J_1(ha)/haJ_0(ha)$ 是一类似于 $-(ha)^{-1}\tan(ha-\pi/4)$ 的函数，如图 B.2 所示，它给出了描述方程式（B-17a）的右侧和左侧的两条曲线。假设归一化频率 $V=k_0a(n_1^2-n_2^2)^{1/2}$ 足够高，这样存在两个模式——在两曲线的交点处小圆圈表示。$J_0(ha)=0$ 的根确定了垂直的渐近线。如果 ha 的最大值 $(ha)_{\max}=V$ 比 $J_0(x)$ 的第一个根 2.405 小，对于实数β，两根曲线不可能有交点。如果 V 处在 $J_0(x)$ 第一和第二个零点之间，存在两根曲线的一个交点。因此对于 TE_{0m}（或者 TM_{0m}）波，其截止值（a/λ）为

$$\left(\frac{a}{\lambda}\right)_{0m}=\frac{x_{0m}}{2\pi(n_1^2-n_2^2)^{1/2}} \tag{B-19}$$

式中 x_{0m} 是 $J_0(x)$ 的第 m 个零点，其前三个零点如图 B.3 所示，分别为

$$x_{01}=2.405, x_{02}=5.520, x_{03}=8.654$$

对于更高的零点，渐近公式

$$x_{0m}\approx\left(m-\frac{1}{4}\right)\pi$$

其具有足够的精确性（最起码精确到三位数字）。

在方程式（B-1）中，当$l\neq0$时，模式不再是波导的 TE 或者 TM 模，而是变为 EH 或者 HE 模。这些模式仍然可以通过图解确定法求得，类似于$l=0$的例子。对于$l=1$的情形，两根曲线代表 EH 模条件式（B-15a）的两侧，如图 B.4 所示。假设归一化频率 $V=k_0a(n_1^2-n_2^2)^{1/2}$ 等于 7.334，此时存在两个交点，分别为 EH_{11} 和 EH_{12} 模。垂直渐近线分别由 $J_1(x)=0$ 的根确定。图 B.5 给出了 HE_{11} 模，取相同的 V 值（V=7.334），此时存在三个交点，分别对应于 HE_{11}，HE_{12} 和 HE_{13} 模。垂直渐近线同样由 $J_1(x)=0$ 的根确定。由图 B.5 可知：无论 V 取何值，对应于 HE_{11} 模的那个交点总是存在的，这就意味着 HE_{11} 模没有截止值。其他模式 HE_{1m}，EH_{1m} 的截止值为

$$\begin{aligned}&\left(\frac{a}{\lambda}\right)_{1m}=0,\ \frac{3.832}{2\pi(n_1^2-n_2^2)^{1/2}},\ \frac{7.016}{2\pi(n_1^2-n_2^2)^{1/2}},\ \ldots\ \text{(HE模式)}\\&\left(\frac{a}{\lambda}\right)_{1m}=\frac{3.832}{2\pi(n_1^2-n_2^2)^{1/2}},\ \frac{7.016}{2\pi(n_1^2-n_2^2)^{1/2}},\ \frac{10.173}{2\pi(n_1^2-n_2^2)^{1/2}},\ \ldots\ \text{(EH模式)}\end{aligned} \tag{B-20}$$

注意：使得 $J_1(x)$ 等于零的值为 3.832，7.016，10.173，13.323。对于更高的零点，其近似公式为

$$x_{0m}\approx\left(m+\frac{1}{4}\right)\pi$$

它具有足够的精确性（最起码精确到三位数字）。

对于$l>1$，截止值 a/λ为[1]

$$\left(\frac{a}{\lambda}\right)_{lm}^{EH}=\frac{x_{lm}}{2\pi(n_1^2-n_2^2)^{1/2}} \tag{B-21}$$

$$\left(\frac{a}{\lambda}\right)_{lm}^{HE}=\frac{z_{lm}}{2\pi(n_1^2-n_2^2)^{1/2}} \tag{B-22}$$

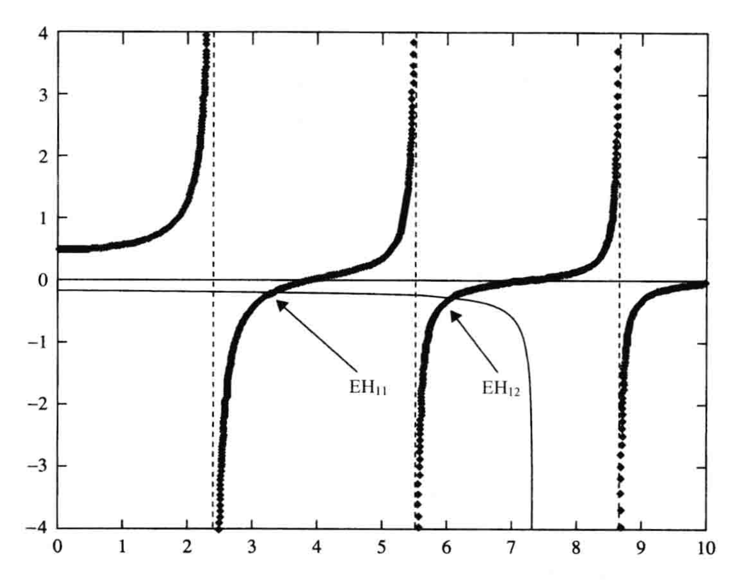


图 B.4　对于阶跃型波导的 EH 模式（$l=1$），其传播常数的图解确定法，其中 $n_1=1.4628$，$n_2=1.4600$，$a=20\mu m$，$V=7.334$

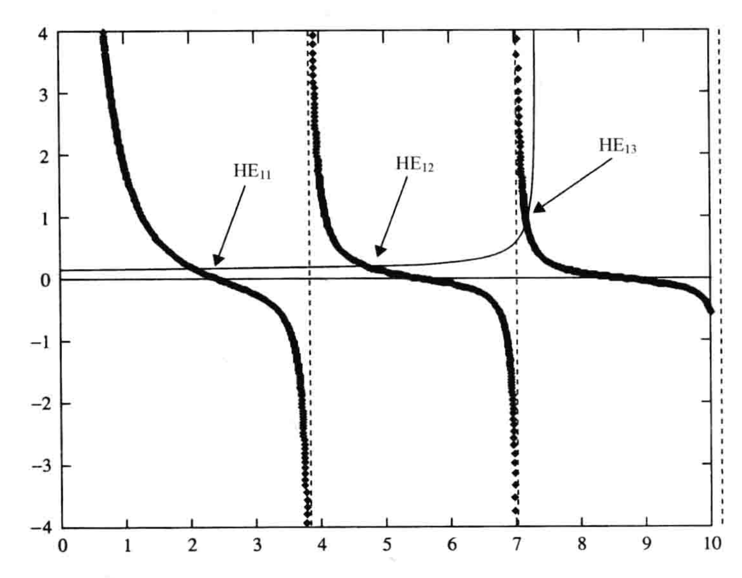


图 B.5　对于阶跃型波导的 HE 模式（$l=1$），其传播常数的图解确定法，其中 $n_1=1.4628$，$n_2=1.4600$，$a=20\mu m$，$V=7.334$

式中 x_{lm} 是 $J_l(x)=0$ 的第 m 个零点，z_{lm} 是

$$zJ_l(z)=(l-1)\left(1+\frac{n_1^2}{n_2^2}\right)J_{l-1}(z),\quad l>1 \tag{B-23}$$

的第 m 个根。

如果我们将 $l>1$ 时的传播常数 β 代入方程式（B-12），可以发现 B/A 的值既不是零也不是无穷大，这就意味着 E_z 和 H_z 都存在于这些模式内。这些混合模的名称确定是基于在某些参考点处，E_z 和 H_z 对场的横向分量（例如：E_r 或者 E_ϕ）的贡献。如果 E_z 所做的贡献大，认

为此模式是 TM 模占优势，确定为 HE_{lm}。例如，基模 HE_{11} 是 TM 模占优势。反之，如果 H_z 所做的贡献大，认为此模式是 TE 模占优势，确定为 EH_{lm}。因为 $(a/\lambda)_{11}^{HE}=0$，所以模式 HE_{11} 能够在任意波导内传播。根据方程式（B-19），所能传播的下一个模式为 TE_{01} 和 TM_{01}。由于当 l 固定，m 增加时，或者当 m 固定，l 增加时，x_{lm} 或者 z_{lm} 构成了递增序列，所以允许的模式数随着 a/λ 的平方而增加。

在很多应用中，模式的重要特性是传播常数β，它是频率ω（或者归一化频率 V）的函数。这个信息通常体现在约束模的模折射率

$$n=\frac{\beta}{k_0} \tag{B-24}$$

是 $V=k_0a(n_1^2-n_2^2)^{1/2}$ 的函数，这里 $k_0=\omega/c$。因为模式的相速度为ω/β，n 是真空中的光速与模式相速度的比值（n 也称为有效模折射率）。若干阶跃型圆形波导的低阶模式的 n 值，如图 B.6 所示[2]。可以发现在截止值处，每个模式均有（β/k_0）$=n_2$。这个不难理解，当模式接近截止值时，场很好地延伸到覆层中，这样在截止值附近的模式约束性很差，大多数能量在媒质 2 中传播，因此 $n=n_2$。通过类似的推理，频率远离截止值时，模式被紧紧约束在芯内，n 接近 n_1。如前面讨论的，对于 $V<2.405$ 时，只有基模 HE_{11} 模可以传播。这是一个很重要的结论，因为很多应用中需要用到单模传输。这些应用包括干涉测量法，它要求明确的稳定相前；以及光通信，它利用传输超短光脉冲进行通信。在后面的例子中，很多模式的激发可能会导致脉冲展宽，因为不同的模式具有不同的群速度。这就限制了脉冲的数量（例如：比特），脉冲串可以压缩至一给定的时隙内且在接收端仍然是可分离的。

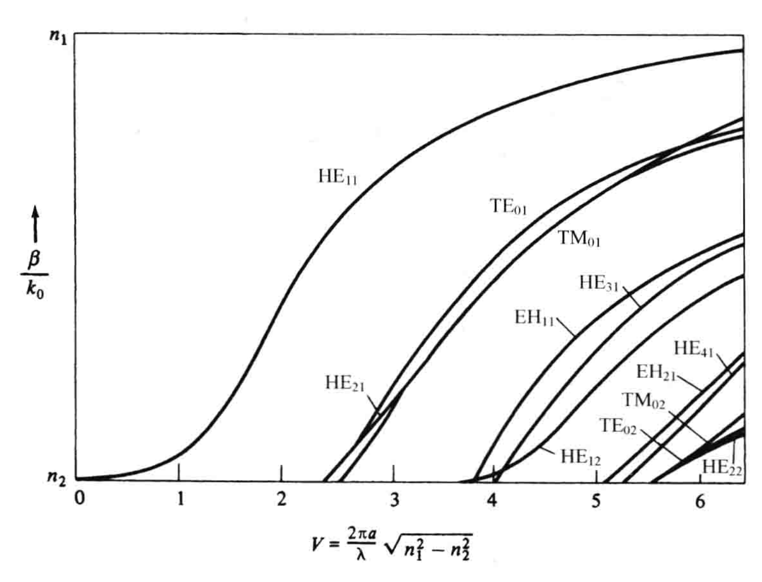


图 B.6　对于阶跃型波导的若干最低阶模式，归一化传播常数是 V 的函数[2]

例：阶跃型光纤中的混合模。

讨论一单模石英光纤，其纤芯的折射率为 $n_1=1.4628$，覆层的折射率为 $n_2=1.4600$，纤芯半径 $a=4.7\mu m$，光波长$=1.55\mu m$。由这些参数可以推导出 $V=1.723$。通过数学上求解模的条件方程，我们得到以下 HE_{11} 模的参数

$$ha = 1.4235, \beta = 1.4609(\omega / c),\ \mu |B|^2 / \varepsilon_1 |A|^2 = 0.9956$$

注意：HE_{11}模几乎是由 TE 和 TM 模均匀混合而成，但是 TM 支配 HE_{11}模。

对于相同折射率分布，$a=15\mu m$，光波长$=1.55\mu m$，V 就变为 $V=5.501$。$l=1$时存在三个模式，它们是 HE_{11}，EH_{11}和 HE_{12}。模条件的解为

$$HE_{11}, ha = 2.0276, n_{eff} = 1.4624, \mu |B|^2 / \varepsilon_1 |A|^2 = 0.9972$$

$$EH_{11}, ha = 4.2697, n_{eff} = 1.4611, \mu |B|^2 / \varepsilon_1 |A|^2 = 1.0100$$

$$HE_{12}, ha = 4.5463, n_{eff} = 1.4609, \mu |B|^2 / \varepsilon_1 |A|^2 = 0.9908$$

其中 $n_{eff} = \beta / (\omega / c)$。

参考文献

1. Snitzer, E., Cylindrical dielectric waveguide modes. *J. Opt. Soc. Am.* **51**:491 (1961).
2. Keck, D. B., *Fundamentals in Optical Fiber Communications*, M. K. Barnoski (ed.). Academic Press, New York, 1976, Chapter 1.

附录 C　克拉默斯-克勒尼希（Kramers-Kroning）关系

介电函数 $\varepsilon(\omega)$ 或者折射率 $n(\omega)$ 依赖材料对电磁辐射的响应。根据第 5 章所讨论的，介电函数 $\varepsilon(\omega)$ 与媒质的电子结构有关，它在确定电子结构时很有用。复介电函数 $\varepsilon(\omega)$ 的实部和虚部均为频率 ω 的函数。如果我们知道所有频率处 $\varepsilon(\omega)$ 虚部的值，利用克拉默斯–克勒尼希关系就可求 $\varepsilon(\omega)$ 的实部，反之亦然。该关系首先由克拉默斯和克勒尼希于 1926 年提出，用于研究物质的介电常数。

第 5 章中推导的介电函数将位移的单色分量和电场矢量用如下关系联系了起来。

$$D(\omega) = \varepsilon(\omega)E(\omega) \tag{C-1}$$

由于 $\varepsilon(\omega)$ 与频率有关，所以存在位移 $D(t)$ 和电场 $E(t)$ 之间的时间的非局部连接。这种连接很容易用傅里叶变换来构造。

$$D(t) = \int_{-\infty}^{\infty} D(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{C-2}$$

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{C-3}$$

将式（C-1）代替方程式（C-2）中的 $D(\omega)$，得

$$D(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\omega)E(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{C-4}$$

如果我们对方程式（C-3）的傅里叶积分进行变换，得到

$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{C-5}$$

下面将式（C-5）代替方程式（C-4）中的 $E(\omega)$，得到

$$D(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \int_{-\infty}^{\infty} E(t')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t'}\mathrm{d}t' \tag{C-6}$$

重新排列积分顺序，令 $\tau = t - t'$，上式可以写成

$$D(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega\, E(t-\tau) \tag{C-7}$$

现在我们定义函数 $F(\tau)$ 为

$$F(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [\varepsilon(\omega) - \varepsilon_0]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega \tag{C-8}$$

这样，方程式（C-7）可以写成

$$D(t) = \varepsilon_0 E(t) + \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)E(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{C-9}$$

方程式（C-9）给出了 $D(t)$和电场 $E(t)$之间的非本地关系；在 t 时刻，位移 $D(t)$依赖于处在 t 时刻以外其他时刻的电场 E。如果介电函数 $\varepsilon(\omega)$ 与 ω 无关（例如，$\varepsilon(\omega)=$常数），由方程式（C-8）可得 $F(\tau)=\varepsilon_0\chi\delta(\tau)$，其中 χ 是电极化率，时间非本地响应为零。但是如果 $\varepsilon(\omega)$ 随 ω 而变化，$F(\tau)$ 不再为德尔塔函数，引起了非本地响应。

利用 $\left[\varepsilon(\omega)-\varepsilon_0\right]=\varepsilon_0\left[n^2(\omega)-1\right]$ 和由方程式（5.4-10a）所定义的 $n^2(\omega)$，方程式（C-8）的闭合曲线积分产生了

$$F(\tau)=0 \quad \text{for } \tau<0 \tag{C-10}$$

上述结果符合因果原则，该原则说明：在时刻 t 的位移 $D(t)$，依赖于处于 t 时刻之前时刻的电场 E 的值。利用方程式（C-10），方程式（C-9）变成了

$$D(t)=\varepsilon_0 E(t)+\int_0^{\infty} F(\tau)E(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{C-11}$$

如果我们允许 $F(\tau)$ 为 τ 的任意实函数，那么在方程式（C-11）中的积分总是收敛的；在均匀的各向同性媒质中，该方程可以视为 D 和 E 之间最普通的关系，因为此时仅仅假设了因果条件。我们现在将方程式（C-3）和式（C-4）分别代替方程式（C-11）中的 $E(t)$和 $D(t)$，从而得到

$$\varepsilon(\omega)=\varepsilon_0+\int_0^{\infty} F(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau \tag{C-12}$$

这个表达式可以用于确定频率和介电常数之间的关系，倘若 $F(\tau)$ 已知。通常，$\varepsilon(\omega)$ 是复数。然而，因为 $F(\tau)$ 是实函数，$\varepsilon(\omega)$ 满足下面的对称关系

$$\varepsilon^*(\omega)=\varepsilon(-\omega) \tag{C-13}$$

如果我们从上述关系中分离出实部和虚部

$$\varepsilon(\omega)=\varepsilon'(\omega)-i\varepsilon''(\omega) \tag{C-14}$$

得到

$$\varepsilon'(-\omega)=\varepsilon'(\omega) \tag{C-15}$$

$$\varepsilon''(-\omega)=-\varepsilon''(\omega) \tag{C-16}$$

这说明了介电函数的实部是频率 ω 的偶函数，而其虚部是频率 ω 的奇函数。

关系式（C-12）确定了介电常数是频率 ω 的函数，频率 ω 是一实变量。现将 ω 视为函数的复变量，方程式（C-12）可以重新写成

$$\varepsilon(z)=\varepsilon_0+\int_0^{\infty} F(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\tau}\,\mathrm{d}\tau \tag{C-17}$$

式中，z 是一个复变量。在复平面的下半区，$\varepsilon(z)$ 是 z 的解析函数。在复平面的上半区，$z=\omega+i\gamma$，$\gamma>0$，方程式（C-17）中的积分发散。

我们现在讨论闭合曲线积分

$$J=\oint \frac{\varepsilon(z)-\varepsilon_0}{z-\omega}\,\mathrm{d}z \tag{C-18}$$

闭合曲线积分是逆时针方向的路径，路径由实轴、以 $z=\omega$ 点为圆心的无穷小圆的下半

周以及位于下半平面的无穷大半圆所构成的闭合曲线（见图 C.1）。注意到：在闭合曲线 C 所包围的区域内，方程式（C-18）的积分没有奇点。

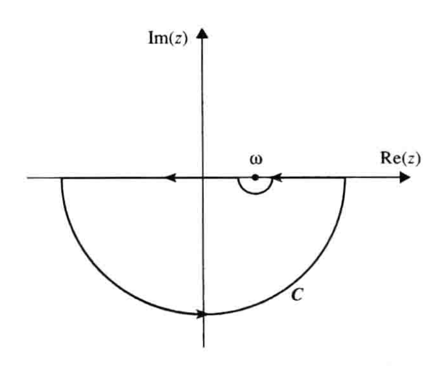


图 C.1　方程式（C-18）中积分的闭合曲线

根据柯西定理，积分为 0（例如：J=0）。此外，当 $z\to\infty$ 时，$\varepsilon(z)-\varepsilon_0$ 趋向于 0。因此在无穷大半圆上进行的积分没有贡献，方程式（C-18）可以写成

$$0 = J = \lim_{a\to 0}\left(\int_{\infty}^{\omega+a}\frac{\varepsilon(z)-\varepsilon_0}{z-\omega}\mathrm{d}z+\int_{\omega-a}^{-\infty}\frac{\varepsilon(z)-\varepsilon_0}{z-\omega}\mathrm{d}z\right)-i\pi[\varepsilon(\omega)-\varepsilon_0] \tag{C-19}$$

式中，a 是无穷小半圆的半径，$i\pi\left[\varepsilon(\omega)-\varepsilon_0\right]$ 这项是在无穷小半圆上积分得到的。

式（C-19）可以重新写成

$$\varepsilon(\omega)-\varepsilon_0=\frac{i}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon(z)-\varepsilon_0}{z-\omega}\mathrm{d}z \tag{C-20}$$

式中，P 说明积分是主值积分。因为积分是在实轴上进行的，我们可以用 ω' 代替 z，方程式（C-20）变成

$$\varepsilon(\omega)-\varepsilon_0=\frac{i}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon(\omega')-\varepsilon_0}{\omega'-\omega}\mathrm{d}\omega' \tag{C-21}$$

利用方程式（C-14）且令方程式（C-21）两侧的实部和虚部相等，我们就得到了克拉默斯一克勒尼希关系。

$$\varepsilon'(\omega)-\varepsilon_0=\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon''(\omega')}{\omega'-\omega}\mathrm{d}\omega' \tag{C-22}$$

$$\varepsilon''(\omega)=\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon'(\omega')-\varepsilon_0}{\omega'-\omega}\mathrm{d}\omega' \tag{C-23}$$

由于

$$0=\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon_0}{\omega'-\omega}\mathrm{d}\omega' \tag{C-24}$$

方程式（C-21）也可以写成

$$\varepsilon''(\omega)=\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon'(\omega')}{\omega'-\omega}\mathrm{d}\omega' \tag{C-25}$$

利用方程式（C-24），我们可以去除方程式（C-22）和式（C-23）中积分的奇点，克拉默斯–克勒尼希关系可以重新写成

$$\varepsilon'(\omega)-\varepsilon_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon''(\omega')-\varepsilon''(\omega)}{\omega'-\omega}\mathrm{d}\omega' \tag{C-26}$$

$$\varepsilon''(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon'(\omega')-\varepsilon'(\omega)}{\omega'-\omega}\mathrm{d}\omega' \tag{C-27}$$

方程式（C-15）和式（C-16）的对称特性可以用于将方程式（C-22），式（C-23），式（C-26）和式（C-27）重写成如下形式，它们只包含了正的频率：

$$\varepsilon'(\omega)-\varepsilon_0=\frac{2}{\pi}P\int_{0}^{\infty}\frac{\omega'\varepsilon''(\omega')}{\omega'^2-\omega^2}\mathrm{d}\omega' \tag{C-28}$$

$$\varepsilon''(\omega)=\frac{2\omega}{\pi}P\int_{0}^{\infty}\frac{\varepsilon'(\omega')}{\omega'^2-\omega^2}\mathrm{d}\omega' \tag{C-29}$$

或者

$$\varepsilon'(\omega)-\varepsilon_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\omega'\varepsilon''(\omega')-\omega\varepsilon''(\omega)}{\omega'^2-\omega^2}\mathrm{d}\omega' \tag{C-30}$$

$$\varepsilon''(\omega)=\frac{2\omega}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\varepsilon'(\omega')-\varepsilon'(\omega)}{\omega'^2-\omega^2}\mathrm{d}\omega' \tag{C-31}$$

如果知道函数$\varepsilon''(\omega)$，克拉默斯－克勒尼希关系使得我们可以计算函数$\varepsilon'(\omega)$，反之亦然。它们具有普遍的正确性，且可以直接从方程式（C-11）推导出来，方程式（C-11）在位移 D 和电场 E 之间仅仅包含了因果性的假设。作为利用克拉默斯–克勒尼希关系的一个例子，我们讨论电磁辐射的衰减由介电常数（例如：$\varepsilon''(\omega)$）的虚部确定。

根据方程式（C-24），积分式（C-25）为零，倘若$\varepsilon'(\omega)$=常数。从方程式（C-25）可以直接得出：在无色散媒质中（即$\varepsilon'(\omega)$=常数），介电常数的虚部为零。换而言之，任意色散媒质同时也是吸收媒质。或者等价地，任意无色散媒质是无损的。根据方程式（C-26），我们得到$\varepsilon'(\omega)=\varepsilon_0$，倘若$\varepsilon''(\omega)=0$。换而言之，真正的无色散媒质仅有真空。

现在讨论第二个例子，一原子系统的介电常数的实数部分，该原子系统的阻尼常数γ_j很小可以忽略。从方程式（5.5-10a），我们有

$$\varepsilon'(\omega)-\varepsilon_0=\frac{Ne^2}{m}\sum_j\frac{f_j}{(\omega_j^2-\omega^2)} \tag{C-32}$$

方程可以重新写成

$$\varepsilon'(\omega)-\varepsilon_0=\frac{2}{\pi}P\int_{0}^{\infty}\sum_j\frac{f_j\delta(\omega'-\omega_j)}{\omega'^2-\omega^2}\mathrm{d}\omega' \tag{C-33}$$

式中，δ 是狄拉克德尔塔函数。将方程式（C-33）和方程式（C-28）进行比较，用振动强度表示的介电常数的虚部的表达式

$$\varepsilon''(\omega)=\frac{\pi Ne^2}{2\omega m}\sum_j f_j\delta(\omega-\omega_j) \tag{C-34}$$

利用求和法则式（5.4-12）和积分方程式（C-32），我们得到求和法则为

$$\int_0^{\infty}\varepsilon''(\omega)\omega\,\mathrm{d}\omega=\frac{\pi e^2}{2m}NZ \tag{C-35}$$

其中 Z 是每个原子内的电子数，N 是每单位体积内的原子数。

附录 D　利用薄透镜实现相干电磁场的变换

本附录将推导一个重要的相干光学结论，即利用透镜对相干单色场作变换。式(17.10-3)是这种推导的一个特例。

假定光束

$$E = \mathrm{Re}\left[u(x, y, z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right]$$

从平面 $z=0$ 输入，经过位于 z 处的透镜后到达位于 $z+f$ 后焦面输出，如图 D.1 所示。$u(\boldsymbol{x})$ 为场的复振幅，f 为透镜的焦距。

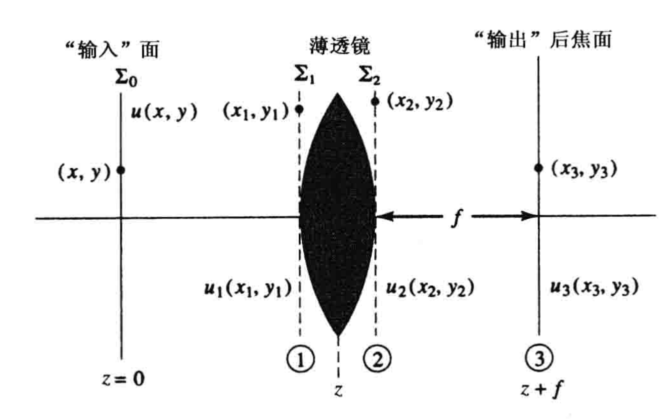


图 D.1　一个位于 z 平面的透镜将位于 z=0 平面的"输入"光束 $u(x, y)$ 变换到 z=z+f 平面的"输出"光束。假设透镜平面 Σ_1 在横向为无限大，孔径效应可忽略

利用式（2.12-15）和式（2.12-16）计算从 $z=0$ 平面到平面 1 的光场变换，输入光束变为

$$u_1(x_1, y_1) = \frac{i}{\lambda z}\iint_{\Sigma_0} u(x, y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{D-1}$$

利用 $u(x, y) \equiv u(x, y, z=0)$ 及

$$r = \sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+z^2} \approx z + \frac{(x_1-x)^2}{2z} + \frac{(y_1-y)^2}{2z} \tag{D-2}$$

式（D-1）可改写为

$$u_1(x_1, y_1) = \frac{i\mathrm{e}^{-ikz}}{\lambda z}\iint_{\Sigma_0} u(x, y)\mathrm{e}^{-(ik/2z)[(x_1-x)^2+\mathrm{s.y.}]}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{D-3}$$

在式（D-2）及本附录后面部分中，s.y. 代表"$x \to y$ 类似的项"。例如，$\left[(x_1-x)^2+\mathrm{s.y.}\right] \equiv \left[(x_1-x)^2+(y_1-y)^2\right]$。关系式（D-3）是通过式（D-2）的近似得到的，称为基尔霍夫衍射积分。该近似在式（D-2）中被忽略的项乘以 $k(=2\pi/\lambda)$ 小于 2π 时成立。平面 2 处的场由平面 1 处的场 u_1 乘以透镜传递函数式（2.6-24）得到

$$u_2(x_2, y_2) = u_1(x_2, y_2)\mathrm{e}^{(\mathrm{i}k/2f)(x_2^2+y_2^2)}$$

$$= \frac{i\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}}{\lambda z}\iint_{\Sigma_0} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\, u(x, y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[(k/2z)(x_2-x)^2-(k/2f)x_2^2+\mathrm{s.y.}]} \tag{D-4}$$

接下来再利用式（D-3）得到光束从平面 2 传播到平面 3 的表示式

$$u_3(x_3, y_3, z+f) = -\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(z+f)}}{\lambda^2 zf}\iint_{\Sigma_2} \mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}y_2\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k/2f)[(x_3-x_2)^2+\mathrm{s.y.}]}$$

$$\times\left[\iint_{\Sigma_0} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\, u(x, y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[(k/2z)(x_2-x)^2-(k/2f)x_2^2+\mathrm{s.y.}]}\right] \tag{D-5}$$

将式（D-5）中指数部分的所有项整理相加，得到

$$k(z+f)+\frac{k}{2f}\left[(x_3-x_2)^2+\mathrm{s.y.}\right]+\left[\frac{k}{2z}(x_2-x)^2-\frac{k}{2f}x_2^2+\mathrm{s.y.}\right]$$

$$=k(z+f)+k\frac{(x_3^2+y_3^2)}{2f}\left(1-\frac{z}{f}\right)-\frac{k}{f}(xx_3+yy_3)$$

$$+\frac{k}{2z}\left\{\left[x_2-\left(x+\frac{z}{f}x_3\right)\right]^2+\left[y_2-\left(y+\frac{z}{f}y_3\right)\right]^2\right\}$$

变换积分次序，式（D-5）可改写为

$$u_3(x_3, y_3, z+f)$$

$$=-\frac{\exp\left\{-ik\left[(z+f)+\dfrac{x_3^2+y_3^2}{2f}\left(1-\dfrac{z}{f}\right)\right]\right\}}{\lambda^2 zf}\cdot\iint_{\Sigma_0}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,u(x, y)\exp\left[i\left(\frac{kxx_3}{f}+\frac{kyy_3}{f}\right)\right]$$

$$\iint_{\Sigma_2}\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}y_2\exp\left(-\frac{ik}{2z}\left\{\left[x_2-\left(x+\frac{z}{f}x_3\right)\right]^2+\left[y_2-\left(y+\frac{z}{f}y_3\right)\right]^2\right\}\right) \tag{D-6}$$

假定孔径 Σ_0，Σ_2 为无限大并利用积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a^2x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{|a|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$$

沿 Σ_2 的积分等于 $-i2\pi z/k$，由 $k\lambda=2\pi$，式（D-6）变为

$$u_3(x_3, y_3, z+f)=\frac{i\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(z+f)}}{\lambda f}\exp\left[i\frac{k}{2f}\left(\frac{z}{f}-1\right)(x_3^2+y_3^2)\right]\iint_{\Sigma_0}u(x, y)\exp\left[ik\left(\frac{xx_3}{f}+\frac{yy_3}{f}\right)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{D-7}$$

利用式（17.10-1）定义的傅里叶变换式，式（D-7）可改写为

$$u_3(x_3, y_3, z+f)=i\frac{\exp\left[-ik(z+f)+\dfrac{ik}{2f}\left(\dfrac{z}{f}-1\right)(x_3^2+y_3^2)\right]}{\lambda f}(2\pi)^2F\{u(x, y)\}_{p=-kx_3/f,\,q=-ky_3/f} \tag{D-8}$$

式中，$F\{u(x,y)\}$ 是 $u(x,y)$ 对 (x,y) 的二重傅里叶变换，它是关于变量 p,q 的函数。当 Σ_0 为

前焦面，即 $z=f$ 时，可得到一个很简单的形式：

$$u_3(x_3, y_3, 2f) = i\frac{4\pi^2 e^{-i2kf}}{\lambda f} F\{u(x, y)\}_{p=-kx_3/f, q=-ky_3/f} \tag{D-9}$$

输出场 $u_3\left(x_3, y_3, 2f\right)$ 为输入场 $u(x, y)$ 的（成比例的）傅里叶变换。

附录E　费米能级和其温度相关性

正如第 15 章所讨论的，在能量为 E 处的量子态被电子占有的概率受到费米–狄拉克分布函数的影响

$$f(E)=\frac{1}{e^{(E-E_F)/k_BT}+1} \tag{E-1}$$

式中，E_F 是费米能级。定义费米能为

$$E_{F0}=E_F(T=0\ \mathrm{K}) \tag{E-2}$$

当处于 $\exp[(E-E_F)/k_BT]\gg 1$ 的状态时，占有率远小于 1，费米–狄拉克分布变为波尔兹曼分布。这就是经典状态（或者非简并状态）。

在 0K 时，能量低于费米能的所有的态，其被电子占有的概率为 1；而能量高于费米能的所有的态，其被电子占有的概率为 0。因此费米能与电子密度有关，服从下式

$$n=\frac{N}{V}=\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\int_0^{E_{F0}}\sqrt{E}\mathrm{d}E=\frac{1}{3\pi^2}\left(\frac{2mE_{F0}}{\hbar^2}\right)^{3/2} \tag{E-3}$$

m 是电子质量，N 是总的电子数，V 是被电子占有的空间体积。根据方程（E-3），费米能是电子密度的递增函数。由泡利不相容原理可知，每个态仅能容纳两个电子。态越多，需要的电子越多。因为最高已占态的能量是 E_{F0}，费米能必须随着电子密度而增加，从而容纳所有电子。

当温度在绝对 0 度以上时，求出占有率需要费米能级的知识。费米能级的温度相关性可以从下面的积分得到

$$n=\frac{N}{V}=\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\int_0^{\infty}\frac{E^{1/2}}{e^{(E-E_F)/k_BT}+1}\mathrm{d}E \tag{E-4}$$

上述积分包含了所有的态，可求出电子密度。此方程必须转化从而获得费米能级，它是温度和电子密度的函数。不幸的是，在方程（E-4）右侧的积分不是解析可逆的。

下面，我们将描述两种近似。利用如下这些定义

$$x=E/k_BT \quad \text{and} \quad \eta=E_F/k_BT \tag{E-5}$$

可以将方程（E-4）写成

$$\frac{2}{3}\left(\frac{E_{F0}}{k_BT}\right)^{3/2}=\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^{x-\eta}+1}\mathrm{d}x \tag{E-6}$$

或者等价地

$$n=\frac{1}{3\pi^2}\left(\frac{2mE_{F0}}{\hbar^2}\right)^{3/2}=\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2mk_BT}{\hbar^2}\right)^{3/2}\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^{x-\eta}+1}\mathrm{d}x\equiv n_Q\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^{x-\eta}+1}\mathrm{d}x \tag{E-7}$$

式中，n_Q 是所谓的量子浓度

$$n_Q = 2\left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \tag{E-8}$$

由方程（E-3）可知η与费米能级有关，而对每个给定的$\eta\eta$是值，方程（E-6）的右侧均能进行数值积分。使得该积分的结果等于方程（E-6）的左侧即可求出温度。如果对不同的η是值采用相同的处理方法，就可以获得费米能级的温度的相关性。

归一化费米能级是归一化温度的函数，如图 E.1 和图 E.2 所示。将数值结果与两种近似结果进行比较。它们分别是索末菲近似和乔伊斯-狄克逊近似[1]：

$$\frac{E_F}{E_{F0}} = \left[1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{k_BT}{E_{F0}}\right)^2\right] \quad \text{（索末菲）} \tag{E-9}$$

$$\frac{E_F}{k_BT} = \ln r + \frac{1}{\sqrt{8}}r - \left(\frac{3}{16}-\frac{\sqrt{3}}{9}\right)r^2 + a_3r^3 + a_4r^4 + \cdots \quad \text{（乔伊斯-狄克逊）} \tag{E-10}$$

式中 r 定义为

$$r = \frac{n}{n_Q} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\left(\frac{E_{F0}}{k_BT}\right)^{3/2} \tag{E-11}$$

式中 a_3 和 a_4 定义为[2]

$$a_3 = 0.000148386 \quad \text{and} \quad a_4 = -0.00000442563 \tag{E-12}$$

我们注意到：归一化温度低于 0.42（$k_BT < 0.42E_{F0}$）时，索末菲近似给出了更好的结果；归一化温度高于 0.42（$k_BT > 0.42E_{F0}$）时，乔伊斯–狄克逊近似给出了更好的结果。在低温时，参数 r 变成一大数，乔伊斯–狄克逊近似不能很好地收敛。该区域内索末菲近似给出了更好的结果。在半导体的应用中，上述结果可个别地用于电子和空穴，倘若它们可以在分离的平衡态被处理。在该情况下，费米能级也就是所谓的准费米能级，必须用到电子和空穴的有效质量。

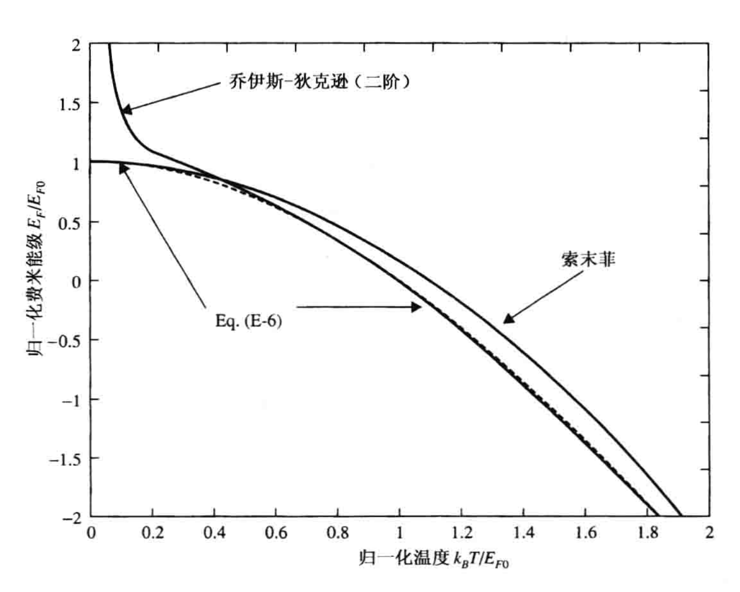


图 E.1　归一化费米能级与归一化温度的关系。图中，乔伊斯–狄克逊近似到第二阶

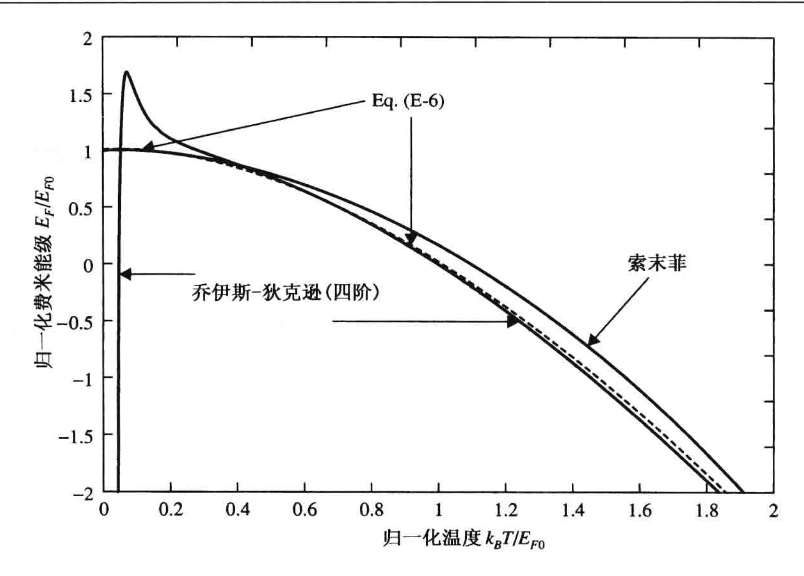


图 E.2　归一化费米能级与归一化温度的关系。图中，乔伊斯–狄克逊近似到第四阶

参考文献

1. Joyce, W. B., and R. W. Dixon, *Appl. Phys. Lett.* **31**:354 (1977).
2. See, for example, C. Kittel and H. Kroemer, *Thermal Physics*, 2nd ed. Freeman, New York, 1980.

附录 F　立方 $\bar{4}3m$ 晶体中的电光效应

作为横向调制[1]和电光效应应用的一个例子，我们考虑 $\bar{4}3m$ 对称群晶体时的情形。该群包括 InAs，CuCl，GaAs，和 CdTe。最后两种适用于红外调制，因为它们在 10μm 以上仍保持透明。这些晶体是立方晶体，具有沿着立方体棱（〈100〉方向）的四重对称轴和沿着立方对角线（〈111〉方向）的三重对称轴。

为了明确起见，将场作用到〈111〉方向——也就是沿着三重对称轴。取大小为 E 的场，有

$$\boldsymbol{E} = \frac{E}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) \tag{F-1}$$

式中 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 分别是沿着立方体棱 x，y，z 的单位矢量。根据表 9.1（见 $\bar{4}3m$ 张量），三个非零电光张量为 $r_{41}, r_{52} = r_{41}$ 和 $r_{63} = r_{41}$。因此，利用方程（9.1-9）和（9.1-10），以及

$$\left(\frac{1}{n^2}\right)_1 = \left(\frac{1}{n^2}\right)_2 = \left(\frac{1}{n^2}\right)_3 \equiv \frac{1}{n_0^2}$$

得到

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{n_o^2} + \frac{2r_{41}E}{\sqrt{3}}(xy + yz + xz) = 1 \tag{F-2}$$

上式可作为折射率椭球方程。从这点可以推出新的椭球主轴方向 x', y' 和 z'。然而，稍加考虑就可证明：当外加场沿着〈111〉方向时，沿着〈111〉方向仍然保持三重对称轴；而在垂直于〈111〉的平面内，可任意选择剩余的两个正交轴的位置。因此（F-2）是关于〈111〉的回转椭球方程。为了证明此观点，我们选择〈111〉为 z' 轴，从而

$$z' = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z \tag{F-3}$$

取

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}z \\ y' &= \frac{-2}{\sqrt{6}}x + \frac{1}{\sqrt{6}}y + \frac{1}{\sqrt{6}}z \end{aligned} \tag{F-4}$$

因此

$$x = -\frac{2}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z'$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z'$$

[1] 横向调制是术语，针对外加场垂直于传播方向的情形。

$$z=-\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{6}}y'+\frac{1}{\sqrt{3}}z' \quad \text{(F-5)}$$

将式（F-5）代入式（F-2），我们得到在 x',y',z' 坐标系中的折射率椭球方程为

$$(x'^2+y'^2)\left(\frac{1}{n_o^2}-\frac{r_{41}E}{\sqrt{3}}\right)+z'^2\left(\frac{1}{n_o^2}+\frac{2r_{41}}{\sqrt{3}}E\right)=1 \quad \text{(F-6)}$$

因此主折射率变为

$$n_{y'}=n_{x'}=n_o+\frac{n_o^3r_{41}E}{2\sqrt{3}}$$
$$n_{z'}=n_o-\frac{n_o^3r_{41}E}{\sqrt{3}} \quad \text{(F-7)}$$

从方程式（F-6）很明显可知，只要 x' 和 y' 垂直于 z' 且 x' 和 y' 相互垂直，那么当 x' 和 y' 的其他取值代入式（F-6）后，将起到与混合项 $x'^2+y'^2$ 相同的作用，该混合项在以 z' 轴为轴旋转时保持不变。折射率椭球式（F-6）的主轴如图 F.1 所示。

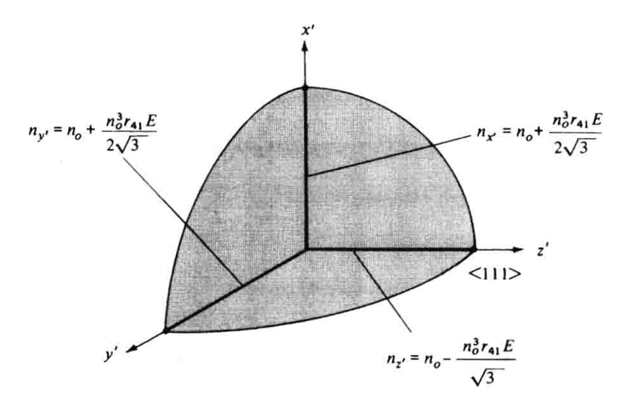


图 F.1　$\bar{4}3m$ 晶体（**E** 平行于〈111〉）的折射率椭球与平面 $x'=0, y'=0, z'=0$ 的相交。对于本例，主折射率为 $n_{x'},n_{y'},n_{z'}$

基于先前情况的调幅器如图 F.2 所示。光强透射比由方程（9.2-10）定义为

$$\frac{I_o}{I_i}=\sin^2\frac{\Gamma}{2}$$

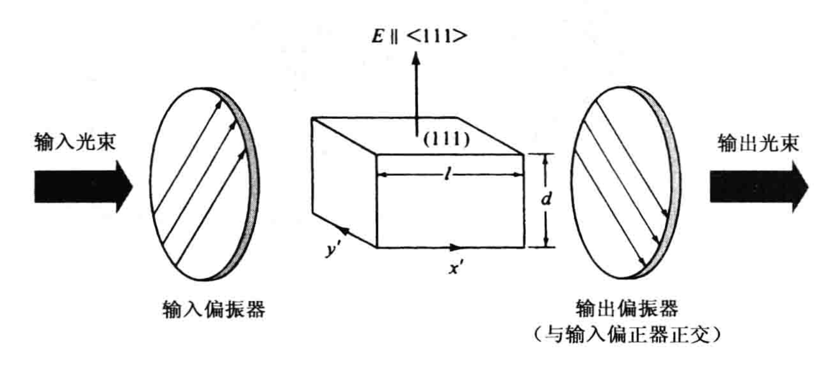


图 F.2　横向光电调制器，其使用了闪锌矿型（$\bar{4}3m$）晶体，**E** 平行于立方对角线〈111〉方向

利用式（F-7），延迟量为

$$\begin{aligned}\Gamma &= \phi_{z'} - \phi_{y'} \\ &= \frac{(\sqrt{3}\pi)n_o^3 r_{41}}{\lambda_0}\left(\frac{Vl}{d}\right)\end{aligned} \tag{F-8}$$

本例（外加电场垂直于传播方向）与轴向的例子式（9.2-3）一个重要不同是：这里的Γ与晶体长度l成比例。

$\bar{4}3m$ 晶体中电光效应的完整讨论可以参考：C.S.Namba, J.*Opt.Soc.Am.*51:76（1961）。他分析的概述见表格 F.1。

表 F.1　当外加电场分别沿着三个不同方向时，$\bar{4}3m$（闪锌矿结构）晶体中的电光特性和延迟

	$E_\perp$(001) Plane	$E_\perp$(110) Plane	$E_\perp$(111) Plane
	$E_x = E_y = 0, E_z = E$	$E_x = E_y = \frac{E}{\sqrt{2}}, E_z = 0$	$E_x = E_y = E_z = \frac{E}{\sqrt{3}}$
折射率椭球	$\frac{x^2+y^2+z^2}{n_o^2} + 2r_{41}Exy = 1$	$\frac{x^2+y^2+z^2}{n_o^2} + \sqrt{2}r_{41}E(yz+zx) = 1$	$\frac{x^2+y^2+z^2}{n_o^2} + \frac{2}{\sqrt{3}}r_{41}E(yz+zx+xy) = 1$
n'_x	$n_o + \frac{1}{2}n_o^3 r_{41}E$	$n_o + \frac{1}{2}n_o^3 r_{41}E$	$n_o + \frac{1}{2\sqrt{3}}n_o^3 r_{41}E$
n'_y	$n_o - \frac{1}{2}n_o^3 r_{41}E$	$n_o - \frac{1}{2}n_o^3 r_{41}E$	$n_o + \frac{1}{2\sqrt{3}}n_o^3 r_{41}E$
n'_z	n_o	n_o	$n_o - \frac{1}{\sqrt{3}}n_o^3 r_{41}E$
$x'\ y'\ z'$坐标	z,z′ y′ y (001) x′ 45° x	z (1̄10) y′ 45° y z′ (001) 45° 45° x′ x	z x′ z′(111) y y′ x
光束与光轴与偏振器正交	E_{dc} Γ_z A(y) P(x) y (001) (100) x Γ=0 Γ=0 Γ_{xy} A E P 45°	Γ=0 E_{dc} (110) (1̄10) (001) Γ=0 z′ P(E) Γ_{max} A	Γ=0 E_{dc} (111) d Γ Γ E P 45° A
相值延迟 $\Gamma(V=Ed)$	$\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda}n_o^3 r_{41}V$ $\Gamma_{xy} = \frac{\pi}{\lambda}\frac{l}{d}n_o^3 r_{41}V$	$\Gamma_{max} = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{l}{d}n_o^3 r_{41}V$	$\Gamma = \frac{\sqrt{3}\pi}{\lambda}\frac{l}{d}n_o^3 r_{41}V$

After C. S. Namba, *J. Opt. Soc. Am.* 51:76 (1961).

附录 G　功率单位与衰减单位的转换关系

在光通信中，功率单位和传输衰减单位经常分别用 dBm 和 dB/km 表示。这里我们提供一张作为参考的转换表。

光功率以 dBm 为单位与 mW 为单位之间的转换关系，由下式给出

$$P\ (\text{dBm}) = 10\log_{10} P\ (\text{mW})$$

表 G.1　功率对应值

功率（dBm）	功率（mW）
–20 dBm	0.01mW
–10 dBm	0.1 mW
0 dBm	1 mW
1 dBm	1.26 mW
2 dBm	1.58 mW
3 dBm	2 mW
7 dBm	5 mW
10 dBm	10 mW
11.8 dBm	15 mW
15 dBm	31.6 mW
20 dBm	100 mW

衰减以 dB/km 为单位与 km^{-1} 为单位之间的转换关系，由下式给出

$$\alpha(\text{dB/km})=(10\log_{10}e)\alpha\left(\text{km}^{-1}\right)=4.343\alpha\left(\text{km}^{-1}\right)$$

表 G.2　衰减对应值

线性衰减系数 α（dB/km）	线性衰减系数 α（km^{-1}）
0.043 dB/km	0.01km^{-1}
0.22 dB/km	0.05 km^{-1}
0.43 dB/km	0.1 km^{-1}
1 dB/km	0.23 km^{-1}
4.3 dB/km	1.0 km^{-1}
10 dB/km	2.3 km^{-1}
43 dB/km	10 km^{-1}

索　　引

Amplitude grating	振幅光栅
Amplitude modulation(elector-optic)	振幅调制（电光）
Amplitude-Phase coupling	振幅相位耦合
Angular beam spread	波束扩散角
Angular momentum	角动量
of circularly polarized light	圆偏振光的
of modes in optical fibers	光纤中存在的模式
Anisotropic media:	各向异性媒质
classification of	各向异性媒质的分类
electromagnetic propagation in	电磁场的传播在各向异性媒质
Annihilation operator	湮灭算符
Anomalous dispersion	反常色散
Anti-Hermitian matrix	反-厄米矩阵
Antipodal points	对跖点
Antireflection coating	增透膜
Anti-Stockes scattering	反斯托克斯散射
Apodization	切趾
AR coating.*See* Antireflection coating	抗反射膜，增透膜（见 Antireflection coating）
ASE.*See* Amplified spontaneous emission	放大的自发辐射（见 Amplified apontaneous emission）
As-S glass(As_2S_3):acousto-optic properties	硫化银玻璃：声光性质
index of refraction	折射率
strain-optic coefficients	弹光系数
Asymmetric Fabry-Perot etalon	非对称法布里标准具
Asymmetric slab waveguides	非对称平板波导
Asymptotic forms(Bessel functions)	渐近形式(贝塞尔函数)
Atomic polarizability	原子极化
Atomic quantum efficiency	原子量子效率
Atomic transitions	原子跃迁
Atmosphere	大气层
index of refraction	折射率
Au-Si photodetector	Au-Si 光电探测器
Attenuation:coefficient	衰减系数
due to bending of fibers	由于光纤的弯曲
in silica fibers	在石英光纤中
units conversion	单位转换
Autocorrelation function	自相关函数
Avalanche photodiode	雪崩光电二极管
signal-to-noise ration	信噪比

$Bi_{12}GeO_{20}$(BGO): index of refraction	锗酸铋：折射率
Bilinear transformation	双线性变换
Binary pulse code modulation	二元脉冲编码调制
Birefringence	双折射
circular	圆形
in fibes	在光纤中
negative	负的
of liquid crystal	液晶
stress-induced in fibers	光纤中的诱导应力
Birefringence vector	双折射矢量
Birefringent filters.*See* Polarization intrference filers	双折射滤镜（见 Polarization intrference filers）
Birefringent optical system	双折射光学系统
equivalent system	等效系统
PMD	偏振模色散
$Bi_{12}SiO_{20}$(BSO): dielectric constant	硅酸铋：介电常数
electro-optic coefficients	电光系数
index of refraction	折射率
Bit error rate(BER)	误码率
$Bi_{12}TiO_{20}$(BTO) :index of refraction	锑酸铋：折射率
Blackbody radiation	黑体辐射
Bloch theorem	布洛赫理论
Bloch wavefunction	布洛赫波函数
Bloch wave number	布洛赫波数
in periodic ring resonators	在周期性环型共振腔
in periodic waveguides	在周期性波导
Bloch waves	布洛赫波
energy velocity of	能量速率
group velocity of	群速率
index of refraction	折射率
nonlinear optical susceptibility	非线性极化率
in periodic waveguides	在周期性波导
in semiconductors	在半导体
Bloch wavevector	布洛赫波矢
Boltzmann constant	玻尔兹曼常量
Boltzmann distrbution	玻尔兹曼分布
Booster amplifier	增压（助推）放大
Boundary conditions	边界条件
Bragg cells	布拉格器件
beam deflector	光束偏转器
Bragg condition(law)	布拉格条件（法则）

Detection of optical radiation	光辐射的探测
noise in	噪声
Dextrorotatory	右旋
DFB lasers.*See* Distributed feedback lasers	分布反馈激光器（见 Distributed feedback lasers）
Diamond:bandgap	金刚石：带隙
dielectric constant	介电常数
index of refraction	折射率
semiconductor properties	半导体性质
Verdet constant	弗尔德常数
Dichroic polarizers	二向色性偏振片
Dielectric constan	介电常数
liquid crystal	液晶
of selected semiconductors(table)	选定的半导体
principal	原理
Dielectric perturbation theory	电介质微扰理论
Dielectric slabs	电介质平板
Dielectric tensor	介电张量
Diffraction integral	衍射积分
Fraunhofer	夫琅和费
Fresnel-Kirchhoff	菲涅耳——基尔霍夫
Diffraction losses	衍射损耗
Diode laser *See also* Semiconductor laser	二极管激光器（见 Semiconductor laser）
Dipolar dissipation	多极耗散
Dipole moment	偶极矩
Dirac notation	狄拉克符号
Directional couplers	定向耦合器
frequency selective	频率选择型
grating	光栅型
Director	控制器
Dispersion	色散
anomalous	异常
chromatic	彩色
group velocity	群速度
in silica	介质硅
material	材料
modal	模式
normal	常态
polarization mode(PMD)	偏振模
relation	关系
waveguide	波导

Effective strain component	有效应变分量
EH modes	EH 模
Ehrenfest's theorem	埃伦费斯特定理
Eigenfunctions	本征函数
Eigenmodes	本征模
Eigen polarization	本征极化
Eigen refractive indices	本征折射率
Eigenstates	本征态
Eigenvalues	特征值
Eigenvectors	特征矢量
Einstein relationships	爱因斯坦关系
Electric charge density	电荷密度
Electric current density	电流密度
Electric displacement vector	电位移矢量
in liquid crystal	在液晶中
of plane waves in crystals	晶体中平面波
of plane waves in uniaxial crystal	单轴晶体中平面波
Electric field vector	电场矢量
Electric polarization	电极化
Electric susceptibility	电极化率
classical electron model	经典电子模型
Electroabsorption modulator	调节器
Electromagnetic fields	电磁场
momentum density	动量密度
Electromagnetic waves	电磁波
and atomic transitions	原子跃迁
Electron gas	电子气
Electron-hole recombination	电子空穴复合
Electron-optic coefficients:and crystal symmetry(table)	电光系数和晶体对称性（表）
definition	精确度
linear	线性
of selected crystal,(table)	所选晶体（表）
Electron-optic effect	电光效应
general solution	通解
in cubic crystals	在立方晶体里
in KDP	在磷酸二氢钾中
in $LiNbO_3$	在铌酸锂中
in liquid crystals	在液晶里
Electron-optic modulation	电光调制
amplitude	振幅

ruby laser	红宝石激光器
Ti^{3+}:Sapphire	钛：蓝宝石
Energy uncertainty	能量不确定度
Energy velocity:in anisotropic media	各向异性媒质中的能速度
in periodic media	周期性介质的能速
of Bloch wave	布洛赫波的能速
of modes in dielectric waveguides	介质波导中的模式能速
Ensemble average	统计平均值
Envelop function	包络函数
Equivalent circuits:laser oscillator	等效电路：激光振荡器
noise	噪声
of *p-n* junction	p-n 结等效电路
of semicondictor photodiode	半导体发光二极管等效电路
Equivalent noise generator	等效噪声发生器
Equivalent optical birefringent system	等效光学双折射系统
Equivalent optical lens system	等效光学透镜系统
Er^{3+}:silica laser	铒离子：二氧化硅介质
Erbium-doped fiber amplifiers(EDFA)	掺铒光纤放大器
Error function	误差函数
Error probability	错误概率
Etalon:Fabry-Perot	标准具：法布里–珀罗标准具
Gires-Tournois	吉莱–图努瓦标准具
multi-cavity	多腔标准具
Euler-Lagrange equations	欧拉–拉格朗日方程
Euler's constant	欧拉常量
Evanescent Bloch wave	倏逝布洛赫波
Exchange coupling	交换耦合
Extinction coefficient	消光系数
Extraordinary wave	非常波
index of refraction	非常波折射率
polarization	非常波偏振
Eye diagram	眼图
Fabry-Perot amplifiers	法布里－珀罗放大器
Fabry-Perot etalon	法布里－珀罗标准具
absorption in	法布里－珀罗标准具吸收
amplifier	法布里－珀罗标准具放大器
as optical spectrum analyzers	作为光学频谱分析
asymmetric	非对称
cavity	腔

index of reraction	折射率
Raman gain	拉曼增益
strain-optic coefficients	应变光学系数
Lithium niobate, See $LiNbO_3$	铌酸锂（见 $LiNbO_3$）
Lithium tantalate, *See* $LiTaO_3$	钽酸锂（见 $LiTaO_3$）
Local field	局域
Lorentz force	洛仑兹力
Lorentzian gain profile	洛仑兹增益剖面图
Lorentzian lineshape function	洛仑兹线型函数
Lorentz reciprocity theorem	洛仑兹互易定理
Loss modulation	损耗调制
LP modes.See Linearly polarized (LP)modes	线性极化模（见 Linearly polarized (LP)modes）
LPE.See Liquid phase epitaxy	液相外延（见 Liquid phase epitaxy）
Lucite :index of refraction	有机玻璃：折射率
Kerr coefficient	克尔系数
nonlinear susceptibility	非线性极化率
Lyot-Ohman filters	立奥–渥曼滤光器
Mzah-Zehnder interferometer	马赫–曾德干涉仪
Magnetic field vector	磁场矢量
Magnetic induction	磁感应强度
Magnetic polarization	磁极化
Magnetic equations	磁场方程
Matrix method :for coupled ring resonators	用于耦合环共振器矩阵法
for Gaussian beams	高斯光束的矩阵法
for muti-layer structures	多层结构矩阵法
for rays	射线矩阵法
Jones (for birefringent systems)	双射线系统的琼斯矩阵法
Maxwell's equations	麦克斯韦方程组
Maxwell's stress tensor	麦克斯韦应力张量
MBBA,Verdet constant	MBBA,费尔德常量
MBE.*See* Molecular beam epitaxy	分子束外延（见 Molecular beam epitaxy）
Mean collision time	平均碰撞时间
Mean signal delay	平均信号延迟
Meridional rays	子午射线
Metallo-Organic chemical vapor deposition (MOCVO)	金属有机物化学气相沉积
MgF2:index of refraction	氟化镁折射率
MgO: index of refraction	氧化镁:折射率
Mica: index of refraction	云母折射率
Michelson interferometer	迈克尔逊干涉仪

Spot size	光斑大小
in media with quadratic gain profile	二次增益分布介质中的光斑大小
of modes in quadratic index media	二次指数模式介质中的光斑大小
Square wave function	方波函数
Squeezed states	压缩态
experimental demonstration	实验演示压缩态
via parametric amplification	经过参数放大的压缩态
$Sr_{0.75}Ba_{0.25}Nb_2O_6$.*See* Strontian barium niobate	铌酸钡锶（见 Strontian barium niobate）
SRS.*See* Stimulated Raman Scattering	受激拉曼散射（见 Stimulated RamanScattering）
$SrTiO_3$: index of refraction	$SrTiO_3$ 的折射率
Stability condition, optical resonators	光共振腔的稳定性条件
Stability diagram, optical resonators	光共振腔的稳定性图
Stability of modes	模式稳定性
Stark effect	斯塔克效应
quantum-confined	量子限制斯塔克效应
Step-index circular dielectric waveguides	阶跃型折射率圆介质波导
exact solutions	阶跃型折射率圆介质波导的精确解
Step-index fibers	阶跃型折射率光纤
confinement factor	阶跃型折射率光纤的限制因子
cutoff	阶跃型折射率光纤的截止
exact solutions	阶跃型折射率光纤的精确解
hybrid modes	阶跃型折射率光纤的混合模式
linearly polarized modes	阶跃型折射率光纤的线性极化模式
mode condition	阶跃型折射率光纤的模条件
power flow	阶跃型折射率光纤的功率流
Stimulated Brillouin scattering (SBS)	受激布里渊散射
coupled equations	受激布里渊散射的耦合方程
gain coefficients	受激布里渊散射的耦合方程的增益系数
Stimulated emission	受激辐射
Stimulated Raman scattering(SRS)	受激拉曼散射
coupled equations	受激拉曼散射的耦合方程
gain coefficients	受激拉曼散射的增益系数
Strokes parameters	斯托克斯参数
Strokes relationship	斯托克斯关系式
Strokes scattering	斯托克斯散射
Strokes Theorem	斯托克斯原理
Strokes vectors	斯托克斯矢量
Straight-through coupling coefficient	直通式耦合系数
Straight- through transmission coefficient	直通式传输系数
Strain	应变